CURSO DE MÉTODOS DE LA FÍSICA MATEMÁTICA

ANÁLISIS FUNCIONAL

H. FALOMIR
DEPARTAMENTO DE FÍSICA
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS - UNLP

OPERADORES NO ACOTADOS

1. Extensiones de operadores lineales

• Sea A un operador lineal acotado definido sobre un dominio $\mathcal{D}(A)$ de un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$, y sea $u \in \overline{\mathcal{D}(A)}$. El vector u siempre puede ser representado como el límite de una secuencia fundamental $\{u_n\}$ contenida en $\mathcal{D}(A)$. Y como A es acotado[1], tenemos

$$\|Au_n - Au_m\| = \|A\,(u_n - u_m)\| \leq \|A\|\ \|u_n - u_m\| \to 0 \tag{1.2}$$

para $n, m \to \infty$. Es decir, $\{Au_n\}$ es también una secuencia fundamental.

Entonces, como $\mathcal{H}$ es completo, existe un vector $v \in \mathcal{H}$ tal que

$$v = \lim_{n\to\infty} Au_n. \tag{1.3}$$

Este límite es independiente de la secuencia convergente a u considerada. En efecto, si $\{u_n\}$ y $\{u'_n\} \subset \mathcal{D}(A)$ son coterminales, entonces

$$\left\|Au_n - Au'_n\right\| = \left\|A\left(u_n - u'_n\right)\right\| \leq \|A\|\ \left\|u_n - u'_n\right\| \to 0 \tag{1.4}$$

para $n \to \infty$.

En esas condiciones, se puede **extender** de manera única la definición del operador acotado A a todo $\overline{\mathcal{D}(A)}$, introduciendo un operador $\overline{A}$ de modo que $\forall\, u \in \overline{\mathcal{D}(A)}$

$$\overline{A}u := v = \lim_{n\to\infty} Au_n, \tag{1.5}$$

Actualizado el 15 de abril de 2014.

[1] La norma de A es, por definición,

$$\|A\| = \mathrm{Sup}_{\{u\in\mathcal{D}(A),\ \|u\|=1\}} \|Au\|\,. \tag{1.1}$$

donde $\{u_n\} \subset \mathcal{D}(A)$ y $u = \text{lím}_{n\to\infty} u_n$. Así definido, este operador es lineal y acotado[2].

• En particular, un operador lineal acotado A, definido sobre un dominio $\mathcal{D}(A)$ denso en un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$, tiene una única extensión lineal y acotada sobre todo $\mathcal{H}$, denominada su **clausura** y denotada por $\overline{A}$, cuya norma es igual a $\|A\|$.

• Sea A un operador lineal definido en *todo* el espacio de Hilbert $\mathcal{H}$. Se puede demostrar que A es acotado $\Leftrightarrow \forall\ \{u_n\} \to u$ tal que la secuencia $\{Au_n\} \to v$, es $v = Au$.

• Pero si T es un operador **no acotado** definido en un dominio $\mathcal{D}(T)$, y $\{u_n\}$ es una secuencia fundamental en $\mathcal{D}(T)$, la secuencia $\{Tu_n\}$ no será, en general, convergente en $\mathcal{H}$. Incluso si, para dos secuencias coterminales $\{u_n\}$ y $\{u'_n\} \subset \mathcal{D}(T)$, sucede que $\{Tu_n\}$ y $\{Tu'_n\}$ son fundamentales, en general, ellas no serán coterminales.

• Supongamos que para $u \notin \mathcal{D}(T)$ ocurre que **para toda** secuencia $\{u_n\}$ convergente a u y contenida en el dominio de T, la secuencia $\{Tu_n\}$ tiene un límite fijo:

$$\lim_{n\to\infty} Tu_n = v \in \mathcal{H}, \quad \forall\, \{u_n\} \in \mathcal{D}(T) \mid \lim_{n\to\infty} u_n = u. \tag{1.9}$$

En esas condiciones, se puede **extender** la definición de T incorporando al punto u de modo que

$$Tu := \lim_{n\to\infty} Tu_n = v. \tag{1.10}$$

• Si $\forall$ secuencia fundamental $\{u_n\} \subset \mathcal{D}(T)$ tal que $\{Tu_n\}$ es también de Cauchy se cumple que

$$\lim_{n\to\infty} u_n = u \in \mathcal{D}(T), \quad \text{y} \quad \lim_{n\to\infty} Tu_n = Tu, \tag{1.11}$$

entonces T se dice **cerrado**.

---

[2]En efecto, si dos secuencias en $\mathcal{D}(A)$ tienen por límite a $u = \text{lím}\, u_n$ y $u' = \text{lím}\, u'_n$ respectivamente, entonces

$$\overline{A}\left(\alpha u + \beta u'\right) = \text{lím}\, A\left(\alpha u_n + \beta u'_n\right) = \alpha\, \text{lím}\, Au_n + \beta\, \text{lím}\, Au'_n = \alpha \overline{A} u + \beta \overline{A} u'. \tag{1.6}$$

En cuanto a su norma, tenemos por un lado que

$$\|\overline{A}\| = \text{Sup}_{\left\{u\in\overline{\mathcal{D}(A)},\ \|u\|=1\right\}} \left\|\overline{A}u\right\| \geq \text{Sup}_{\{u\in\mathcal{D}(A),\ \|u\|=1\}} \left\|\overline{A}u\right\| = \|A\|\,. \tag{1.7}$$

Por otra parte, por la continuidad de la norma, para cualquier secuencia en $\mathcal{D}(A)$ convergente a un vector unitario u tenemos

$$\|Au_n\| \leq \|A\|\ \|u_n\| \Rightarrow \left\|\overline{A}u\right\| \leq \|A\|\ \|u\| = \|A\|\,, \tag{1.8}$$

lo que implica que $\left\|\overline{A}\right\| \leq \|A\|$. En definitiva, $\left\|\overline{A}\right\| = \|A\|$.

• Dado un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$, la suma directa $\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$ es también un espacio de Hilbert respecto del producto escalar definido a continuación. Dados los vectores

$$\begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \psi_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \varphi_2 \\ \psi_2 \end{pmatrix} \in \mathcal{H} \oplus \mathcal{H}, \tag{1.12}$$

con $\varphi_1, \varphi_2, \psi_1, \psi_2 \in \mathcal{H}$, las operaciones lineales están definidas como

$$\begin{gathered} \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \psi_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varphi_2 \\ \psi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi_1 + \varphi_2 \\ \psi_1 + \psi_2 \end{pmatrix}, \\ \lambda \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \psi_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda\varphi_1 \\ \lambda\psi_1 \end{pmatrix}, \end{gathered} \tag{1.13}$$

y el producto escalar está dado por

$$\left(\begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \psi_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \varphi_2 \\ \psi_2 \end{pmatrix} \right)_{\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}} = (\varphi_1, \varphi_2)_{\mathcal{H}} + (\psi_1, \psi_2)_{\mathcal{H}} \,. \tag{1.14}$$

Evidentemente, la secuencia $\left\{ \begin{pmatrix} \varphi_n \\ \psi_n \end{pmatrix}, n \in \mathbb{N} \right\}$ es fundamental en $\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$ si y sólo si las secuencias $\{\varphi_n \,, n \in \mathbb{N}\}$ y $\{\psi_n \,, n \in \mathbb{N}\}$ son fundamentales en $\mathcal{H}$.

• La **gráfica** de un operador lineal T es el conjunto de vectores de $\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$ de la forma

$$\Gamma(T) := \left\{ \begin{pmatrix} \varphi \\ T\varphi \end{pmatrix}, \ \varphi \in \mathcal{D}(T) \right\}. \tag{1.15}$$

Dada la linealidad de T, $\Gamma(T)$ es un subespacio lineal de $\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$ si el dominio $\mathcal{D}(T)$ es un subespacio de $\mathcal{H}$. Si además T es cerrado, entonces $\Gamma(T)$ es un subespacio cerrado[3].

• Sea T_1 un operador lineal definido sobre un dominio $\mathcal{D}(T_1) \subset \mathcal{H}$. Si $\Gamma(T) \subset \Gamma(T_1)$ se dice que T_1 es una **extensión** de T en $\mathcal{H}$, lo que se denota por $T \subset T_1$.

Dicho de otro modo,

$$T \subset T_1 \Leftrightarrow \begin{cases} \mathcal{D}(T) \subset \mathcal{D}(T_1), \\ \\ T_1\varphi = T\varphi, \ \forall \, \varphi \in \mathcal{D}(T). \end{cases} \tag{1.17}$$

[3]La clausura en $\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$ de la gráfica de T, $\overline{\Gamma(T)}$, no corresponde en general a la gráfica de un operador. Una condición necesaria para que $\overline{\Gamma(T)}$ sea la gráfica de un operador es que si

$$\begin{pmatrix} \varphi \\ \psi_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \varphi \\ \psi_2 \end{pmatrix} \in \overline{\Gamma(T)} \Rightarrow \psi_1 = \psi_2, \tag{1.16}$$

lo que en general no se cumple.

Ejemplo 1.1. - Sea $\mathcal{D}(T) = \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$, con $T\varphi(x) = -i\,\varphi'(x)$, y sea $\mathcal{D}(T_1) = \mathcal{C}_0^1(\mathbb{R})$, con $T_1\varphi(x) = -i\,\varphi'(x)$. En esas condiciones, $T \subset T_1$. $\diamond$

• Un operador T se dice **clausurable** si tiene una extensión cerrada. Si T_1 es una extensión cerrada de T, entonces $\Gamma(T) \subset \Gamma(T_1)$, que es un conjunto cerrado de $\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$. En esas condiciones, la clausura de la gráfica de T también está contenida en la de T_1, $\overline{\Gamma(T)} \subset \Gamma(T_1)$, y, por lo tanto, corresponde a la gráfica de un operador. Nótese que si $\langle \mathbf{0}, \psi \rangle \in \overline{\Gamma(T)}$, entonces $\psi = \mathbf{0}$, puesto que $\langle \mathbf{0}, \mathbf{0} \rangle$ es el único par de esa forma contenido en $\Gamma(T_1)$. Esto significa que en este caso, si $\langle \varphi, \psi \rangle \in \overline{\Gamma(T)}$, entonces ψ está unívocamente determinado.

• Si T es clausurable, se define su **clausura** $\overline{T}$ como el operador cuya gráfica es $\Gamma(\overline{T}) = \overline{\Gamma(T)}$. Su dominio es

$$\mathcal{D}(\overline{T}) = \left\{ \varphi \mid \begin{pmatrix} \varphi \\ \psi \end{pmatrix} \in \overline{\Gamma(T)},\ \psi \in \mathcal{H} \right\}, \tag{1.18}$$

y su acción corresponde a $\overline{T}\varphi = \psi$, donde ψ es el único vector de $\mathcal{H}$ tal que $\langle \varphi, \psi \rangle \in \overline{\Gamma(T)}$.

Por su definición, $\overline{T}$ es cerrado, constituyendo una extensión cerrada de T. Por otra parte, $\overline{T} \subset T_1$, donde T_1 es cualquier extensión cerrada de T. Por lo tanto, todo operador clausurable tiene una extensión cerrada mínima, que corresponde a su clausura $\overline{T}$.

• Sea T un operador lineal cerrado con dominio $\mathcal{D}(T)$ denso en un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$. El operador $(T - \lambda I)$ está definido sobre $\mathcal{D}(T)$ y su rango es cierto subespacio de $\mathcal{H}$,

$$(T - \lambda I) : \mathcal{D}(T) \rightarrow \mathrm{Rank}\,(T - \lambda I) \subset \mathcal{H}. \tag{1.19}$$

Un complejo λ pertenece al **conjunto resolvente** de T, $\rho(T)$, si $\mathrm{Rank}\,(T - \lambda I)$ es denso en $\mathcal{H}$ y $(T - \lambda I)$ es una biyección con inversa acotada.

Si $\lambda \in \rho(T) \Rightarrow$ existe el operador acotado $R_\lambda(T) := (T - \lambda I)^{-1}$, llamado **resolvente** de T.

• $\rho(T)$ es un subconjunto abierto del plano complejo $\mathbb{C}$, sobre el cual $R_\lambda(T)$ es una función analítica de λ, cuyos valores son operadores acotados que conmutan entre sí y satisfacen

$$R_\lambda(T) - R_\mu(T) = (\lambda - \mu) R_\lambda(T) R_\mu(T),\ \forall\, \lambda, \mu \in \rho(T) \tag{1.20}$$

(propiedades idénticas a las de la resolvente de operadores acotados).

• Se define el **espectro** de T como el complemento del conjunto resolvente en los complejos,

$$\sigma(T) := \mathbb{C} \setminus \rho(T) = \{ \lambda \in \mathbb{C} \mid \lambda \notin \rho(T) \}. \tag{1.21}$$

• Si λ es un autovalor de T, entonces

$$\exists\, u \in \mathcal{D}(T) \mid Tu = \lambda u \Rightarrow (T - \lambda I)\, u = \mathbf{0}\,, \tag{1.22}$$

con $u \neq \mathbf{0}$. Por lo tanto, $(T - \lambda I)$ no es una biyección $\Rightarrow \lambda \notin \rho(T)$.

El conjunto de los autovalores de T constituye el **espectro puntual** de T, $\sigma_p(T) \subset \sigma(T)$.

• Si λ no es un autovalor de T y Rank$(T - \lambda I)$ no es denso en $\mathcal{H} \Rightarrow \lambda \notin \rho(T)$. En ese caso se dice que λ pertenece al **espectro residual** de T, $\sigma_r(T) \subset \sigma(T)$.

• Finalmente, un complejo λ pertenece al **espectro continuo** de T, $\sigma_c(T) \subset \sigma(T)$, si $(T - \lambda I)$ tiene una inversa no acotada con dominio Rank$(T - \lambda I)$ denso en $\mathcal{H}$.

2. El operador adjunto

• Sea T un operador lineal definido sobre un dominio $\mathcal{D}(T)$ **denso** en $\mathcal{H}$. Sea $\mathcal{D}(T^\dagger)$ el conjunto de los vectores $\psi \in \mathcal{H}$ para los cuales $(\psi, T\varphi)$ es una **funcional lineal y continua**[4] de $\varphi \in \mathcal{D}(T)$ (respecto de la distancia en $\mathcal{H}$). Entonces, para cada $\psi \in \mathcal{D}(T^\dagger)$ existe un vector $\chi \in \mathcal{H}$ tal que dicha funcional corresponde al producto escalar

$$(\psi, T\varphi) = (\chi, \varphi)\,, \quad \forall\, \varphi \in \mathcal{D}(T). \tag{2.2}$$

Puesto que $\mathcal{D}(T)$ es denso en $\mathcal{H}$, χ está unívocamente determinado por ψ. En efecto, si $(\chi_1 - \chi_2, \varphi) = 0$, $\forall\, \varphi \in \mathcal{D}(T)$, $\Rightarrow \chi_1 - \chi_2 = \mathbf{0}$.

Entonces, la acción del operador adjunto $T^\dagger$ sobre $\psi \in \mathcal{D}(T^\dagger)$ se define por

$$T^\dagger \psi := \chi. \tag{2.3}$$

• Dado que una funcional lineal es continua si y sólo si ella es acotada, para $\psi \in \mathcal{D}(T^\dagger)$ es necesario que

$$|(\psi, T\varphi)| \leq K\, \|\varphi\|, \quad \forall\, \varphi \in \mathcal{D}(T). \tag{2.4}$$

Si T es acotado, en virtud de la desigualdad de Cauchy - Schwarz tenemos

$$|(\psi, T\varphi)| \leq \|\psi\|\, \|T\varphi\| \leq \|\psi\|\, \|T\|\, \|\varphi\|, \quad \forall\, \psi \in \mathcal{H}, \tag{2.5}$$

de modo que el adjunto de un operador acotado está definido en todo el espacio de Hilbert, $\mathcal{D}(T^\dagger) = \mathcal{H}$.

• Por el contrario, el adjunto de un operador no acotado puede no estar densamente definido, como lo muestra el siguiente ejemplo.

---

[4] O, equivalentemente, una funcional **lineal y acotada**, es decir, tal que

$$|(\psi, T\varphi)| \leq K\, \|\varphi\|\,,\ \forall\, \varphi \in \mathcal{D}(T)\,, \tag{2.1}$$

para cierta constante fija $K \geq 0$.

Ejemplo 2.1. - Sea $f(x) \notin \mathbf{L_2}(\mathbb{R})$, una función de cuadrado sumable en todo compacto en $\mathbb{R}$ (es decir, $f(x) \in \mathbf{L}_1^{(loc)}(\mathbb{R})$) y que tienda a 0 en el infinito, y sea $\mathcal{D}(T) = \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$ (denso en $\mathbf{L_2}(\mathbb{R})$) el dominio de un operador T definido por

$$T\varphi(x) := \varphi_0(x) \int_{-\infty}^{\infty} f(y)^* \varphi(y)\, dy, \tag{2.6}$$

donde $\varphi_0(x) \in \mathbf{L_2}(\mathbb{R})$ es un vector fijo, y la integral en el segundo miembro converge por ser $\varphi(x)$ acotada y de soporte compacto. Entonces, si $\psi(x) \in \mathcal{D}(T^\dagger)$, existe $\chi(x) \in \mathbf{L_2}(\mathbb{R})$ tal que

$$(\psi, T\varphi) = (\psi, \varphi_0) \int_{-\infty}^{\infty} f(y)^* \varphi(y)\, dy = (\chi, \varphi)\,,\ \forall\, \varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}). \tag{2.7}$$

Pero eso requiere que $(\psi, \varphi_0)^*\, f(x) = \chi(x) \in \mathbf{L_2}(\mathbb{R})$, lo que sólo es posible si $(\psi, \varphi_0) = 0$ y $\chi(x) = \mathbf{0}(x)$.

Por lo tanto, $\mathcal{D}(T^\dagger) = \{\psi \in \mathbf{L_2}(\mathbb{R}) \mid \psi \perp \varphi_0\}$ (que no es un conjunto denso), y $T^\dagger\psi = \mathbf{0}$, $\forall\, \psi \in \mathcal{D}(T^\dagger)$. $\diamond$

• Si $S \subset T \Rightarrow T^\dagger \subset S^\dagger$. En efecto, si $S \subset T \Rightarrow \mathcal{D}(S) \subset \mathcal{D}(T)$, y $\forall\, \varphi \in \mathcal{D}(S),\ S\varphi = T\varphi$. Sea $\psi \in \mathcal{D}(T^\dagger)$. Entonces $\exists\, \chi \in \mathcal{H}$ tal que

$$\begin{array}{c} (\psi, T\varphi) = (\chi, \varphi),\ \forall\, \varphi \in \mathcal{D}(T) \Rightarrow \\[1ex] \Rightarrow (\psi, S\varphi) = (\chi, \varphi),\ \forall\, \varphi \in \mathcal{D}(S) \Rightarrow \psi \in \mathcal{D}(S^\dagger). \end{array} \tag{2.8}$$

Por lo tanto, $\mathcal{D}(T^\dagger) \subset \mathcal{D}(S^\dagger)$, y $\forall\, \psi \in \mathcal{D}(T^\dagger)$ es $T^\dagger\psi = S^\dagger\psi$. Es decir, $T^\dagger \subset S^\dagger$.

• Si $\mathcal{D}(T^\dagger)$ es denso en $\mathcal{H}$, se puede definir su adjunto, $(T^\dagger)^\dagger = T^{\dagger\dagger}$.

• **Teorema I:** Sea T un operador lineal densamente definido en un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$. Entonces

a) $T^\dagger$ es cerrado;
b) T es clausurable $\Leftrightarrow \mathcal{D}(T^\dagger)$ es denso en $\mathcal{H}$, en cuyo caso $\overline{T} = T^{\dagger\dagger}$;
c) si T es clausurable $\Rightarrow (\overline{T})^\dagger = T^\dagger$.

Para probar el punto a) introduzcamos un operador V definido sobre el espacio suma directa $\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$ como

$$V \begin{pmatrix} \phi \\ \psi \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} -\psi \\ \phi \end{pmatrix}, \forall\, \phi, \psi \in \mathcal{H}\,. \tag{2.9}$$

Así definido, V es un **operador unitario**[5] que satisface $V^2 = -\mathbf{I}$. En efecto,

$$\left\| V \begin{pmatrix} \phi \\ \psi \end{pmatrix} \right\|^2 = \left\| \begin{pmatrix} -\psi \\ \phi \end{pmatrix} \right\|^2 = \|\psi\|^2 + \|\phi\|^2 = \left\| \begin{pmatrix} \phi \\ \psi \end{pmatrix} \right\|^2 . \tag{2.13}$$

Entonces, el par $\begin{pmatrix} \phi \\ \chi \end{pmatrix} \in (V[\Gamma(T)])^\perp$ si y sólo si

$$\left(\begin{pmatrix} \phi \\ \chi \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -T\varphi \\ \varphi \end{pmatrix} \right) = -(\phi, T\varphi) + (\chi, \varphi) = 0 \,, \forall\, \varphi \in \mathcal{D}(T) . \tag{2.14}$$

Pero en ese caso

$$\phi \in \mathcal{D}(T^\dagger) \quad \text{y} \quad T^\dagger \phi = \chi \,, \tag{2.15}$$

de manera que

$$\begin{pmatrix} \phi \\ \chi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi \\ T^\dagger \phi \end{pmatrix} \in \Gamma\left(T^\dagger\right) . \tag{2.16}$$

En consecuencia, $\Gamma\left(T^\dagger\right) = (V[\Gamma(T)])^\perp$, que siempre es un conjunto cerrado. Por lo tanto, $T^\dagger$ es cerrado.

Para probar el punto b) señalemos que, debido a la linealidad de T, $\Gamma(T)$ es un subespacio lineal de $\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$. Entonces, teniendo en cuenta que $V[\Gamma(T)]^\perp = [V\Gamma(T)]^\perp$, tenemos para la clausura de la gráfica

$$\overline{\Gamma(T)} = \left([\Gamma(T)]^\perp\right)^\perp = \left(V^2 [\Gamma(T)]^\perp\right)^\perp = \left(V [V\Gamma(T)]^\perp\right)^\perp = \left(V\Gamma\left(T^\dagger\right)\right)^\perp . \tag{2.17}$$

Por lo tanto, de acuerdo a la prueba de a), si $T^\dagger$ está densamente definido (condición necesaria para la existencia de su adjunto) entonces $\overline{\Gamma(T)}$ es la gráfica del operador $T^{\dagger\dagger}$, que es cerrado. En consecuencia, T es clausurable y su clausura $\overline{T}$ coincide con $T^{\dagger\dagger}$.

Por otra parte, si $\mathcal{D}\left(T^\dagger\right)$ no es denso no existe el adjunto de $T^\dagger$. En esas condiciones, $\left(V\Gamma\left(T^\dagger\right)\right)^\perp = \overline{\Gamma(T)}$ no es la gráfica de un operador y, en consecuencia, T no es clausurable. Por lo tanto, si T es clausurable necesariamente $\mathcal{D}\left(T^\dagger\right)$ debe ser denso.

---

[5]Se dice que un operador U definido sobre un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ es unitario si

$$(U\varphi, U\psi) = (\varphi, \psi) \,,\ \forall\, \varphi, \psi \in \mathcal{H} \,, \tag{2.10}$$

con Rank(U) denso en $\mathcal{H}$. En esas condiciones, U es acotado, $U^\dagger = U^{-1}$ y la imagen por U del complemento ortogonal de cierto subespacio $\mathcal{G} \subset \mathcal{H}$, $U\left(\mathcal{G}^\perp\right)$, es el complemento ortogonal de la imagen de $\mathcal{G}$ por U, $(U(\mathcal{G}))^\perp$. En efecto, $\|U\varphi\| = \|\varphi\| \,\forall \varphi \in \mathcal{H}$, y

$$\begin{aligned} (U\varphi, U\psi) &= \left(\varphi, U^\dagger U\psi\right) = (\varphi, \psi) \Rightarrow U^\dagger U = I \,, \\ (\phi, U\psi) &= \left(U^\dagger \phi, \psi\right) = \left(UU^\dagger \phi, U\psi\right) \Rightarrow UU^\dagger = I \,. \end{aligned} \tag{2.11}$$

Además, $\phi \in (U(\mathcal{G}))^\perp$ si y sólo si

$$(\phi, U\psi) = 0 \,, \forall\, \psi \in \mathcal{G} \Leftrightarrow \left(U^\dagger \phi, \psi\right) = 0 \,, \forall\, \psi \in \mathcal{G} \Leftrightarrow U^\dagger \phi \in \mathcal{G}^\perp \Leftrightarrow \phi \in U\left(\mathcal{G}^\perp\right) , \tag{2.12}$$

de modo que $(U(\mathcal{G}))^\perp = U\left(\mathcal{G}^\perp\right)$.

Finalmente, si T es clausurable, por a) y b) sabemos que $T^\dagger$ es cerrado y densamente definido, mientras que su adjunto, $T^{\dagger\dagger} = \overline{T}$, también está densamente definido. Entonces,

$$T^\dagger = \overline{T^\dagger} = \left(T^\dagger\right)^{\dagger\dagger} = \left(T^{\dagger\dagger}\right)^\dagger = \left(\overline{T}\right)^\dagger \,, \tag{2.18}$$

lo que prueba c). □

Ejemplo 2.2. - Consideremos el conjunto de las funciones **absolutamente continuas**[6] en el intervalo $[0,1]$, $AC(0,1)$, tales que su derivada $\varphi'(x)$ sea de cuadrado integrable en ese intervalo. Sea T_1 definido de manera que

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{D}(T_1) := \{\varphi(x) \in AC(0,1) \mid \varphi'(x) \in \mathbf{L_2}(0,1)\} \,, \\ \\ T_1\,\varphi(x) := -i\,\varphi'(x), \end{array} \right. \tag{2.22}$$

y T_2 de modo que

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{D}(T_2) := \{\varphi(x) \in AC(0,1) \mid \varphi'(x) \in \mathbf{L_2}(0,1),\ \varphi(0) = 0\} \,, \\ \\ T_2\,\varphi(x) := -i\,\varphi'(x), \end{array} \right. \tag{2.23}$$

Evidentemente, T_1 es una extensión de T_2, $T_2 \subset T_1$.

Dado que $\mathcal{D}(T_1) \supset \mathcal{D}(T_2) \supset \mathcal{C}_0^\infty(0,1)$, que es denso en $\mathbf{L_2}(0,1)$, ambos dominios de definición son densos.

Por otra parte, de la ec. (2.21) resulta evidente que los dominios de los operadores adjuntos $\mathcal{D}(T_{1,2}^\dagger) \supset \mathcal{C}_0^\infty(0,1)$, por lo que también ellos son densos. En consecuencia, por el teorema anterior, ambos operadores son clausurables.

Ahora determinaremos el operador adjunto de T_1. Si $\psi(x) \in \mathcal{D}(T_1^\dagger)$ entonces $\exists\,\chi(x) \in \mathbf{L}_2(0,1)$ tal que

$$(\psi, T_1\varphi) = \int_0^1 \psi(x)^*(-i)\varphi'(x)\,dx = \int_0^1 \chi(x)^*\varphi(x)\,dx = (\chi,\varphi) \,, \tag{2.24}$$

para toda $\varphi(x) \in \mathcal{D}(T_1)$. Esto requiere que sea posible **integrar por partes** en la primera de esas integrales, por lo que debemos suponer que $\psi(x) \in AC(0,1)$.

---

[6]Si $\varphi(x) \in AC(a,b)$, entonces $\varphi(x)$ es una función continua en (a,b) cuya derivada (en el sentido de límite de cociente incremental) existe en casi todo punto de ese intervalo, y es una función **localmente sumable**. La función puede ser reconstruida a partir de su derivada mediante la regla de Barrow,

$$\varphi(x) \in AC(a,b) \Rightarrow \varphi'(x) \in \mathbf{L_1^{(loc.)}}(a,b), \text{ y } \varphi(x) = \int_a^x \varphi'(y)\,dy + \varphi(a). \tag{2.19}$$

Para las funciones absolutamente continuas también vale la regla de integración por partes. En efecto, si $\varphi_1(x), \varphi_2(x) \in AC(a,b)$, entonces $\varphi_1(x)\,\varphi_2(x) \in AC(a,b)$, la derivada del producto es

$$(\varphi_1(x)\,\varphi_2(x))' = \varphi_1'(x)\,\varphi_2(x) + \varphi_1(x)\,\varphi_2'(x) \in \mathbf{L_1^{(loc.)}}(a,b), \tag{2.20}$$

y

$$\int_a^x \varphi_1(y)\,\varphi_2'(y)\,dy = \varphi_1(x)\,\varphi_2(x) - \varphi_1(a)\,\varphi_2(a) - \int_a^x \varphi_1'(y)\,\varphi_2(y)\,dy. \tag{2.21}$$

Haciendo uso de la propiedad (2.21), podemos escribir que

$$(-i)\psi(x)^*\varphi(x)\Big|_0^1 + \int_0^1 \big(-i\,\psi'(x)\big)^*\varphi(x)\,dx = \int_0^1 \chi(x)^*\varphi(x)\,dx\,. \tag{2.25}$$

Teniendo en cuenta que una funcional continua respecto de la convergencia en media no puede depender del valor que su argumento tome en un punto particular del intervalo $[0,1]$, y dado que los valores que las funciones $\varphi(x)$ toman en $x=0,1$ son arbitrarios, vemos que debemos imponer además la condición de contorno $\psi(0)=0=\psi(1)$.

En esas condiciones, dado que $\mathcal{D}(T_1)$ es denso en $\mathbf{L}_2(0,1)$, la igualdad (2.25) implica que $\chi(x)=-i\,\psi'(x)\in\mathbf{L}_2(0,1)$.

En definitiva, el operador $T_1^\dagger$ está definido de modo que

$$\left\{\begin{array}{l} \mathcal{D}(T_1^\dagger) := \{\psi(x)\in AC(0,1)\mid \psi'(x)\in\mathbf{L_2}(0,1)\,,\psi(0)=0=\psi(1)\}\ , \\[2ex] T_1^\dagger\,\psi(x) := -i\,\psi'(x)\,. \end{array}\right. \tag{2.26}$$

Nótese que, en este caso, T_1 es una extensión de $T_1^\dagger$, $T_1^\dagger\subset T_1$.

Siguiendo el mismo procedimiento resulta inmediato mostrar que $T_1^{\dagger\dagger}=\overline{T_1}=T_1$, que entonces es un operador cerrado.

Similarmente, se obtiene que

$$\left\{\begin{array}{l} \mathcal{D}(T_2^\dagger) := \{\psi(x)\in AC(0,1)\mid \psi'(x)\in\mathbf{L_2}(0,1),\ \psi(1)=0\}\ , \\[2ex] T_2^\dagger\,\psi(x) := -i\,\psi'(x)\,, \end{array}\right. \tag{2.27}$$

y que $T_2^{\dagger\dagger}=\overline{T_2}=T_2$, que también es cerrado. Además, se ve que $T_1^\dagger\subset T_2^\dagger$. $\diamond$

• En general, la elección de un dominio de definición para un operador diferencial tiene una influencia determinante sobre su espectro, como lo muestra el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.3. - Consideremos la ecuación

$$-i\,\varphi'(x)=\lambda\varphi(x),\ \text{con } \varphi(x)\in AC(0,1)\,. \tag{2.28}$$

Esa igualdad implica que

$$\begin{array}{c} \varphi'(x)\in AC(0,1)\Rightarrow \varphi^{(2)}(x)\in AC(0,1)\Rightarrow\dots \\[2ex] \cdots\Rightarrow\varphi(x)\in\mathcal{C}^\infty(0,1)\,. \end{array} \tag{2.29}$$

En esas condiciones, la ecuación de autovalores para los operadores $T_{1,2}$ del ejemplo 2.2 se reduce a una ecuación diferencial ordinaria, cuya solución es

$$\varphi(x)=e^{i\lambda x}\varphi(0)\in AC(0,1)\subset\mathbf{L_2}(0,1). \tag{2.30}$$

Pero mientras que todo número complejo $\lambda\in\mathbb{C}$ es un autovalor de T_1, la **condición de contorno** para T_2, $\varphi(0)=0\Rightarrow\varphi(x)\equiv 0$.

Entonces, $\sigma_p(T_1) = \mathbb{C}$, mientras que T_2 no tiene autovectores y su espectro puntual es vacío, $\sigma_p(T_2) = \emptyset$. $\diamond$

• Sea T un operador lineal densamente definido en un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$. Si $\lambda \in \sigma_r(T) \Rightarrow \lambda^* \in \sigma_p(T^\dagger)$.

En efecto, en ese caso Rank$(T - \lambda I)$ no es denso en $\mathcal{H}$, de modo que $\exists\, \psi \neq \mathbf{0} \mid (\psi, (T - \lambda I)\varphi) = 0, \forall\, \varphi \in \mathcal{D}(T)$[7]. Pero eso significa que $(\psi, T\varphi) = \lambda\,(\psi, \varphi)$ es una funcional lineal y continua de $\varphi \Rightarrow \psi \in \mathcal{D}(T^\dagger)$.

En esas condiciones, podemos escribir que $\big((T^\dagger - \lambda^* I)\psi, \varphi\big) = 0$, $\forall\, \varphi \in \mathcal{D}(T)$ denso en $\mathcal{H}$, de modo que $T^\dagger\psi = \lambda^*\psi$.

• Por otra parte, si $\lambda \in \sigma_p(T) \Rightarrow \lambda^* \in \sigma(T^\dagger)$ (en el espectro puntual o en el residual).

En efecto, si $T\varphi = \lambda\varphi$, con $\varphi \neq \mathbf{0}$, entonces, $\forall\, \psi \in \mathcal{D}(T^\dagger)$ tenemos que $(\psi, (T - \lambda I)\varphi) = \big((T^\dagger - \lambda^* I)\psi, \varphi\big) = 0 \Rightarrow$ Rank$(T^\dagger - \lambda^* I)$ no es denso en $\mathcal{H} \Rightarrow \lambda^* \notin \rho(T^\dagger) \cup \sigma_c(T^\dagger)$.

En esas condiciones, $\lambda^* \in \sigma_r(T^\dagger)$, a menos que exista en $\mathcal{D}(T)$ un vector $\psi \neq \mathbf{0} \mid (T^\dagger - \lambda^* I)\psi = \mathbf{0}$, en cuyo caso $\lambda^* \in \sigma_p(T^\dagger)$.

Ejemplo 2.4. - Consideremos nuevamente el operador T_1 del ejemplo 2.2. Hemos visto en el ejemplo 2.3 que el espectro puntual de T_1 es todo el plano complejo, $\sigma_p(T_1) = \mathbb{C}$. Entonces el espectro de $T_1^\dagger$ es también todo el plano complejo, $\sigma(T_1^\dagger) = \mathbb{C}$.

Por otra parte, resulta inmediato mostrar que las condiciones de contorno que pesan sobre las funciones en $\mathcal{D}(T_1^\dagger)$, ec. (2.26), hacen que este operador no tenga autovectores, $\sigma_p(T_1^\dagger) = \emptyset$. En consecuencia, el espectro residual de $T_1^\dagger$ es todo el plano complejo, $\sigma_r(T_1^\dagger) = \mathbb{C}$. $\diamond$

3. Operadores simétricos

• Un operador lineal T, densamente definido sobre un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$, se dice **simétrico** si[8] $T \subset T^\dagger$. Es decir, si

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{D}(T) \subset \mathcal{D}(T^\dagger), \\ \\ \forall\, \varphi \in \mathcal{D}(T),\ T^\dagger\varphi = T\varphi. \end{array} \right. \tag{3.2}$$

En particular, en este caso el operador adjunto $T^\dagger$ también está densamente definido.

---

[7]Para ver que esto es así, llamemos $F = \overline{\text{Rank}(T - \lambda I)}$. Sabemos que todo vector $\psi \in \mathcal{H}$ puede escribirse como $\psi = u + v$, con $u \in F$ y $v \in F^\perp$. En esas condiciones, si $\{\psi \perp F \Rightarrow \psi = v = \mathbf{0}\}$, entonces $F^\perp = \{\mathbf{0}\}$ y F es denso en $\mathcal{H}$. En consecuencia, si F no es denso en $\mathcal{H} \Rightarrow \exists\, \psi \neq \mathbf{0} \mid \psi \perp F$.

[8]Equivalentemente, T es simétrico si $\forall\, \varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{D}(T)$ es

$$(\varphi_1, T\varphi_2) = (T\varphi_1, \varphi_2)\,. \tag{3.1}$$

• Toda extensión simétrica S de T está contenida en $T^\dagger$. En efecto, si $T \subset S \subset S^\dagger \Rightarrow S \subset S^\dagger \subset T^\dagger$. Por lo tanto, $T \subset S \subset S^\dagger \subset T^\dagger$.

• Un operador se dice **autoadjunto**[9] si $T^\dagger = T$, es decir, si T es simétrico y $\mathcal{D}(T^\dagger) = \mathcal{D}(T)$.

• Un operador simétrico (densamente definido) es siempre clausurable. En efecto, $T \subset T^\dagger$, que es cerrado (ver Teorema I). Por lo tanto, T tiene una extensión cerrada.

• Por otra parte, $T \subset T^\dagger \Rightarrow \mathcal{D}(T) \subset \mathcal{D}(T^\dagger)$, que entonces es denso en $\mathcal{H}$. Por el **Teorema I**, T es clausurable y su clausura es $\overline{T} = T^{\dagger\dagger}$. En consecuencia,

$$T \subset \overline{T} = T^{\dagger\dagger} \subset T^\dagger. \tag{3.3}$$

• Si T es simétrico y cerrado,

$$T = \overline{T} = T^{\dagger\dagger} \subset T^\dagger. \tag{3.4}$$

• Si T es autoadjunto,

$$T = \overline{T} = T^{\dagger\dagger} = T^\dagger \tag{3.5}$$

y, en consecuencia, T es cerrado.

• Un operador T simétrico y cerrado es autoadjunto si y sólo si su adjunto $T^\dagger$ es simétrico.

En efecto, si T es autoadjunto $\Rightarrow T = T^{\dagger\dagger} = T^\dagger \Rightarrow T^\dagger$ es simétrico: $T^\dagger \subset T^{\dagger\dagger}$. Por otra parte, si $T^\dagger$ es simétrico, $T^\dagger \subset T^{\dagger\dagger} = T \subset T^\dagger \Rightarrow T$ es autoadjunto: $T = T^\dagger$.

• Si T es un operador autoadjunto, entonces

a) el espectro residual de T es vacío, $\sigma_r(T) = \emptyset$,

b) el espectro de T es un subconjunto de los reales, $\sigma(T) \subset \mathbb{R}$,

c) autovectores correspondientes a autovalores distintos son ortogonales entre sí.

Para ver que esto es así, primero consideremos la aplicación

$$[T - (\lambda + i\,\mu)\,\mathbf{I}] : \mathcal{D}(T) \longrightarrow \text{Rank}\,[T - (\lambda + i\,\mu)\,\mathbf{I}] \subset \mathcal{H}\,, \tag{3.6}$$

donde $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Tenemos que

$$\| \,[T - (\lambda + i\,\mu)\,\mathbf{I}]\,\varphi\, \|^2 = \| \,(T - \lambda\,\mathbf{I})\,\varphi\, \|^2 + \mu^2 \,\|\, \varphi\, \|^2 \geq \mu^2 \,\|\, \varphi\, \|^2 \tag{3.7}$$

$\forall\, \varphi \in \mathcal{D}(T)$. En consecuencia, $(\lambda + i\,\mu) \notin \sigma_p(T)$ si $\mu \neq 0$.

---

[9]Los **observables** de la Mecánica Cuántica están representados por operadores autoadjuntos en un espacio de Hilbert.

Además, para $\mu \neq 0$, $[T-(\lambda+i\,\mu)\,\mathbf{I}]$ es una biyección de $\mathcal{D}(T)$ en $\mathrm{Rank}[T-(\lambda+i\,\mu)\,\mathbf{I}]$ con inversa acotada. En efecto, si φ_1 y φ_2 tienen la misma imagen, entonces

$$0 = \parallel [T-(\lambda+i\,\mu)\,\mathbf{I}]\,(\varphi_1-\varphi_2) \parallel \geq \mid \mu \mid \parallel \varphi_1-\varphi_2 \parallel , \tag{3.8}$$

lo que implica que $\varphi_1=\varphi_2$. Por otra parte, de (3.7) también resulta que

$$\frac{\parallel \varphi \parallel}{\parallel [T-(\lambda+i\,\mu)\,\mathbf{I}]\,\varphi \parallel} \leq \frac{1}{\mid \mu \mid} , \tag{3.9}$$

desigualdad que muestra que la inversa de $[T-(\lambda+i\,\mu)\,\mathbf{I}]$ es acotada en $\mathrm{Rank}[T-(\lambda+i\,\mu)\,\mathbf{I}]$.

En esas condiciones, si $\mathrm{Rank}[T-(\lambda+i\,\mu)\,\mathbf{I}]$ no es denso en $\mathcal{H}$, entonces $(\lambda+i\,\mu) \in \sigma_r(T) \Rightarrow (\lambda-i\,\mu) \in \sigma_p(T^\dagger=T)$, lo que hemos visto que no es posible si $\mu\neq 0$.

Por lo tanto, $\mathrm{Rank}[T-(\lambda+i\,\mu)\,\mathbf{I}]$ es denso en $\mathcal{H}$ y $(\lambda+i\,\mu)\in\rho_r(T)$ para todo $\mu\neq 0$, lo que prueba que $\sigma(T)\subset\mathbb{R}$.

Finalmente, si un real $\lambda\in\sigma_r(T)\Rightarrow\lambda^*=\lambda\in\sigma_p(T^\dagger=T)$, lo que no es posible porque (por definición) se trata de conjuntos disjuntos. Por lo tanto, $\sigma_r(T)=\emptyset$. □

4. Extensiones autoadjuntas de operadores simétricos

• Un operador simétrico T se dice **esencialmente autoadjunto** si su clausura $\overline{T}$ es un operador autoadjunto.

• Si T es esencialmente autoadjunto, entonces T tiene una única extensión autoadjunta[10].

En efecto, supongamos que S es una extensión autoadjunta de T. Entonces, $S=S^\dagger$ es cerrado. Y como $T\subset S\Rightarrow\overline{T}=T^{\dagger\dagger}\subset S$. En consecuencia, para los adjuntos de esos dos operadores tenemos que $S^\dagger=S\subset\overline{T}^\dagger=\overline{T}$. Por lo tanto, $S=\overline{T}$

• Si T es clausurable, entonces T es esencialmente autoadjunto si y sólo si $T^\dagger$ es autoadjunto.

En efecto, por el **Teorema I**, si T es clausurable $\Rightarrow\overline{T}^\dagger=T^\dagger$. Ahora bien, si T es esencialmente autoadjunto $\Rightarrow T^\dagger=\overline{T}^\dagger=\overline{T}=T^{\dagger\dagger}$, es decir, $T^\dagger$ es autoadjunto.

Inversamente, si $T^\dagger$ es autoadjunto, entonces $T^\dagger=T^{\dagger\dagger}=\overline{T}\Rightarrow\overline{T}$ es autoadjunto. Por lo tanto, T es esencialmente autoadjunto.

• Si T es autoadjunto, $T^\dagger=T$, entonces T es cerrado. Además, $\lambda=\pm i$ no es un autovalor de $T^\dagger$.

En efecto, sea $\varphi_\pm\in\mathcal{D}(T^\dagger)=\mathcal{D}(T)$ tal que $T^\dagger\varphi_\pm=\pm i\,\varphi_\pm=T\varphi_\pm$. Entonces,

$$\left(T^\dagger\varphi_\pm,\varphi_\pm\right)=\mp i\|\varphi_\pm\|^2=(\varphi_\pm,T\varphi_\pm)=\pm i\|\varphi_\pm\|^2\Rightarrow\|\varphi_\pm\|=0. \tag{4.1}$$

[10] En general se debe tratar con operadores T simétricos no cerrados. Si se puede establecer que T es esencialmente autoadjunto, entonces T está unívocamente asociado a un operador autoadjunto $\overline{T}=T^{\dagger\dagger}$

Inversamente, si T es simétrico y cerrado, y las ecuaciones $T^\dagger\varphi_\pm = \pm i\,\varphi_\pm$ no tienen soluciones no triviales, entonces T es autoadjunto como consecuencia del siguiente teorema.

• **Teorema II:** Sea T un operador simétrico densamente definido en un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

a) T es autoadjunto,
b) T es cerrado y $\mathrm{Ker}(T^\dagger \mp i\,\mathbf{I}) = \{\mathbf{0}\}$,
c) $\mathrm{Rank}(T \pm i\,\mathbf{I}) = \mathcal{H}$.

Por una parte, es evidente que a) $\Rightarrow$ b).

Para ver que b) $\Rightarrow$ c) supongamos que $\mathrm{Rank}\,(T \pm i\,\mathbf{I})$ no sea denso en $\mathcal{H}$. Entonces, existen vectores no nulos $\psi_\pm \in \mathcal{H}$ tales que

$$(\psi_\pm, (T \pm i\,\mathbf{I})\varphi) = 0\,,\ \forall\,\varphi \in \mathcal{D}(T) \text{ denso en } \mathcal{H}\,. \tag{4.2}$$

Esos productos escalares definen funcionales lineales y continuas (idénticamente nulas) de φ, de modo que $\psi_\pm \in \mathcal{D}(T^\dagger)$, y podemos escribir

$$\left(\left(T^\dagger \mp i\,\mathbf{I}\right)\psi_\pm, \varphi\right) = 0\,,\ \forall\,\varphi \in \mathcal{D}(T) \ \Rightarrow\ T^\dagger\,\psi_\pm = \pm i\,\psi_\pm\,. \tag{4.3}$$

En consecuencia, $\mathrm{Ker}\,\left(T^\dagger \mp i\,\mathbf{I}\right) \neq \{\mathbf{0}\}$.

Por lo tanto,

$$\mathrm{Ker}\,\left(T^\dagger \mp i\,\mathbf{I}\right) = \{\mathbf{0}\} \ \Rightarrow\ \mathrm{Rank}\,(T \pm i\,\mathbf{I}) \text{ denso en } \mathcal{H}\,. \tag{4.4}$$

Si, además, T es cerrado se puede demostrar que el rango de T es también cerrado, de modo que $\mathrm{Rank}\,(T \pm i\,\mathbf{I}) = \mathcal{H}$ (ver M. Reed y B. Simon, *Methods of Modern Mathematical Physics*, Vol. I, Theorem VIII.3, pag. 256). Por lo tanto, b) $\Rightarrow$ c).

Por otra parte, si $\mathrm{Ker}\,\left(T^\dagger \mp i\,\mathbf{I}\right) \neq \{\mathbf{0}\}$ es porque existen vectores no nulos $\psi_\pm \in \mathcal{D}(T^\dagger)$ tales que $T^\dagger\,\psi_\pm = \pm i\,\psi_\pm$. Entonces,

$$\left(\left(T^\dagger \mp i\,\mathbf{I}\right)\psi_\pm, \varphi\right) = (\psi_\pm, (T \pm i\,\mathbf{I})\,\varphi) = 0\,,\ \forall\,\varphi \in \mathcal{D}(T)\,, \tag{4.5}$$

de modo que $\mathrm{Rank}\,(T \pm i\,\mathbf{I})$ no es denso en $\mathcal{H}$.

Por lo tanto,

$$\mathrm{Rank}\,(T \pm i\,\mathbf{I}) \text{ denso en } \mathcal{H} \ \Rightarrow\ \mathrm{Ker}\,\left(T^\dagger \mp i\,\mathbf{I}\right) = \{\mathbf{0}\}\,. \tag{4.6}$$

Finalmente, supongamos que $\mathrm{Rank}\,(T \pm i\,\mathbf{I}) = \mathcal{H}$. Entonces, $\forall\,\psi \in \mathcal{D}(T^\dagger)$ existen vectores $\varphi_\pm \in \mathcal{D}(T)$ tales que

$$\left(T^\dagger \pm i\,\mathbf{I}\right)\psi = (T \pm i\,\mathbf{I})\,\varphi_\pm \Rightarrow \left(T^\dagger \pm i\,\mathbf{I}\right)(\psi - \varphi_\pm) = \mathbf{0}\,, \tag{4.7}$$

dado que T es simétrico. Pero, en esas condiciones, la implicación (4.6) requiere que $\psi = \varphi_\pm$, de modo que $\mathcal{D}(T^\dagger) \subset \mathcal{D}(T)$.

En consecuencia, $T^\dagger = T$, y c) $\Rightarrow$ a). $\square$

• **Corolario I:** Sea T un operador simétrico densamente definido en un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

a) T es esencialmente autoadjunto,
b) $\mathrm{Ker}(T^\dagger \mp i\,\mathbf{I}) = \{\mathbf{0}\}$,
c) $\mathrm{Rank}(T \pm i\,\mathbf{I})$ es denso en $\mathcal{H}$.

• El resultado anterior establece el criterio básico para determinar cuándo un operador simétrico tiene una única extensión autoadjunta.

Ejemplo 4.1. - Para describir el impulso en la Mecánica Cuántica se introduce el operador diferencial en la recta $P\varphi(x) = -i\varphi'(x)$, que es simétrico sobre el dominio $\mathcal{D}(P) = \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$.

Si $\psi(x) \in \mathcal{D}(P^\dagger)$, entonces $\exists\,\chi(x) \in \mathbf{L_2}(\mathbb{R})$ tal que

$$(\psi, P\varphi) = \left(\psi, -i\,\varphi'\right) = \int_{Sop(\varphi)} \psi(x)^* \left(-i\,\varphi'(x)\right)\,dx = (\chi, \varphi)\,, \tag{4.8}$$

$\forall\,\varphi \in \mathcal{D}(P)$. Esto requiere que $\psi(x) \in AC(\mathbb{R}) \cap \mathbf{L_2}(\mathbb{R})$, con una derivada primera $\psi'(x) \in \mathbf{L_2}(\mathbb{R})$, en cuyo caso tenemos $\chi(x) = -i\,\psi'(x)$.

En consecuencia,

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{D}(P^\dagger) = \{\psi(x) \in AC(\mathbb{R}) \cap \mathbf{L_2}(\mathbb{R}) \mid \psi'(x) \in \mathbf{L_2}(\mathbb{R})\}\,, \\ \\ P^\dagger\psi(x) = -i\,\psi'(x). \end{array} \right. \tag{4.9}$$

Como $\mathcal{D}(P^\dagger) \supset \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$, $\mathcal{D}(P^\dagger)$ es denso en $\mathbf{L_2}(\mathbb{R})$ y puede definirse $P^{\dagger\dagger} = \overline{P}$. Un razonamiento similar al anterior muestra que $\mathcal{D}(P^{\dagger\dagger}) = \mathcal{D}(P^\dagger)$, con $P^{\dagger\dagger}\psi(x) = -i\,\psi'(x)$. Es decir, $P^{\dagger\dagger} = \overline{P} = P^\dagger$.

En consecuencia,

a) Como $\overline{P}$ es autoadjunto $\Rightarrow P$ es esencialmente autoadjunto.

b) Consideremos la ecuación de autovalores

$$P^\dagger\psi_\pm(x) = \pm i\,\psi_\pm(x) = -i\,\psi'_\pm(x). \tag{4.10}$$

Como $\psi_\pm(x) \in AC(\mathbb{R})$, resulta que $\psi_\pm(x) \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ y entonces debemos resolver la ecuación diferencial ordinaria

$$\psi'_\pm(x) = \mp\psi_\pm(x) \Rightarrow \psi_\pm(x) = e^{\mp x} \notin \mathbf{L_2}(\mathbb{R}). \tag{4.11}$$

Por lo tanto, $\mathrm{Ker}\left(P^\dagger \mp i\,\mathbf{I}\right) = \{\mathbf{0}\}$.

c) Finalmente, ya sabemos que esta última condición implica que $\mathrm{Rank}(P \pm iI)$ es denso en $\mathbf{L_2}(\mathbb{R})$. En efecto, supongamos que no sea así; entonces existirá un vector no nulo $\psi \in \mathbf{L}_2(\mathbb{R})$ que sea ortogonal a $\mathrm{Rank}(P \pm iI)$:

$$(\psi, -\imath\varphi \pm \imath\varphi) = 0 \Rightarrow (\psi, -\imath\varphi) = (\mp\imath\psi, \varphi)\ , \quad \forall\varphi \in \mathcal{D}(P)\,. \tag{4.12}$$

Pero esto significa que $\psi \in \mathcal{D}\left(P^\dagger\right)$ y que $\psi \in \operatorname{Ker}\big(P^\dagger \mp \imath I\big)$, lo que hemos visto que no es posible.

$\diamond$

• El siguiente ejemplo muestra que un operador simétrico puede admitir muchas extensiones autoadjuntas[11].

Ejemplo 4.2. - Sea T definido sobre $\mathcal{D}(T) = \mathcal{C}_0^\infty(0,1)$ como $T\varphi(x) = -i\,\varphi'(x)$. Este operador es claramente simétrico pues, integrando por partes, tenemos

$$(T\varphi_1, \varphi_2) = (\varphi_1, T\varphi_2)\,,\ \forall\, \varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{C}_0^\infty(0,1). \tag{4.13}$$

Si $\psi(x) \in \mathcal{D}(T^\dagger) \subset \mathbf{L_2}(0,1)$, entonces $\exists\, \chi \in \mathbf{L_2}(0,1)$ tal que

$$(\psi, T\varphi) = \big(\psi, -i\,\varphi'\big) = (\chi, \varphi)\,,\ \forall\, \varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(0,1). \tag{4.14}$$

Esto requiere[12] que $\psi(x) \in AC(0,1)$, para que sea posible integrar por partes, de donde resulta que $\chi(x) = -i\,\psi'(x) \in \mathbf{L}_2(0,1)$. Por lo tanto,

$$\mathcal{D}(T^\dagger) = \big\{\psi(x) \in AC(0,1) \subset \mathbf{L_2}(0,1)\ \mid\ \psi'(x) \in \mathbf{L_2}(0,1)\big\}\,, \tag{4.15}$$

y el operador adjunto actúa según

$$T^\dagger\psi(x) = -i\,\psi'(x). \tag{4.16}$$

Ahora bien, las ecuaciones de autovalores

$$T^\dagger\psi_\pm(x) = -i\,\psi_\pm'(x) = \pm i\,\psi_\pm(x) \in AC(0,1) \tag{4.17}$$

se reducen a ecuaciones diferenciales ordinarias que tienen soluciones no triviales,

$$\psi_\pm(x) = e^{\mp x} \in \mathcal{C}^\infty(0,1) \subset AC(0,1). \tag{4.18}$$

En consecuencia, T no es esencialmente autoadjunto.

Como $AC(0,1) \supset \mathcal{C}_0^\infty(0,1)$, $\mathcal{D}(T^\dagger)$ es un conjunto denso en $\mathbf{L_2}(0,1)$ y puede definirse $(T^\dagger)^\dagger$.

Si $\phi(x) \in \mathcal{D}(T^{\dagger\dagger})$, entonces $\exists\, \chi \in \mathbf{L_2}(0,1)$ tal que

$$\left(\phi, T^\dagger\psi\right) = \big(\phi, -i\,\psi'\big) = (\chi, \psi)\,. \tag{4.19}$$

---

[11]Como veremos más adelante, también puede no admitir ninguna extensión autoadjunta.

[12]La condición (4.14) también puede interpretarse como estableciendo que la derivada de ψ como **distribución** es localmente sumable (ver Notas sobre Teoría de Distribuciones), de donde resulta que $\psi(x)$ es absolutamente continua.

Para que ese producto escalar sea una funcional lineal y continua de $\psi \in AC(0,1)$, debe ser posible integrar por partes, lo que requiere que $\phi(x)$ tenga una derivada en $\mathbf{L_2}(0,1)$. En consecuencia, $\phi(x) \in AC(0,1)$ con $\phi'(x) \in \mathbf{L_2}(0,1)$, y

$$\int_0^1 \phi(x)^*(-i\,\psi'(x))\,dx = -i\,\phi(x)^*\psi(x)\Big|_0^1 + \int_0^1 (-i\phi'(x))^*\psi(x)\,dx. \tag{4.20}$$

Pero una funcional continua respecto de la distancia en $\mathbf{L_2}(0,1)$ no puede depender del valor de su argumento $\psi(x)$ en los puntos particulares $x = 0, 1$ (región de medida nula donde un dado vector de $\mathbf{L_2}(0,1)$ puede tomar valores arbitrarios). Por lo tanto, las funciones en $\mathcal{D}(T^{\dagger\dagger})$ deben satisfacer además las condiciones de contorno $\phi(0) = 0 = \phi(1)$.

En definitiva, $T^{\dagger\dagger} = \overline{T}$, la mínima extensión cerrada de T, está definido en un dominio denso por

$$\begin{cases} \mathcal{D}(T^{\dagger\dagger}) = \{\phi(x) \in AC(0,1) \mid \phi'(x) \in \mathbf{L_2}(0,1), \phi(0) = 0 = \phi(1)\}\,, \\ \\ T^{\dagger\dagger}\phi(x) = -i\,\phi'(x). \end{cases} \tag{4.21}$$

Nótese que $T \subset \overline{T} \subset T^\dagger$, con $\overline{T} \neq T^\dagger$ ($T^\dagger$ no es autoadjunto). Dado que $\overline{T}^\dagger = T^\dagger \supset \overline{T}$, la clausura es una extensión simétrica (no autoadjunta) cerrada de T.

Veamos ahora que $\overline{T}$ admite extensiones autoadjuntas. En efecto, para cada $\alpha \in \mathbb{C}$ de módulo 1, consideremos el operador definido por

$$\begin{cases} \mathcal{D}(T_\alpha) = \{\varphi(x) \in AC(0,1) \mid \varphi'(x) \in \mathbf{L_2}(0,1), \varphi(1) = \alpha\,\varphi(0)\}\,, \\ \\ T_\alpha\varphi(x) = -i\,\varphi'(x). \end{cases} \tag{4.22}$$

Siguiendo el mismo razonamiento que antes, si $\psi(x) \in \mathcal{D}(T_\alpha^\dagger)$, entonces $\psi(x)$ debe ser absolutamente continua de modo que el producto escalar

$$(\psi, T_\alpha\varphi) = -i\int_0^1 \psi(x)^*\varphi'(x)\,dx = -i\,\psi(x)^*\varphi(x)\Big|_0^1 + \big(-i\,\psi', \varphi\big) \tag{4.23}$$

sea una funcional lineal y continua de $\varphi(x) \in \mathcal{D}(T_\alpha)$. Pero esto requiere además que, $\forall\,\varphi(x) \in \mathcal{D}(T_\alpha)$, sea

$$\psi(1)^*\varphi(1) - \psi(0)^*\varphi(0) = (\psi(1)^* - \alpha^*\psi(0)^*)\,\alpha\,\varphi(0) = 0\,. \tag{4.24}$$

Como el valor de $\varphi(0)$ es arbitrario, debe ser $\psi(1) - \alpha\,\psi(0) = 0$. Es decir, $\mathcal{D}(T_\alpha^\dagger) = \mathcal{D}(T_\alpha)$ y $T_\alpha^\dagger\psi(x) = -i\,\psi'(x)$.

En conclusión, $T_\alpha^\dagger = T_\alpha$ para cada complejo α de módulo 1. En esas condiciones, existe toda una familia (dependiente de un parámetro) de extensiones autoadjuntas de T (todas ellas, naturalmente, contenidas en $T^\dagger$.)

Finalmente, señalemos que:

1) $\forall\,\alpha = e^{i\,\gamma}$, con $\gamma \in [0, 2\pi)$, tenemos $\overline{T} \subset T_\alpha = T_\alpha^\dagger \subset T^\dagger$.

2) El operador T no tiene autovectores,

$$-i\,\varphi'(x) = \lambda\,\varphi(x), \text{ con } \varphi(x) \in \mathcal{C}_0^\infty(0,1) \Rightarrow \varphi(x) \equiv 0\,, \tag{4.25}$$

de modo que $\sigma_p(T) = \emptyset$.

3) El operador $\overline{T}$ tampoco tiene autovectores,

$$-i\,\varphi'(x) = \lambda\,\varphi(x), \text{ con } \varphi(x) \in AC(0,1), \; \varphi(0) = 0 \Rightarrow \varphi(x) \equiv 0\,, \tag{4.26}$$

de modo que $\sigma_p(\overline{T}) = \emptyset$.

4) Todo número complejo es autovalor de $T^\dagger$ con degeneración 1,

$$-i\,\varphi'(x) = \lambda\,\varphi(x) \;\Rightarrow\; \varphi(x) = e^{i\lambda x}\varphi(0) \in AC(0,1), \;\forall\,\lambda \in \mathbb{C}\,. \tag{4.27}$$

Por lo tanto, $\sigma_p(T^\dagger) = \mathbb{C}$. Y como el espectro puntual de un operador está contenido en la unión de los espectros puntual y residual de su adjunto, concluimos en este caso que $\sigma(T^{\dagger\dagger}) = \sigma_r(\overline{T}) = \mathbb{C}$.

5) T_α tiene un conjunto (numerable) ortogonal y completo de autofunciones cuyos autovalores (reales y no degenerados) dependen del parámetro α,

$$\begin{gathered} -i\,\varphi'(x) = \lambda\,\varphi(x), \text{ con } \varphi(x) \in AC(0,1), \text{ y } \varphi(1) = \alpha\,\varphi(0) \;\Rightarrow \\ \Rightarrow\; \varphi_n(x) = e^{i\lambda_n x}\varphi(0), \text{ donde } \lambda_n = 2\pi n - i\log\alpha = 2\pi n + \gamma\,, \end{gathered} \tag{4.28}$$

con $n \in \mathbb{Z}$ y $(\varphi_n, \varphi_m) = \delta_{n,m}$.

En este caso, $\sigma_p(T_\alpha) = \{\lambda_n\,, n \in \mathbb{Z}\} \subset \mathbb{R}$, $\sigma_r(T_\alpha) = \emptyset$ y $\rho(T_\alpha) = \mathbb{C}\backslash\sigma_p(T_\alpha)$. $\diamond$

5. Teoría de von Neumann

• **Teorema III:** Sea T un operador simétrico cerrado, densamente definido en un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$. Entonces:

1- a) $\dim\operatorname{Ker}(T^\dagger - \lambda\,\mathbf{I})$ es constante en el semiplano abierto superior del plano complejo λ,
   b) $\dim\operatorname{Ker}(T^\dagger - \lambda\,\mathbf{I})$ es constante en el semiplano abierto inferior del plano complejo λ,

2- el espectro de T es **uno** de los posibles subconjuntos del plano complejo λ que se enumeran a continuación:
   a) el semiplano superior cerrado,
   b) el semiplano inferior cerrado,
   c) todo el plano complejo,
   d) un subconjunto del eje real,

3- T es autoadjunto $\Leftrightarrow$ su espectro es un subconjunto del eje real,

4- T es autoadjunto $\Leftrightarrow \dim\operatorname{Ker}(T^\dagger - \lambda\,\mathbf{I}) = 0, \;\forall\,\lambda \notin \mathbb{R}$.

Para la demostración, ver M. Reed y B. Simon, *Methods of Modern Mathematical Physics*, Vol. II, Theorem X.1, pag. 136.

• **Corolario II:** Si un operador simétrico cerrado T tiene al menos un número real en su conjunto resolvente $\Rightarrow T$ es autoadjunto.

En efecto, si $\rho(T)$ contiene un número real, entonces el espectro de T, $\sigma(T) = \mathbb{C}\backslash\rho(T)$, sólo puede ser un subconjunto del eje real, de modo que, por el teorema anterior, T es autoadjunto.

• Se definen los **subespacios de deficiencia** de un operador simétrico como

$$\mathcal{K}_\pm := \mathrm{Ker}\left(T^\dagger \mp i\,\mathbf{I}\right) \subset \mathcal{D}(T^\dagger), \tag{5.1}$$

siendo los **índices de deficiencia** sus respectivas dimensiones,

$$n_\pm(T) := \dim \mathcal{K}_\pm = \dim \mathrm{Ker}\left(T^\dagger \mp i\,\mathbf{I}\right) \tag{5.2}$$

• Los índices de deficiencia pueden tomar cualquier valor natural, e incluso ser ∞, como lo muestra el siguiente ejemplo.

Ejemplo 5.1. - Supongamos que los operadores T_n, $n = 1, 2, \ldots$ son simétricos sobre los dominios $\mathcal{D}(T_n) \subset \mathcal{H}_n$. Sea $\mathcal{D}(T)$ el conjunto de vectores de $\mathcal{H} := \bigoplus_{n=1}^\infty \mathcal{H}_n$ de la forma $\Phi = (\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n, \ldots)$, donde sólo un número finito de vectores $\varphi_n \in \mathcal{D}(T_n)$ son no nulos.

En esas condiciones, el operador $T := \bigoplus_{n=1}^\infty T_n$ es simétrico en $\mathcal{D}(T)$, y sus índices de deficiencia son

$$n_\pm(T) = \sum_{n=1}^\infty n_\pm(T_n). \tag{5.3}$$

$\diamond$

• **Teorema IV:** Sea T un operador simétrico y cerrado con índices de deficiencia $n_\pm(T)$. Las extensiones simétricas y cerradas de T están en correspondencia uno a uno con el conjunto de isometrías parciales (en el sentido del producto escalar usual) de $\mathcal{K}_+ \to \mathcal{K}_-$.

Si U es una tal isometría con dominio $\mathcal{D}(U) \subset \mathcal{K}_+$ (de dimensión $\dim \mathcal{D}(U) \leq n_+(T)$), entonces la correspondiente extensión cerrada y simétrica de T, T_U, tiene por dominio

$$\mathcal{D}(T_U) = \{\chi = \varphi + \psi_+ + U\psi_+ \mid \varphi \in \mathcal{D}(T),\ \psi_+ \in \mathcal{D}(U)\} \subset \mathcal{D}(T^\dagger). \tag{5.4}$$

Siendo T_U la restricción de $T^\dagger$ a ese dominio, su acción está dada por

$$T_U\chi = T^\dagger\chi = T\varphi + i\,\psi_+ - i\,U\psi_+. \tag{5.5}$$

Si $n_\pm(T) < \infty \Rightarrow$ los índices de deficiencia de T_U están dados por

$$n_\pm(T_U) = n_\pm(T) - \dim \mathcal{D}(U). \tag{5.6}$$

Para la demostración, ver M. Reed y B. Simon, *Methods of Modern Mathematical Physics*, Vol. II, Theorem X.2, pag. 140.

• **Corolario III:** Sea T un operador simétrico cerrado con índices de deficiencia $n_+(T)$ y $n_-(T)$. Entonces

a) T es autoadjunto $\Leftrightarrow n_+(T) = 0 = n_-(T)$,

b) T admite extensiones autoadjuntas $\Leftrightarrow n_+(T) = n_-(T) > 0$. En ese caso, existe una correspondencia uno a uno entre las extensiones autoadjuntas de T y las aplicaciones unitarias $U : \mathcal{K}_+ \to \mathcal{K}_-$.

c) Si $n_+(T) = 0 \neq n_-(T)$ ó $n_+(T) \neq 0 = n_-(T)$, el operador T no admite extensiones simétricas no triviales. Esos operadores ya son **máximamente simétricos**.

• Consideremos el Ejemplo 4.2 en el marco de la Teoría de von Neumann. De la ec. (4.18) resulta que $n_\pm = 1$ y que los subespacios de deficiencia están generados por los vectores unitarios

$$\psi_+(x) = \frac{e\sqrt{2}}{\sqrt{e^2-1}}\, e^{-x}\,, \quad \psi_-(x) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{e^2-1}}\, e^{x}\,. \tag{5.7}$$

Por lo tanto, las isometrías de $\mathcal{K}_+$ en $\mathcal{K}_-$ están caracterizadas por una fase, $U\psi_+(x) = e^{\imath\gamma}\psi_-(x)$, y los dominios de definición de las extensiones autoadjuntas de T corresponden a

$$\mathcal{D}\left(T^{(\gamma)}\right) = \left\{\phi = \varphi + A\left(\psi_+ + e^{\imath\gamma}\psi_-\right) | \varphi \in \mathcal{D}\left(\overline{T}\right)\right\} \tag{5.8}$$

Como $\varphi(0) = 0 = \varphi(1)$ (ver ec. (4.21)), tenemos que

$$\phi(0) = A\left\{\frac{e\sqrt{2}}{\sqrt{e^2-1}} + e^{\imath\gamma}\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{e^2-1}}\right\}, \quad \phi(1) = A\left\{\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{e^2-1}} + e^{\imath\gamma}\frac{e\sqrt{2}}{\sqrt{e^2-1}}\right\}, \tag{5.9}$$

y para $A \neq 0$,

$$\phi(1) = e^{\imath\gamma}\left(\frac{e + e^{-\imath\gamma}}{e + e^{\imath\gamma}}\right)\phi(0) = \alpha\phi(0)\,, \tag{5.10}$$

donde α es un complejo de módulo 1, en coincidencia con el resultado del Ejercicio 4.2: $T^{(\gamma)} \equiv T_\alpha$.

• El siguiente ejemplo muestra que el *impulso radial* no corresponde a un observable de la Mecánica Cuántica.

Ejemplo 5.2. - Consideremos el operador $P_r := -i\,\frac{\partial}{\partial r}$ simétrico sobre el dominio $\mathcal{D}(P_r) = \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^+)$ denso en $\mathbf{L_2}(\mathbb{R}^+)$.

Si $\psi \in \mathcal{D}(P_r^\dagger) \Rightarrow \exists\, \chi \in \mathbf{L_2}(\mathbb{R}^+)$ tal que

$$(\psi, P_r\varphi) = \left(\psi, -i\,\varphi'\right) = (\chi, \varphi)\,, \ \forall\, \varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^+). \tag{5.11}$$

Entonces $\mathcal{D}(P_r^\dagger) = \{\psi(r) \in AC(\mathbb{R}^+) \cap \mathbf{L_2}(\mathbb{R}^+) \mid \psi'(r) \in \mathbf{L_2}(\mathbb{R}^+)\}$, y $P_r^\dagger \psi(r) = -i\,\psi'(r)$.

Buscamos ahora soluciones de

$$P_r^\dagger \psi_\pm(r) = -i\,\psi_\pm'(r) = \pm i\,\psi_\pm(r), \text{ con } \psi_\pm(r) \in \mathcal{D}(P_r^\dagger). \tag{5.12}$$

Esa ecuación diferencial tiene soluciones $\psi_\pm(r) = e^{\mp r}\psi_\pm(0) \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^+)$. Pero de ellas, sólo $\psi_+(r) \in \mathbf{L_2}(\mathbb{R}^+)$. En consecuencia, $n_+(P_r) = 1 \neq n_-(P_r) = 0 \Rightarrow P_r$ no admite extensiones autoadjuntas.

Por lo tanto, P_r no corresponde a un observable[13]. ◇

• El siguiente ejemplo, un caso particular de operador de Sturm - Liouville con coeficientes regulares, muestra que estos operadores admiten extensiones autoadjuntas que están determinadas por condiciones de contorno locales en los extremos del intervalo.

Ejemplo 5.3. - Sea el operador diferencial $L := -\frac{d^2}{dx^2}$ definido sobre el dominio denso $\mathcal{D}(L) = \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^+)$, en el cual es simétrico.

Su adjunto está definido sobre el dominio denso

$$\mathcal{D}(L^\dagger) = \left\{\psi(x) \in \mathbf{L_2}(\mathbb{R}^+) \mid \psi'(x) \in AC(\mathbb{R}^+), \psi''(x) \in \mathbf{L_2}(\mathbb{R}^+)\right\}, \tag{5.14}$$

sobre el cual actúa según

$$L^\dagger \psi(x) = -\psi''(x). \tag{5.15}$$

Similarmente, el operador clausura $\overline{L} = L^{\dagger\dagger}$ está definido sobre el dominio

$$\begin{gathered}\mathcal{D}(L^{\dagger\dagger}) = \{\phi(x) \in \mathbf{L_2}(\mathbb{R}^+) \mid \phi'(x) \in AC(\mathbb{R}^+), \\ \phi''(x) \in \mathbf{L_2}(\mathbb{R}^+), \phi(0) = 0 = \phi'(0)\} \subset \mathcal{D}(L^\dagger),\end{gathered} \tag{5.16}$$

funciones sobre las cuales también actúa como el operador diferencial

$$L^{\dagger\dagger}\phi(x) = -\phi''(x). \tag{5.17}$$

La ecuación de autovalores

$$L^\dagger \psi_\pm(x) = -\psi_\pm''(x) = \pm i\,\psi_\pm(x) \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^+) \cap \mathbf{L_2}(\mathbb{R}^+) \tag{5.18}$$

[13] En un espacio de dimensión D debe considerarse el operador

$$P_r := -i\,[\partial_r + (D-1)/2r] = r^{-\frac{D-1}{2}}\,(-i\partial_r)\,r^{\frac{D-1}{2}}, \tag{5.13}$$

simétrico respecto de la medida $r^{D-1}dr$, para el cual se obtienen similares resultados.

En efecto, si $\psi_\pm(r) = r^{-\frac{D-1}{2}}\,e^{\mp r}$ tenemos $[\partial_r + (D-1)/2r]\,\psi_\pm(r) = \mp\psi_\pm(r)$, pero sólo $\psi_+(r) \in \mathbf{L_2}(\mathbb{R}^+;\, r^{D-1}\,dr)$.

implica que $\psi_\pm(x) \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^+)$, reduciéndose a una ecuación diferencial ordinaria cuyas soluciones en $\mathbf{L_2}(\mathbb{R}^+)$ son

$$\psi_\pm(x) = e^{-\left(\frac{1\mp i}{\sqrt{2}}\right)x}\,\psi_\pm(0) \;\Rightarrow\; n_+(L) = 1 = n_-(L), \tag{5.19}$$

y los subespacios de deficiencia son unidimensionales.

En consecuencia, existe una familia de extensiones autoadjuntas de L dependiente de un parámetro continuo, correspondientes a las isometrías $U\psi_+(x) = e^{i\gamma}\psi_-(x)$, con $\gamma \in [0, 2\pi)$, donde $\|\psi_+\| = \|\psi_-\|$.

Cada extensión autoadjunta L_γ es la restricción de $L^\dagger$ al domino

$$\begin{aligned} &\mathcal{D}(L_\gamma) = \\ &= \left\{\chi(x) = \phi(x) + A\left[\psi_+(x) + e^{i\gamma}\psi_-(x)\right] \;\mid \phi(x) \in \mathcal{D}(L^{\dagger\dagger}),\; A \in \mathbb{C}\right\}, \end{aligned} \tag{5.20}$$

actuando sobre esas funciones según

$$L_\gamma\chi(x) = L^\dagger\chi(x) = -\phi''(x) + i\,A\left[\psi_+(x) - e^{i\gamma}\psi_-(x)\right]. \tag{5.21}$$

Ese dominio también puede ser caracterizado mediante **condiciones de contorno locales** en $x = 0$. En efecto, para $x \to 0^+$ tenemos

$$\begin{aligned} &\chi(0) = 0 + A\left[1 + e^{i\gamma}\right] = 2A\,e^{i\gamma/2}\cos(\gamma/2)\,, \\ &\chi'(0) = 0 + iA\left[-\left(\tfrac{1-i}{\sqrt{2}}\right) + e^{i\gamma}\left(\tfrac{1+i}{\sqrt{2}}\right)\right] = \\ &= -\frac{A}{\sqrt{2}}\,e^{i\gamma/2}\,\{2\cos(\gamma/2) + 2\sin(\gamma/2)\}, \end{aligned} \tag{5.22}$$

de donde, para $A \neq 0$, resulta la relación

$$\begin{aligned} &\sqrt{2}\,\cos(\gamma/2)\,\chi'(0) = -\left(\cos(\gamma/2) + \sin(\gamma/2)\right)\chi(0) \\ &\Rightarrow \alpha(\gamma)\,\chi(0) + \beta(\gamma)\,\chi'(0) = 0\,. \end{aligned} \tag{5.23}$$

Esta igualdad también se satisface para $A = 0$, puesto que en ese caso $\chi(x) \in \mathcal{D}(L^{\dagger\dagger})$.

En (5.23), las constantes $\alpha(\gamma), \beta(\gamma) \in \mathbb{R}$ y no se anulan simultáneamente, dado que

$$\alpha(\gamma)^2 + \beta(\gamma)^2 = 2 + \cos\gamma + \sin\gamma > 0\,,\; \forall\,\gamma \in [0, 2\pi)\,. \tag{5.24}$$

$\diamond$

• En el caso en que los coeficientes del operador diferencial presenten singularidades ya no será posible, en general, caracterizar las extensiones autoadjuntas del operador mediante condiciones de contorno locales. Pero aún en esos casos la caracterización de los dominios dada en la ec. (5.4) las determina completamente. Por ejemplo, si

$$L = -\frac{d^2}{dx^2} + \frac{\nu^2 - 1}{4x^2}\,, \quad \text{con} \quad 0 < \nu < 1\,, \tag{5.25}$$

entonces $n_{\pm}(L) = 1$. Los dominios de las extensiones autoadjuntas están determinados por las combinaciones

$$\psi_+(x) + e^{\imath\gamma}\psi_-(x) = c_1(\gamma)x^{\frac{1+\nu}{2}} + c_2(\gamma)x^{\frac{1-\nu}{2}} \in \mathbf{L}_2(0,1)\,, \tag{5.26}$$

de modo que $\varphi(x)$ y/o $\varphi'(x)$ son singulares en $x = 0$. En este caso, las extensiones autoadjuntas quedan determinadas por a relación $c_1(\gamma)/c_2(\gamma)$.

• **Teorema V:** Sea A un operador cerrado densamente definido sobre el dominio $\mathcal{D}(A) \subset \mathcal{H}$, y sea

$$\mathcal{D}(A^\dagger A) = \left\{\varphi \in \mathcal{D}(A) \mid A\varphi \in \mathcal{D}(A^\dagger)\right\}. \tag{5.27}$$

Entonces, definiendo el operador $A^\dagger A$ sobre $\mathcal{D}(A^\dagger A)$ mediante

$$(A^\dagger A)\varphi := A^\dagger(A\varphi), \tag{5.28}$$

resulta que $A^\dagger A$ es autoadjunto.

Para la demostración, ver M. Reed y B. Simon, *Methods of Modern Mathematical Physics*, Vol. II, Theorem X.25, pag. 180.

• Para el caso de operadores no acotados, el resultado anterior es absolutamente no trivial ya que, a priori, no es evidente que pueda haber vectores no nulos en $\mathcal{D}(A^\dagger A)$, ni mucho menos que ese dominio sea denso en $\mathcal{H}$.

Ejemplo 5.4. - Consideremos el operador con dominio

$$\mathcal{D}(A) = \left\{\varphi(x) \in AC(0,1) \mid \varphi'(x) \in \mathbf{L_2}(0,1), \varphi(0) = 0 = \varphi(1)\right\}, \tag{5.29}$$

y tal que $A\varphi(x) = -i\,\varphi'(x)$. Este operador es cerrado, ya que coincide con la clausura del operador T del ejemplo 4.2.

Su adjunto (ver ejemplo 4.2) tiene por dominio a

$$\mathcal{D}(A^\dagger) = \left\{\psi(x) \in AC(0,1) \mid \psi'(x) \in \mathbf{L}_2(0,1)\right\}\,, \tag{5.30}$$

donde actúa según $A^\dagger\psi(x) = -i\,\psi'(x)$.

Del **Teorema V** resulta que $A^\dagger A$ corresponde a la extensión autoadjunta de $L := -\frac{d^2}{dx^2}$ con condiciones de contorno locales dadas por $\varphi(0) = 0 = \varphi(1)$. Similarmente $AA^\dagger$ corresponde a la extensión autoadjunta de L con condiciones de contorno $\psi'(0) = 0 = \psi'(1)$. ◇

Bibliografía:

- M. Reed y B. Simon, *Methods of Modern Mathematical Physics*, Vol. I y II.