CURSO DE MÉTODOS DE LA FÍSICA MATEMÁTICA

ANÁLISIS FUNCIONAL

H. FALOMIR
DEPARTAMENTO DE FÍSICA
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS - UNLP

ECUACIONES INTEGRALES

1. Autovalores de operadores compactos

Sea A un operador completamente continuo definido sobre un espacio euclídeo $\mathbf{E}$. En particular, A es acotado, de modo que

$$\| A\,x \| \leq \| A \| \, \| x \| \,, \quad \forall\, x \in \mathbf{E}\,. \tag{1.1}$$

Como no estamos suponiendo que este operador sea simétrico, sus autovalores (si existen) serán, en general, números complejos. Y los autovectores correspondientes a autovalores distintos no serán, en general, ortogonales entre sí.

Supongamos que $\mathbf{F} = \{x_1, x_2, \dots, x_k, \dots\} \subset \mathbf{E}$ sea un conjunto de autovectores linealmente independientes de A correspondientes a autovalores que en módulo superan a un número positivo δ,

$$A\,x_k = \lambda_k\,x_k\,, \quad \text{con } \| A \| \geq |\lambda_k| > \delta > 0\,,\ \forall\, k\,. \tag{1.2}$$

Mediante el proceso usual de ortonormalización de una secuencia podemos generar el conjunto ortonormal $\{e_1, e_2, \dots, e_k, \dots\}$, donde

$$e_k = \sum_{j=1}^{k} a_{kj}\,x_j\,, \quad \text{con } e_k \perp x_l\,,\ \text{para } l < k\,. \tag{1.3}$$

En esas condiciones, $A\,e_k$ puede escribirse como la suma de dos vectores ortogonales entre sí,

$$A\,e_k = \sum_{j=1}^{k} a_{kj}\,\lambda_j\,x_j = \lambda_k\,e_k + \sum_{j=1}^{k-1} a_{kj}\,(\lambda_j - \lambda_k)\,x_j\,, \tag{1.4}$$

Actualizado el 15 de abril de 2014.

lo mismo que la diferencia

$$A\,e_k - A\,e_l = \lambda_k\,e_k + \left\{ \sum_{j=1}^{k-1} a_{kj}\,(\lambda_j - \lambda_k)\,x_j - \sum_{j=1}^{l} a_{lj}\,\lambda_j\,x_j \right\} \tag{1.5}$$

si $l < k$. Entonces,

$$\| A\,e_k - A\,e_l \|^2 =$$

$$= \| \lambda_k\,e_k \|^2 + \left| \left| \sum_{j=1}^{k-1} a_{kj}\,(\lambda_j - \lambda_k)\,x_j - \sum_{j=1}^{l} a_{lj}\,\lambda_j\,x_j \right| \right|^2 \geq \tag{1.6}$$

$$\geq \| \lambda_k\,e_k \|^2 = | \lambda_k |^2 > \delta^2 > 0\,.$$

Por lo tanto, el conjunto $\{A\,e_1, A\,e_2, \dots, A\,e_k, \dots\}$ no contiene ninguna secuencia de Cauchy. Entonces, como A es compacto, el conjunto $\{e_1, e_2, \dots, e_k, \dots\}$ debe tener un número finito de elementos, lo que significa que el subespacio lineal generado por los vectores del conjunto $\mathbf{F}$, $\mathcal{L}\{x_1, x_2, \dots, x_k, \dots\}$, tiene dimensión finita.

En consecuencia, los autovalores no nulos de un operador completamente continuo forman en el plano complejo, a lo sumo, una secuencia numerable que converge al origen. Además, la multiplicidad de cualquier autovalor no nulo es finita.

2. Ecuaciones integrales de núcleo no simétrico

Consideremos la ecuación integral

$$\varphi(t) - \int_a^b K(t,s)\,\varphi(s)\,ds = f(t)\,, \tag{2.1}$$

donde $K(t,s) \in \mathbf{L}_2\big((a,b)\times(a,b)\big)$ y $f(t) \in \mathbf{L}_2(a,b)$ son funciones conocidas y $\varphi(t) \in \mathbf{L}_2(a,b)$ es la incógnita.

El núcleo de cuadrado sumable $K(t,s)$ define un operador integral de Fredholm completamente continuo,

$$A\,\varphi(t) = \int_a^b K(t,s)\,\varphi(s)\,ds\,, \tag{2.2}$$

que, en general, será no simétrico.

Como consecuencia del Teorema de Fubini (que autoriza a cambiar el orden de integración cuando una integral doble existe), el operador adjunto $A^\dagger$ resulta definido como

$$A^\dagger\psi(t) = \int_a^b K(s,t)^*\,\psi(s)\,ds\,. \tag{2.3}$$

La ecuación integral (2.1) puede ser escrita como

$$\varphi(t) - A\,\varphi(t) = f(t)\,, \tag{2.4}$$

mientras que el problema equivalente para el operador adjunto sería

$$\psi(t) - A^\dagger\,\psi(t) = g(t)\,, \tag{2.5}$$

con $g(t) \in \mathbf{L}_2(a,b)$.

La existencia de soluciones no triviales para la problema adjunto homogéneo (es decir, la existencia de autovectores de $A^\dagger$ correspondientes al autovalor 1),

$$\psi_1(t) - A^\dagger\,\psi_1(t) = \mathbf{0}(t)\,, \tag{2.6}$$

condiciona la existencia de soluciones para la ec. (2.4). En efecto, el producto escalar de $\psi_1(t)$ por ambos miembros de (2.4) da lugar a la ecuación

$$(\psi_1, f) = \Big(\psi_1, \big(\mathbf{I} - A\big)\varphi\Big) = \Big(\big(\mathbf{I} - A^\dagger\big)\psi_1, \varphi\Big) = (\mathbf{0}, \varphi) = 0\,, \tag{2.7}$$

que es una contradicción a menos que la inhomogeneidad $f(t)$ sea ortogonal al subespacio característico de $A^\dagger$ correspondiente al autovalor 1 (subespacio de dimensión finita, dado que $A^\dagger$ es compacto). Si ese no es el caso, no existen soluciones para la ecuación (2.4).

Por otra parte, la existencia de soluciones no triviales para la ecuación homogénea

$$\varphi_1(t) - A\,\varphi_1(t) = \mathbf{0}(t) \tag{2.8}$$

(es decir, la existencia de autovectores del operador A correspondientes al autovalor 1, los que también forman un subespacio de dimensión finita dado que A es compacto) implica que, de existir una solución para la ec. (2.4), ella no sea única. En efecto, en ese caso también tenemos que

$$\big(\mathbf{I} - A\big)\big[\varphi(t) + \varphi_1(t)\big] = f(t)\,. \tag{2.9}$$

Puede demostrarse el siguiente teorema:

Teorema 2.1. *Consideremos la ecuación homogénea (2.8). Dos casos son posibles:*

I) *esa ecuación tiene solución única, $\varphi_1(t) = \mathbf{0}(t)$,*
II) *o bien tiene una solución no trivial $\varphi_1(t) \neq \mathbf{0}(t)$.*

En el caso I) la ecuación inhomogénea (2.4) tiene solución única $\forall\, f(t) \in \mathbf{L}_2(a,b)$, lo mismo que la ec. (2.5) $\forall\, g(t) \in \mathbf{L}_2(a,b)$.

En el caso II), las ecuaciones homogéneas (2.8) y (2.6) tienen el mismo número finito n de soluciones linealmente independientes. La ecuación imhomogénea (2.4) tiene solución si y sólo si $f(t)$ es ortogonal a las n soluciones linealmente independientes de (2.6), y en ese caso no es única, sino que está definida a menos de una solución arbitraria de (2.8). (Evidentemente, algo similar vale para la ec. (2.5).)

Para el caso de núcleos degenerados la demostración es inmediata, puesto que los operadores A y $A^\dagger$ aplican todo $\mathbf{L}_2(a,b)$ en subespacios de dimensión finita, y el problema se reduce a mostrar la existencia de soluciones para un sistema de ecuaciones algebraicas lineales.

Núcleos de cuadrado sumable arbitrarios pueden ser aproximados en la métrica de $\mathbf{L}_2\big((a,b)\times(a,b)\big)$ por las sumas parciales de sus series de Fourier respecto de algún sistema ortonormal y completo de funciones. La continuidad completa de estos operadores permite establecer el resultado también en este caso (ver, por ejemplo, *The Theory of Linear Spaces*, G. Ye. Shilov).

De este teorema se deduce el siguiente corolario:

Corolario 2.2. *(de la alternativa de Fredholm) Si A es un operador integral de Fredholm de núcleo de cuadrado sumable, entonces se tiene una de las siguientes dos posibilidades excluyentes:*

I) *la ecuación $\varphi(t)-A\,\varphi(t)=f(t)$ tiene una solución $\forall\, f(t)\in\mathbf{L}_2(a,b)$ (en cuyo caso la solución es única),*

II) *o bien la ecuación homogénea $\varphi_1(t)-A\,\varphi_1(t)=\mathbf{0}(t)$ tiene una solución no trivial.*

3. Ecuaciones integrales dependientes de un parámetro complejo

Consideremos una familia de ecuaciones integrales que incluyan un parámetro complejo μ multiplicando al núcleo de cuadrado sumable $K(t,s)$,

$$\varphi(t)-\mu\int_a^b K(t,s)\,\varphi(s)\,ds=\big(\mathbf{I}-\mu\,A\big)\varphi(t)=f(t)\,. \tag{3.1}$$

Por el corolario de la alternativa de Fredholm sabemos que, para cada $\mu\in\mathbb{C}$, puede darse sólo una de las siguientes dos posibilidades:

I) la ecuación (3.1) tiene una solución $\forall\, f(t)\in\mathbf{L}_2(a,b)$ (en cuyo caso es única),

II) o bien la ecuación homogénea

$$\big(\mathbf{I}-\mu\,A\big)\varphi_1(t)=\mathbf{0}(t) \tag{3.2}$$

tiene una solución no trivial, que corresponde a un autovector del operador A con autovalor $1/\mu$,

$$A\,\varphi_1(t)=\frac{1}{\mu}\,\varphi_1(t)\,. \tag{3.3}$$

En el primer caso, μ es un **valor regular** de la ecuación (3.1), mientras que en el segundo caso se dice que μ es un **valor singular** de esa ecuación.

Ya sabemos que los autovalores no nulos de un operador completamente continuo forman, a lo sumo, una secuencia numerable que converge al origen del plano complejo, y que está contenida en un círculo de radio $\parallel A\parallel$. Si A es un operador integral de Fredholm de núcleo de cuadrado sumable, tenemos además que $\parallel A\parallel\leq\parallel K(t,s)\parallel=K$.

En consecuencia, los valores singulares de la ecuación (3.1) forman, a lo sumo, una secuencia numerable que diverge al infinito y está contenida en el exterior de un círculo

de radio (θ/K), con $0 < \theta < 1$. En particular, existe un entorno de $\mu = 0$ libre de valores singulares.

Ejemplo:

• Consideremos el núcleo

$$K(t,s) = \begin{cases} \sin(t)\,\cos(s)\,, & t \le s\,, \\ \cos(t)\,\sin(s)\,, & t \ge s\,, \end{cases} \tag{3.4}$$

con $0 \le t, s \le \pi$, cuya norma es $K = \| K(t,s) \| = \pi/2$, y la ecuación integral

$$\varphi(t) - \mu \int_a^b K(t,s)\,\varphi(s)\,ds = f(t)\,. \tag{3.5}$$

Para determinar sus valores singulares tengamos en cuenta que este núcleo es simétrico y continuo, satisface la ecuación diferencial

$$-\partial_t^2 K(t,s) = K(t,s)\,, \quad \text{para } t \ne s\,, \tag{3.6}$$

también las condiciones de contorno $K(0,s) = 0$, $\partial_t K(\pi,s) = 0$, y su derivada primera respecto de t tiene una discontinuidad en $t = s$ de altura

$$\partial_t K(t,s)\big|_{t=s^+} - \partial_t K(t,s)\big|_{t=s^-} = -\sin^2(s) - \cos^2(s) = -1\,. \tag{3.7}$$

Además, el Wroskiano $W[\sin(t), \cos(t)] = 1$.

En esas condiciones, $K(t,s)$ puede ser considerado como la función de Green del operador de Sturm - Liouville definido como

$$L\,\psi(t) = -\psi''(t) - \psi(t) \tag{3.8}$$

sobre el subespacio de las funciones dos veces diferenciables que satisfacen las condiciones de contorno $\psi(0) = 0$ y $\psi'(\pi) = 0$.

Entonces, el operador integral A de núcleo $K(t,s)$ tiene las mismas autofunciones que el operador L, y los autovalores de éste coinciden con los valores singulares de la ecuación integral (3.5):

$$\begin{gathered} L\,\psi_k(t) = -\psi_k''(t) - \psi_k(t) = \mu_k\,\psi_k(t)\,, \quad \psi_k(0) = 0\,, \psi_k'(\pi) = 0 \Rightarrow \\ \psi_k(t) = \sin\Big(\big(k + \tfrac{1}{2}\big)\,t\Big)\,, \quad \text{con } \mu_k = \big(k + \tfrac{1}{2}\big)^2 - 1\,,\ k = 0, 1, 2, \ldots \end{gathered} \tag{3.9}$$

Nótese que, $\forall\, k\,,\ |\,\mu_k\,| \ge \frac{3}{4} > \frac{1}{K} = \frac{2}{\pi}$, de modo que L es no singular, y existe un círculo de radio $< \frac{3}{4}$ en el plano complejo de la variable μ que no contiene valores singulares.

Como A es simétrico y completamente continuo, tiene un conjunto ortonormal y completo de autovectores, $A\,e_k(t) = \lambda_k\,e_k(t)$, para $k = 0, 1, 2, \ldots$, donde

$$e_k(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\,\sin\big((k + 1/2)\,t\big)\,, \quad \text{con } \lambda_k = \frac{1}{\mu_k} = \frac{1}{\big(k + \frac{1}{2}\big)^2 - 1}\,. \tag{3.10}$$

Entonces,

$$\big(\mathbf{I}-\mu\,A\big)\varphi(t)=f(t)\ \Rightarrow$$

$$(1-\mu\,\lambda_k)\,(e_k,\varphi)=(e_k,f)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\pi}\sin\big(\,(k+1/2)\,t\big)\,f(t)\,dt\,. \tag{3.11}$$

Por lo tanto, para todo valor regular $\mu\neq\mu_k$, $\forall\,k$, la solución de (3.5) existe y es única $\forall\,f(t)\in\mathbf{L}_2(0,\pi)$, y está dada por

$$\varphi(t)=f(t)+\frac{\mu}{\sqrt{\pi}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda_k\ (e_k,f)}{(1-\mu\,\lambda_k)}\ \sin\big(\,(k+1/2)\,t\big)\,, \tag{3.12}$$

donde la serie en el segundo miembro converge absoluta y uniformemente (dado que el núcleo $K(t,s)$ satisface la condición de Hilbert - Schmidt y la diferencia $(\varphi(t)-f(t))\in$ Rank(A)). En particular, $(\varphi(t)-f(t))$ es continua.

Si, por el contrario, μ coincide con un valor singular μ_{k_0}, entonces la solución no existe a menos que $f(t)\perp e_{k_0}(t)$, en cuyo caso no es única. En efecto, si $(e_{k_0},f)=0$ entonces

$$\varphi(t)=f(t)+$$

$$\frac{\mu}{\sqrt{\pi}}\sum_{k\neq k_0}\frac{\lambda_k\ (e_k,f)}{(1-\mu\,\lambda_k)}\ \sin\big(\,(k+1/2)\,t\big)+\frac{c}{\sqrt{\pi}}\ \sin\big(\,(k_0+1/2)\,t\big)\,, \tag{3.13}$$

con $c\in\mathbb{C}$ arbitrario. $\diamond$

4. Operador resolvente

Sea $\mu\in\mathbb{C}$ un valor regular de la ecuación

$$\big(\mathbf{I}-\mu\,A\big)\,\varphi=f\,, \tag{4.1}$$

donde A es un operador completamente continuo definido sobre un espacio de Hilbert $\mathbf{E}$. Entonces (4.1) tiene una solución única $\forall\,f\in\mathbf{E}$, de modo que existe una correspondencia biunívoca entre la solución φ y la inhomogeneidad f.

En esas condiciones existe el inverso de $\big(\mathbf{I}-\mu\,A\big)$, y podemos expresar la solución de (4.1) como

$$\varphi=R_\mu\,f\,,\quad \text{donde } R_\mu=\big(\mathbf{I}-\mu\,A\big)^{-1}:\mathbf{E}\to\mathbf{E}\,, \tag{4.2}$$

llamado **operador resolvente** de A, está definido sobre todo el espacio de Hilbert y su rango es Rank $(R_\mu)=\mathbf{E}$.

El operador R_μ es evidentemente lineal, dado que la ecuación (4.1) es lineal. En efecto, si $\big(\mathbf{I}-\mu\,A\big)\,\varphi_{1,2}=f_{1,2}$ entonces la solución de

$$\big(\mathbf{I}-\mu\,A\big)\,\varphi=\alpha\,f_1+\beta\,f_2 \tag{4.3}$$

está dada por

$$R_\mu\,(\alpha\, f_1 + \beta\, f_2) = \varphi = \alpha\,\varphi_1 + \beta\,\varphi_2 = \alpha\, R_\mu\, f_1 + \beta\, R_\mu\, f_2\,. \tag{4.4}$$

Mostraremos que el operador R_μ es también acotado.

Para ello supongamos que R_μ, que sólo existe para valores regulares de μ, sea no acotado. En ese caso es posible seleccionar una secuencia de vectores unitarios $\{f_k \in \mathbf{E}\,, k \in \mathbb{N}\}$ tales que las correspondientes soluciones de (4.1), $\varphi_k = R_\mu\, f_k$, tengan normas $\| \varphi_k \| \to \infty$ cuando $k \to \infty$.

Dada la linealidad de la ec. (4.1), para los vectores unitarios $e_k = \varphi_k / \| \varphi_k \|$ tenemos

$$e_k = g_k + \mu\, A\, e_k\,, \tag{4.5}$$

donde, por construcción, $g_k = f_k / \| \varphi_k \| \to \mathbf{0}$ cuando $k \to \infty$.

Como A es completamente continuo, el conjunto $\{A\, e_k\,, k \in \mathbb{N}\}$ contiene una secuencia fundamental. Descartando los vectores e_k cuyas imágenes no pertenezcan a esa secuencia, podemos suponer que $\{A\, e_k\,, k \in \mathbb{N}\}$ es una secuencia convergente en el espacio de Hilbert $\mathbf{E}$.

En esas condiciones, la secuencia $\{e_k\,, k \in \mathbb{N}\}$ es convergente en $\mathbf{E}$: existe un vector no nulo $e \in \mathbf{E}$ tal que

$$e = \lim_{k\to\infty} e_k\,, \quad \text{con } \| e \| = \lim_{k\to\infty} \| e_k \| = 1\,. \tag{4.6}$$

Como A es continuo,

$$e = \lim_{k\to\infty} \{g_k + \mu\, A\, e_k\} = \mathbf{0} + \mu\, A\, e \neq \mathbf{0}\,. \tag{4.7}$$

Pero esto indicaría que μ es un valor singular, en contradicción con la hipótesis de la existencia de R_μ. Por lo tanto, R_μ es necesariamente un operador acotado.

5. Construcción de R_μ en un entorno del origen

Dado que existe un entorno del origen en el plano complejo de la variable μ que no contiene valores singulares, el operador resolvente existe para valores de $|\,\mu\,|$ suficientemente pequeños. En lo que sigue daremos una expresión explícita para R_μ en esa región.

Consideremos el operador (no lineal) definido sobre $\mathbf{E}$ por la relación

$$B\,\varphi = \mu\, A\,\varphi + f\,, \tag{5.1}$$

y evaluemos la distancia entre las imágenes de dos vectores arbitrarios $\varphi, \psi \in \mathbf{E}$,

$$\| B\,\varphi - B\,\psi \| = \| \mu\, A\,(\varphi - \psi) \| \leq |\,\mu\,| \| A \| \| \varphi - \psi \|\ . \tag{5.2}$$

Tomando $\mu \in \mathbb{C}$ tal que

$$|\,\mu\,| \| A \| \leq \theta < 1 \tag{5.3}$$

obtenemos que

$$\| B\,\varphi - B\,\psi \| \leq \theta \; \| \varphi - \psi \| < \| \varphi - \psi \| \; . \tag{5.4}$$

Un operador B con estas propiedades se dice **contractivo**.

Mostraremos que todo operador contractivo tiene un único **punto fijo**, es decir, un único vector $\varphi \in \mathbf{E}$ que satisface que

$$B\,\varphi = \varphi \, . \tag{5.5}$$

En nuestro caso, este vector corresponderá a la única solución de la ec. (4.1) para una inhomogeneidad f,

$$\varphi = B\,\varphi = \mu\, A\,\varphi + f \, . \tag{5.6}$$

Partiendo de un vector arbitrario $\varphi_0 \in \mathbf{E}$, formemos la secuencia

$$\varphi_0 \, , \varphi_1 = B\,\varphi_0 \, , \varphi_2 = B\,\varphi_1 = B^2\,\varphi_0 \, , \ldots , \varphi_k = B\,\varphi_{k-1} = B^k\,\varphi_0 \, , \ldots \tag{5.7}$$

Veremos que ésta es una secuencia de Cauchy.

Para ello, primero tomemos la distancia entre dos elementos consecutivos,

$$\begin{aligned} \| \varphi_{k+1} - \varphi_k \| &= \| B\,\varphi_k - B\,\varphi_{k-1} \| \leq \theta \, \| \varphi_k - \varphi_{k-1} \| \leq \\ &\leq \theta^2 \, \| \varphi_{k-1} - \varphi_{k-2} \| \leq \cdots \leq \theta^k \, \| \varphi_1 - \varphi_0 \| \, , \end{aligned} \tag{5.8}$$

de donde se deduce que

$$\begin{aligned} &\| \varphi_{k+l} - \varphi_k \| \leq \\ &\leq \| \varphi_{k+l} - \varphi_{k+l-1} \| + \| \varphi_{k+l-1} - \varphi_{k+l-2} \| + \cdots + \| \varphi_{k+1} - \varphi_k \| \leq \\ &\leq \left(\theta^{k+l-1} + \theta^{k+l-2} + \cdots + \theta^k \right) \| \varphi_1 - \varphi_0 \| = \\ &= \theta^k \left(\sum_{j=0}^{l-1} \theta^j \right) \| \varphi_1 - \varphi_0 \| < \frac{\theta^k}{1-\theta} \; \| \varphi_1 - \varphi_0 \| \, . \end{aligned} \tag{5.9}$$

Por lo tanto,

$$\lim_{k\to\infty} \| \varphi_{k+l} - \varphi_k \| = 0 \, , \quad \forall \, l \, . \tag{5.10}$$

Como $\mathbf{E}$ es un espacio completo, existe el límite de esta secuencia,

$$\varphi = \lim_{k\to\infty} \varphi_k \, . \tag{5.11}$$

Y como B es contractivo, este vector es un punto fijo de B. En efecto,

$$\| B\,\varphi - \varphi_{k+1} \| = \| B\,\varphi - B\,\varphi_k \| \leq \theta \, \| \varphi - \varphi_k \| \to 0 \tag{5.12}$$

cuando $k \to \infty$, de modo que, por la unicidad del límite en $\mathbf{E}$, tenemos

$$B\,\varphi = \lim_{k\to\infty} \varphi_k = \varphi\,. \tag{5.13}$$

Para ver que este punto fijo es único, supongamos que existe otro vector $\psi \in \mathbf{E}$ que satisface $B\,\psi = \psi$. Entonces, si $\| \varphi - \psi \| \neq 0$,

$$\| \varphi - \psi \| = \| B\,\varphi - B\,\psi \| \leq \theta \, \| \varphi - \psi \| \Rightarrow \theta \geq 1\,, \tag{5.14}$$

en contradicción con la elección de μ, ec. (5.3). Por lo tanto, $\psi = \varphi$.

Finalmente, señalemos que esta construcción nos permite *aproximar* la solución de la ec. (4.1) en el sentido de la distancia en el espacio $\mathbf{E}$. En efecto, tomando el límite para $l \to \infty$ en la ecuación (5.9) obtenemos para la distancia entre la solución y el k-ésimo elemento de la secuencia (5.7)

$$\| \varphi - \varphi_k \| \leq \frac{\theta^k}{1-\theta} \, \| B\,\varphi_0 - \varphi_0 \| \;. \tag{5.15}$$

La solución de la ecuación (4.1) corresponde al único punto fijo del operador contractivo B, que se obtiene como el límite de la secuencia (5.7) cualquiera que sea el vector inicial φ_0 que se emplee para generarla.

Si se elige $\varphi_0 = \mathbf{0}$, entonces

$$\begin{aligned} &\varphi_1 = f\,, \\ &\varphi_2 = \mu\,A\,f + f\,, \\ &\vdots \\ &\varphi_k = \textstyle\sum_{l=0}^{k-1} \mu^l\,A^l\,f\,, \\ &\vdots\,, \end{aligned} \tag{5.16}$$

de modo que la solución de (4.1) para $f \in \mathbf{E}$ arbitraria corresponde al límite de la serie

$$\varphi = \sum_{k=0}^{\infty} \mu^k\,A^k\,f = \lim_{k\to\infty} \left\{ \left(\sum_{l=0}^{k} \mu^l\,A^l \right) f \right\}\,, \tag{5.17}$$

cuya convergencia está garantizada para

$$|\,\mu\,| \leq \frac{\theta}{\|\,A\,\|}\,, \quad \text{con } 0 < \theta < 1\,. \tag{5.18}$$

De esta expresión surge que, en un entorno del origen del plano complejo μ, el operador resolvente del operador completamente continuo A es el límite de una serie de operadores,

$$R_\mu = \sum_{k=0}^{\infty} \mu^k\,A^k = \lim_{k\to\infty} \sum_{l=0}^{k} \mu^l\,A^l\,, \tag{5.19}$$

serie que converge en el sentido de la norma y que coincide con el desarrollo formal de $\big(\mathbf{I} - \mu\,A\big)^{-1}$ en serie de potencias de μ.

Para verificar la convergencia de esta serie debemos considerar la distancia que media entre R_μ y una suma parcial en el espacio normado de los operadores acotados. Para ello, tengamos en cuenta que para todo vector unitario $f \in \mathbf{E}$ es

$$\begin{aligned} \left|\left|\left(R_\mu - \textstyle\sum_{l=0}^{k} \mu^l\, A^l\right) f\right|\right| &= \| \varphi - \varphi_{k+1} \| \leq \\ &\leq \frac{\theta^{k+1}}{1-\theta}\, \| f \| = \frac{\theta^{k+1}}{1-\theta}\,, \end{aligned} \tag{5.20}$$

donde φ es la solución de (4.1) correspondiente a una inhomogeneidad f, φ_{k+1} es la $(k+1)$-ésima aproximación a esa solución, y donde hemos empleado la cota establecida en la ec. (5.15). Entonces,

$$\begin{aligned} &\left|\left|R_\mu - \textstyle\sum_{l=0}^{k} \mu^l\, A^l\right|\right| = \\ &= \sup_{\left\{ f\in\mathbf{E} \,\middle|\, \|f\|=1 \right\}} \left|\left|\left(R_\mu - \textstyle\sum_{l=0}^{k} \mu^l\, A^l\right) f\right|\right| \leq \frac{\theta^{k+1}}{1-\theta} \to 0 \end{aligned} \tag{5.21}$$

cuando $k \to \infty$, dado que $\theta < 1$.

Podemos verificar que la serie en (5.19) converge efectivamente al inverso de $\big(\mathbf{I} - \mu\, A\big)$ teniendo en cuenta que

$$\begin{aligned} \big(\mathbf{I} - \mu\, A\big) \left(\sum_{l=0}^{k-1} \mu^l\, A^l\right) &= \left(\sum_{l=0}^{k-1} \mu^l\, A^l\right) \big(\mathbf{I} - \mu\, A\big) = \\ &= \mathbf{I} - \mu^k\, A^k \;\to\; \mathbf{I} \end{aligned} \tag{5.22}$$

cuando $k \to \infty$, dado que $\mu^k\, A^k \to \mathbf{O}$. En efecto,

$$\| \mu^k\, A^k \| \leq | \mu |^k \| A \| \| A^{k-1} \| \leq \cdots \leq | \mu |^k \| A \|^k \leq \theta^k \to 0 \tag{5.23}$$

cuando $k \to \infty$, pues $0 < \theta < 1$.

6. Extensión analítica de R_μ

El operador resolvente de un operador completamente continuo existe en casi todo punto del plano complejo de la variable μ. Es únicamente para los valores singulares de μ, que forman (a lo sumo) una secuencia numerable que diverge al infinito, que R_μ no está definido.

En la Sección anterior hemos mostrado que la condición $| \mu | \| A \| \leq \theta < 1$ es suficiente para que R_μ pueda representarse como el límite (en el sentido de la distancia en el espacio de Banach de los operadores acotados) de una serie de potencias en la variable μ. En esas condiciones, se puede decir que R_μ es una **función analítica** de la variable μ (a valores operadores) en un entorno del origen.

Mostraremos que R_μ es una función analítica de μ en un entorno de todo valor regular.

Sea μ_0 un valor regular de un operador completamente continuo A. Entonces, $R_{\mu_0} = \big(\mathbf{I} - \mu_0\, A\big)^{-1}$ existe y es un operador acotado. Además, como los valores singulares de A son puntos aislados, existe todo un entorno de μ_0 libre de ellos.

Podemos entonces considerar el operador resolvente en un punto μ próximo de μ_0,

$$\begin{aligned} R_\mu &= \big(\mathbf{I} - \mu\, A\big)^{-1} = \big(\mathbf{I} - \mu_0\, A - (\mu - \mu_0)\, A\big)^{-1} = \\ &= R_{\mu_0}\big(\mathbf{I} - (\mu - \mu_0)\, AR_{\mu_0}\big)^{-1} = R_{\mu_0} \sum_{k=0}^{\infty} (\mu - \mu_0)^k\, (AR_{\mu_0})^k\,, \end{aligned} \tag{6.1}$$

donde la serie en el miembro de la derecha converge en el sentido de la norma de los operadores para

$$|\, \mu - \mu_0 \,|\, \|\, AR_{\mu_0} \,\| \le \theta < 1\,. \tag{6.2}$$

Téngase en cuenta que AR_{μ_0} es completamente continuo, dado que R_{μ_0} es acotado y A es compacto. En consecuencia, valen para esta serie todas las consideraciones hechas en la Sección anterior acerca de la convergencia del desarrollo del operador resolvente en un entorno del origen.

Por lo tanto, R_μ existe como una función analítica de la variable μ (que toma valores que son operadores sobre $\mathbf{E}$) en toda una región abierta del plano complejo, la que sólo excluye a los valores singulares de A (puntos aislados que corresponden a las inversas de los autovalores de A).

En particular, si R_μ es conocido en cierta región abierta del plano complejo, este operador puede ser prolongado analíticamente desde allí, evitando los puntos singulares.

También puede probarse fácilmente que el operador resolvente tomado para distintos valores regulares conmuta.

En efecto, para λ, μ valores regulares de A compacto podemos escribir que

$$\begin{aligned} \mu\, R_\mu - \lambda\, R_\lambda &= \mu\, R_\mu\big(\mathbf{I} - \lambda\, A\big) R_\lambda - R_\mu\big(\mathbf{I} - \mu\, A\big)\lambda\, R_\lambda = \\ &= (\mu - \lambda) R_\mu R_\lambda\,. \end{aligned} \tag{6.3}$$

Entonces, si $\lambda \neq \mu$,

$$R_\mu R_\lambda = \frac{\mu\, R_\mu - \lambda\, R_\lambda}{\mu - \lambda} = R_\lambda R_\mu\,. \tag{6.4}$$

7. Resolvente de operadores integrales

Consideremos un operador integral de Fredholm de núcleo de cuadrado sumable,

$$A\,\varphi(t) = \int_a^b K(t,s)\,\varphi(s)\,ds\,, \tag{7.1}$$

con

$$K^2 = \| K(t,s) \|^2 = \int_a^b \int_a^b |K(t,s)|^2 \, dt \, ds < \infty \, . \tag{7.2}$$

Dado que A es completamente continuo, y su norma

$$\| A \| \leq K \, , \tag{7.3}$$

sabemos que el operador resolvente R_μ es el límite de una serie de potencias en μ de la forma

$$R_\mu = \mathbf{I} + \sum_{k=1}^{\infty} \mu^k \, A^k \, , \tag{7.4}$$

convergente (en el sentido de la norma de los operadores acotados) en el círculo $|\mu| \leq \theta/K$, con $0 < \theta < 1$.

Mostraremos que en este caso el operador resolvente toma la forma

$$R_\mu = \mathbf{I} + \Gamma_\mu \, , \tag{7.5}$$

donde Γ_μ es un operador integral de Fredholm de núcleo de cuadrado sumable, que depende del parámetro μ.

Dado que R_μ en (7.4) está expresado en términos de potencias del operador A, primero debemos estudiar la composición de operadores integrales.

Para ello, consideremos un segundo operador de Fredholm

$$B \, \varphi(t) = \int_a^b L(t,s) \, \varphi(s) \, ds \, , \tag{7.6}$$

con

$$L^2 = \| L(t,s) \|^2 = \int_a^b \int_a^b |L(t,s)|^2 \, dt \, ds < \infty \, . \tag{7.7}$$

Su composición con A es, por definición,

$$\begin{aligned} AB \, \varphi(t) &= \textstyle\int_a^b K(t,s) \left\{ \int_a^b L(s,r) \, \varphi(r) \, dr \right\} ds = \\ &= \textstyle\int_a^b \left\{ \int_a^b K(t,s) \, L(s,r) \, ds \right\} \varphi(r) \, dr \, , \end{aligned} \tag{7.8}$$

donde el cambio en el orden de las integrales está justificado por el Teorema de Fubini, dado que todas las funciones que allí aparecen son de cuadrado sumable y la integral doble existe.

En consecuencia, AB es también un operador integral cuyo núcleo es

$$M(t,r) = \int_a^b K(t,s) \, L(s,r) \, ds \, . \tag{7.9}$$

Como $K(t,s)$ y $L(s,r)$ son funciones de cuadrado sumable de la variable s (para casi todos los valores de t y de r), el núcleo $M(t,r)$ puede ser interpretado como el producto escalar

$$M(t,r) = \big(K(t,s)^*, L(s,r)\big)\,. \tag{7.10}$$

Por aplicación de la desigualdad de Cauchy - Schwarz, esto permite escribir

$$|M(t,r)|^2 \le k(t)^2\, l(r)^2\,, \tag{7.11}$$

donde

$$\begin{cases} k(t)^2 = \int_a^b |K(t,s)|^2\, ds \;\Rightarrow\; \int_a^b k(t)^2\, dt = K^2\,, \\[2ex] l(r)^2 = \int_a^b |L(s,r)|^2\, ds \;\Rightarrow\; \int_a^b l(r)^2\, dr = L^2\,. \end{cases} \tag{7.12}$$

Por lo tanto, $M(t,r) \in \mathbf{L}_2\big((a,b)\times(a,b)\big)$, y su norma

$$M^2 = \int_a^b \int_a^b |M(t,r)|^2\, dt\, dr \le K^2\, L^2 \;\Rightarrow\; M \le K\, L\,. \tag{7.13}$$

Este resultado permite concluir que las potencias enteras positivas de un operador integral de Fredholm de núcleo de cuadrado sumable son también operadores integrales de Fredholm,

$$A^k\, \varphi(t) = \int_a^b K_k(t,s)\, \varphi(s)\, ds\,, \tag{7.14}$$

cuyos núcleos, llamados **núcleos iterados**, se obtienen recursivamente de la relación

$$K_{k+1}(t,s) = \int_a^b K(t,r)\, K_k(r,s)\, dr\,, \quad K_1(t,s) = K(t,s)\,, \tag{7.15}$$

son de cuadrado sumable, y su norma satisface

$$K_k = \|\, K_k(t,s)\, \| \le\; K\; \|\, K_{k-1}(t,s)\, \| \le \cdots \le K^k\,. \tag{7.16}$$

En esas condiciones, cada suma parcial de la serie en el miembro de la derecha de la ec. (7.4) corresponde a un operador integral de Fredholm,

$$S_{\mu,n}\, f(t) = \sum_{k=1}^{n} \mu^k\, A^k\, f(t) = \int_a^b S_n(t,s;\mu)\, f(s)\, ds\,, \tag{7.17}$$

cuyo núcleo (de cuadrado sumable) está dado por la suma

$$S_n(t,s;\mu) = \sum_{k=1}^{n} \mu^k\, K_k(t,s) \in \mathbf{L}_2\big((a,b)\times(a,b)\big)\,. \tag{7.18}$$

Ahora bien, la secuencia formada por los núcleos $S_n(t,s;\mu)$ es fundamental en $\mathbf{L}_2\big((a,b)\times(a,b)\big)$. En efecto,

$$\begin{aligned} \| S_{n+m}(t,s;\mu) - S_n(t,s;\mu) \| &= \left\| \sum_{k=n+1}^{n+m} \mu^k K_k(t,s) \right\| \leq \\ &\leq \sum_{k=n+1}^{n+m} |\mu|^k \| K_k(t,s) \| \leq \sum_{k=n+1}^{n+m} |\mu|^k K^k \leq \sum_{k=n+1}^{n+m} \theta^k < \frac{\theta^{n+1}}{1-\theta} \to 0 \end{aligned} \tag{7.19}$$

cuando $n \to \infty$, $\forall\, m$.

Por lo tanto, existe el límite de la serie

$$\Gamma(t,s;\mu) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu^k K_k(t,s) \in \mathbf{L}_2\big((a,b)\times(a,b)\big)\,, \tag{7.20}$$

que es además una función analítica de la variable μ en un entorno del origen.

Esta función de cuadrado sumable permite definir un nuevo operador integral de Fredholm,

$$\Gamma_\mu\, f(t) := \int_a^b \Gamma(t,s;\mu)\, f(s)\, ds\,, \tag{7.21}$$

que resulta ser el límite de la serie

$$\Gamma_\mu = \sum_{k=1}^{\infty} \mu^k A^k = \lim_{n\to\infty} S_{\mu,n}\,. \tag{7.22}$$

En efecto, dado que tanto Γ_μ como $S_{\mu,n}$ son operadores integrales de Fredholm, también lo es su diferencia, $\Gamma_\mu - S_{\mu,n}$. Y como la norma de tales operadores está acotada por la norma de sus núcleos, tenemos que

$$\| \Gamma_\mu - S_{\mu,n} \| \leq \| \Gamma(t,s;\mu) - S_n(t,s;\mu) \| \to 0 \tag{7.23}$$

cuando $n \to \infty$. □

En consecuencia, la solución de una ecuación integral de la forma

$$\varphi(t) - \mu \int_a^b K(t,s)\, \varphi(s)\, ds = f(t)\,, \tag{7.24}$$

donde $K(t,s)$ y $f(t)$ son funciones de cuadrado sumable dadas, y $\mu \in \mathbb{C}$ satisface $|\mu|\, K \leq \theta < 1$, puede escribirse como

$$\varphi(t) = R_\mu\, f(t) = f(t) + \int_a^b \Gamma(t,s;\mu)\, f(s)\, ds\,, \tag{7.25}$$

donde $\Gamma(t,s;\mu) \in \mathbf{L}_2\big((a,b)\times(a,b)\big)$ es una función analítica de μ que corresponde al límite de la serie de núcleos iterados, ec. (7.20).

Si la serie de núcleos iterados puede ser sumada a una función $\Gamma(t,s;\mu)$, holomorfa en un círculo $\mid \mu \mid K \leq \theta < 1$, ésta ha de admitir una prolongación analítica (que es única) a todo el plano complejo de la variable μ, la que sólo presentará singularidades aisladas en los valores singulares del núcleo $K(t,s)$.

Ejemplo:

• Consideremos el núcleo $K(t,s) = e^{t+s}$, con $0 \leq t, s \leq 1$. Entonces,

$$K^2 = \| \, e^{t+s} \, \|^2 = \int_0^1 \int_0^1 e^{2(t+s)} \, dt \, ds = \left(\frac{e^2-1}{2} \right)^2 , \tag{7.26}$$

y los núcleos iterados son

$$\begin{gathered} K_2(t,s) = \textstyle\int_0^1 e^{t+r} \, e^{r+s} \, dr = \left(\frac{e^2-1}{2} \right) e^{t+s} , \\ K_3(t,s) = \textstyle\int_0^1 e^{t+r} \, K_2(r,s) \, dr = \left(\frac{e^2-1}{2} \right)^2 e^{t+s} , \\ \vdots \\ K_k(t,s) = \textstyle\int_0^1 e^{t+r} \, K_{k-1}(r,s) \, dr = \left(\frac{e^2-1}{2} \right)^{k-1} e^{t+s} , \\ \vdots \end{gathered} \tag{7.27}$$

Por lo tanto, para $\mid \mu \mid \; K = \mid \mu \mid \left(\frac{e^2-1}{2} \right) \leq \theta < 1$, tenemos

$$\Gamma(t,s;\mu) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu^k \, K_k(t,s) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu^k \left(\frac{e^2-1}{2} \right)^{k-1} e^{t+s} = \frac{\mu \, e^{t+s}}{1 - \mu \left(\frac{e^2-1}{2} \right)} . \tag{7.28}$$

La suma de esta serie es una función analítica de μ que admite una extensión meromorfa al plano complejo, la que presenta como única singularidad un polo simple en $\mu = \frac{2}{e^2-1}$. De ese modo, el operador integral de núcleo e^{t+s} tiene un único valor singular en ese punto.

Eso se explica por el hecho de que este operador integral aplica todo $\mathbf{L}_2(0,1)$ en el subespacio unidimensional generado por la función $\psi(t) = e^t$, de modo que todo autovector correspondiente a un autovalor no nulo debe ser proporcional a esa función,

$$A \, e^t = \int_0^1 e^{t+s} \, e^s \, ds = \left(\frac{e^2-1}{2} \right) e^t \Rightarrow \lambda = \left(\frac{e^2-1}{2} \right) . \tag{7.29}$$

En esas condiciones, si $\mu \neq \frac{2}{e^2-1}$ la ecuación integral

$$\varphi(t) - \mu \int_0^1 e^{t+s} \, \varphi(s) \, ds = f(t) \tag{7.30}$$

tiene solución única $\forall\, f(t) \in \mathbf{L}_2(0,1)$, la que está dada por

$$\varphi(t) = f(t) + \frac{\mu}{1-\mu\left(\frac{e^2-1}{2}\right)} \int_0^1 e^{t+s}\, f(s)\, ds = \tag{7.31}$$

$$= f(t) + \frac{\mu\,\lambda}{(1-\mu\,\lambda)}\, \frac{e^t}{\parallel e^t \parallel^2} \int_0^1 e^s\, f(s)\, ds\,.$$

Si, por el contrario, $\mu = \frac{2}{e^2-1}$, entonces la ecuación integral sólo tiene solución si $f(t) \perp e^t$, en cuyo caso no es única,

$$\varphi(t) = f(t) + c\, e^t\,, \quad c \in \mathbb{C} \tag{7.32}$$

(donde hemos tenido en cuenta las propiedades de los núcleos simétricos - ver *Notas sobre Espacios Euclídeos, ec. (25.12)*). En efecto,

$$\left\{ f(t) + c\, e^t \right\} - \frac{2\, e^t}{e^2-1} \int_0^1 e^s \left\{ f(s) + c\, e^s \right\} ds = \tag{7.33}$$

$$= f(t) + c\, e^t - c\, e^t = f(t)\,.$$

$\diamond$

La condición $\mid \mu \mid K \leq \theta < 1$ ha sido obtenida como una condición suficiente para la convergencia de la serie de núcleos iterados, pero hay situaciones en las que su radio de convergencia es mayor. Y allí donde la serie (7.20) converge, ella se suma al núcleo $\Gamma(t,s;\mu)$.

Un ejemplo de esta situación corresponde al caso en que algún núcleo iterado se anule idénticamente, $K_{n+1}(t,s) \equiv 0$, lo que hace que todos los que le siguen también sean nulos, $K_k(t,s) \equiv 0\,, \forall\, k > n$. En esas condiciones, la serie en la ec. (7.20) se reduce a un polinomio de grado n en μ,

$$\Gamma(t,s;\mu) = \sum_{k=1}^{n} \mu^k\, K_k(t,s)\,, \tag{7.34}$$

que es una **función entera** (analítica en todo el plano complejo). En tal caso, el operador integral de núcleo $K(t,s)$ no tiene valores singulares.

Ejemplo:

• Esa situación ocurre, en particular, para núcleos degenerados de la forma

$$K(t,s) = \sum_{k=1}^{n} p_k(t)\, q_k^*(s)\,, \quad \text{con } p_k(t) \perp q_l(t)\,,\ k,l = 1,\ldots,n\,. \tag{7.35}$$

En este caso, $K_2(t,s) \equiv 0$, de modo que $\Gamma(t,s;\mu) = \mu\, K(t,s)$.

Ese es el caso de

$$K(t,s) = \sin(t-2s) = \sin(t)\cos(2s) - \cos(t)\sin(2s)\,. \tag{7.36}$$

Evidentemente,

$$K_2(t,s) = \int_{-\pi}^{\pi} \sin(t-2r)\sin(r-2s)\,dr = 0\,, \tag{7.37}$$

de modo que

$$\Gamma(t,s;\mu) = \mu\,\sin(t-2s)\,, \quad \forall\,\mu \in \mathbb{C}\,, \tag{7.38}$$

y la ecuación integral

$$\varphi(t) - \mu \int_{-\pi}^{\pi} \sin(t-2s)\,\varphi(s)\,ds = f(t)\,, \tag{7.39}$$

tiene solución única $\forall\, f(t) \in \mathbf{L}_2(a,b)$, dada por

$$\varphi(t) = f(t) + \mu \int_{-\pi}^{\pi} \sin(t-2s)\,f(s)\,ds\,. \tag{7.40}$$

$\diamond$

La serie para $\Gamma(t,s;\mu)$ también converge $\forall\,\mu \in \mathbb{C}$ si las normas de los núcleos iterados están acotadas por constantes de la forma

$$\| K_k(t,s) \| \leq c\,\frac{M^k}{k!}\,. \tag{7.41}$$

En este caso,

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{k=n+1}^{n+m} \mu^k\,K_k(t,s) \right\| &\leq \sum_{k=n+1}^{n+m} |\,\mu\,|^k \,\| K_k(t,s) \| \leq \\ &\leq c \sum_{k=n+1}^{n+m} \frac{|\,\mu\,|^k\,M^k}{k!} \to 0 \quad \text{cuando } n \to \infty\,, \forall\, m \in \mathbb{N}\,. \end{aligned} \tag{7.42}$$

Entonces, la serie de núcleos iterados

$$\Gamma(t,s;\mu) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu^k\,K_k(t,s)\,, \tag{7.43}$$

converge en $\mathbf{L}_2(a,b)$ para todo complejo μ, y un núcleo con esas propiedades no tiene valores singulares.

Esa situación se presenta, en particular, en el caso de **operadores integrales de Volterra** de núcleo acotado,

$$A\,\varphi(t) = \int_a^t K(t,s)\,\varphi(s)\,ds\,, \quad |\,K(t,s)\,| \leq M\,. \tag{7.44}$$

Se trata de un caso particular de operadores de Fredholm para los cuales el núcleo $K(t,s) = 0$ para $s \geq t$.

Consideremos el segundo núcleo iterado,

$$K_2(t,s) = \int_a^b K(t,r)\, K(r,s)\, dr = \begin{cases} \displaystyle\int_s^t K(t,r)\, K(r,s)\, dr\,, & t > s\,, \\ \\ 0\,, \quad t \leq s\,, \end{cases} \tag{7.45}$$

que es también un núcleo de Volterra acotado,

$$|\, K_2(t,s)\, | \leq \int_s^t |\, K(t,r)\, K(r,s)\, |\; dr \leq M^2\, (t-s) \leq M^2\, (b-a)\,. \tag{7.46}$$

Para el tercer núcleo iterado tenemos

$$K_3(t,s) = \int_a^b K(t,r)\, K_2(r,s)\, dr = \begin{cases} \displaystyle\int_s^t K(t,r)\, K_2(r,s)\, dr\,, & t > s\,, \\ \\ 0\,, \quad t \leq s\,, \end{cases} \tag{7.47}$$

que es también un núcleo de Volterra acotado por

$$\begin{aligned} |\, K_3(t,s)\, | &\leq \int_s^t |\, K(t,r)\, K_2(r,s)\, |\; dr \leq \\ &\leq \int_s^t M^3\, (r-s)\, dr \leq M^3\, \frac{(t-s)^2}{2!} \leq M^2\, \frac{(b-a)^2}{2!}\,. \end{aligned} \tag{7.48}$$

En general, tenemos

$$\begin{aligned} K_k(t,s) &= \int_a^b K(t,r)\, K_{k-1}(r,s)\, dr = \\ &= \begin{cases} \displaystyle\int_s^t K(t,r)\, K_{k-1}(r,s)\, dr\,, & t > s\,, \\ \\ 0\,, \quad t \leq s\,, \end{cases} \end{aligned} \tag{7.49}$$

que es también un núcleo de Volterra cuyo módulo está acotado por

$$\begin{aligned} |\, K_k(t,s)\, | &\leq \int_s^t |\, K(t,r)\, K_{k-1}(r,s)\, |\; dr \leq \\ &\leq \int_s^t M^k\, \frac{(r-s)^{k-2}}{(k-2)!}\, dr \leq M^k\, \frac{(t-s)^{k-1}}{(k-1)!} \leq M^k\, \frac{(b-a)^{k-1}}{(k-1)!}\,. \end{aligned} \tag{7.50}$$

En esas condiciones,

$$\|\, K_k(t,s)\, \| \leq \big[M\, (b-a)\big]\, \frac{M^{k-1}\, (b-a)^{k-1}}{(k-1)!}\,, \tag{7.51}$$

y la resolvente existe en todo el plano complejo.

El hecho de que los núcleos iterados estén uniformemente acotados (ver ec. (7.50)) hace que la serie para $\Gamma(t,s;\mu)$ sea uniformemente convergente para $a \le t, s \le b$ y para μ tomando valores en cualquier región acotada del plano complejo, $\mid \mu \mid \le \Lambda$,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mid \mu^k K_k(t,s) \mid \le \sum_{k=1}^{\infty} \mid \mu \mid^k M^k \frac{(b-a)^{k-1}}{(k-1)!} \le (\Lambda M)\, e^{\Lambda M(b-a)} . \tag{7.52}$$

Esto implica, en particular, que $\Gamma(t,s;\mu) = 0$ para $t \le s$, de modo que $\Gamma_\mu = R_\mu - \mathbf{I}$ es también un operador integral de Volterra.

Por lo tanto, la ecuación integral

$$\varphi(t) - \mu \int_a^t K(t,s)\, \varphi(s)\, ds = f(t)\,, \quad \text{con} \ \mid K(t,s) \mid \le M\,, \tag{7.53}$$

tiene solución única $\forall\, f(t) \in \mathbf{L}_2(a,b)$ y $\forall\, \mu \in \mathbb{C}$, la que está dada por

$$\varphi(t) = f(t) + \int_a^t \Gamma(t,s;\mu)\, f(s)\, ds\,. \tag{7.54}$$

Ejemplo:

• Consideremos el núcleo de Volterra

$$K(t,s) = \begin{cases} e^{t^2-s^2}\,, & t > s\,, \\ 0\,, & t \le s\,, \end{cases} \tag{7.55}$$

donde $a \le t, s \le b$. Entonces,

$$K_2(t,s) = \begin{cases} \displaystyle\int_s^t e^{t^2-r^2}\, e^{r^2-s^2}\, dr = (t-s)\, e^{t^2-s^2}\,, & t > s\,, \\ 0\,, \quad t \le s\,, \end{cases} \tag{7.56}$$

$$K_3(t,s) = \begin{cases} \displaystyle\int_s^t e^{t^2-r^2}\, (r-s)\, e^{r^2-s^2}\, dr = \frac{(t-s)^2}{2!}\, e^{t^2-s^2}\,, & t > s\,, \\ 0\,, \quad t \le s\,, \end{cases} \tag{7.57}$$

y en general

$$K_k(t,s) = \begin{cases} \displaystyle\int_s^t e^{t^2-r^2}\, \frac{(r-s)^{k-2}}{(k-2)!}\, e^{r^2-s^2}\, dr = \frac{(t-s)^{k-1}}{(k-1)!}\, e^{t^2-s^2}\,, \ t > s\,, \\ 0\,, \quad t \le s\,. \end{cases} \tag{7.58}$$

En esas condiciones,

$$\Gamma(t,s;\mu) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu^k \, K_k(t,s) =$$

$$= \begin{cases} \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \mu^k \, \frac{(t-s)^{k-1}}{(k-1)!} \, e^{t^2-s^2} = \mu \, e^{\mu\,(t-s)} \, e^{t^2-s^2} \,, & t > s \,, \\ \\ 0 \,, \quad t \leq s \,, \end{cases} \tag{7.59}$$

donde la serie converge $\forall \, \mu \in \mathbb{C}$. $\diamond$

8. Método de los determinantes de Fredholm

En el caso general, la serie de los núcleos iterados, ec. (7.20), tiene un radio de convergencia finito, fuera del cual sólo es posible obtener el núcleo $\Gamma(t,s;\mu)$ por prolongación analítica de la suma de la serie en un entorno del origen.

En lo que sigue se presenta sin demostración una fórmula debida a Fredholm, que da una expresión para el núcleo $\Gamma(t,s;\mu)$ para todo valor regular $\mu \in \mathbb{C}$. Esta fórmula fue demostrada primero por Fredholm para el caso de núcleos $K(t,s)$ continuos y acotados (ver, por ejemplo, *Methods of Mathematical Physics*, R. Courant y D. Hilbert.), y luego extendida al caso de núcleos de cuadrado sumable arbitrarios (ver, por ejemplo, *Mathematical Analysis*, G. Ye. Shilov, y las referencias allí citadas).

Definamos

$$C_0 := 1 \,, \quad B_0(t,s) := K(t,s) \,, \tag{8.1}$$

e introduzcamos las relaciones de recurrencia

$$\begin{aligned} C_n &:= \int_a^b B_{n-1}(s,s) \, ds \,, \\ B_n(t,s) &:= C_n \, K(t,s) - n \int_a^b K(t,r) \, B_{n-1}(r,s) \, dr \,. \end{aligned} \tag{8.2}$$

Es fácil ver que

$$B_n(t,s) =$$

$$= \int_a^b \cdots \int_a^b \begin{vmatrix} K(t,s) & K(t,s_1) & \dots & K(t,s_n) \\ K(s_1,s) & K(s_1,s_1) & \dots & K(s_1,s_n) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ K(s_n,s) & K(s_n,s_1) & \dots & K(s_n,s_n) \end{vmatrix} \, ds_1 \, \dots \, ds_n \,, \tag{8.3}$$

lo que le da su nombre al método.

Con estos coeficientes se definen las series de potencias

$$D(t,s;\mu) := K(t,s) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!}\, B_n(t,s)\, \mu^n \tag{8.4}$$

y

$$D(\mu) := 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!}\, C_n\, \mu^n\,, \tag{8.5}$$

que convergen en todo el plano complejo de la variable μ, sumándose a las funciones enteras $D(t,s;\mu)$, llamada **menor de Fredholm**, y $D(\mu)$, llamada **determinante de Fredholm**.

En esas condiciones, los ceros de $D(\mu)$ coinciden con los valores singulares del núcleo $K(t,s)$, y el núcleo del operador integral $\Gamma_\mu = R_\mu - \mathbf{I}$ está dado por el cociente

$$\Gamma(t,s;\mu) = \frac{D(t,s;\mu)}{D(\mu)}\,. \tag{8.6}$$

Entonces, para todo valor regular μ (para el cual $D(\mu) \neq 0$) y $\forall\, f(t) \in \mathbf{L}_2(a,b)$, la ecuación integral

$$\varphi(t) - \mu \int_a^b K(t,s)\, \varphi(s)\, ds = f(t) \tag{8.7}$$

tiene una única solución que puede ser expresada como

$$\varphi(t) = f(t) + \int_a^b \frac{D(t,s;\mu)}{D(\mu)}\, f(s)\, ds\,. \tag{8.8}$$

Ejemplo:

• Son raras aquellas situaciones en las que es posible sumar explícitamente las series (8.4) y (8.5). Un ejemplo corresponde al caso en que uno de los núcleos $B_n(t,s)$ se anula idénticamente, lo que hace que esas series se reduzcan a sumas finitas.

Tomemos el núcleo degenerado $K(t,s) = t\, e^s$, con $0 \leq t, s \leq 1$. Tenemos que

$$C_1 = \int_0^1 s\, e^s\, ds = 1\,, \tag{8.9}$$

y

$$B_1(t,s) = t\, e^s - \int_0^1 t\, e^r\, r\, e^s\, dr = t\, e^s - t\, e^s = 0\,, \tag{8.10}$$

de modo que $C_n = 0$ y $B_n(t,s) \equiv 0$ para $n \geq 2$.

Por lo tanto,

$$\begin{cases} D(t,s;\mu) = t\, e^s\,, \\[2ex] D(\mu) = 1 - \mu\,, \end{cases} \tag{8.11}$$

lo que implica que el núcleo $K(t,s) = t\, e^s$ tiene un único valor singular en $\mu = 1$ (En efecto, por tratarse de un operador integral de núcleo degenerado que proyecta

todo el espacio $\mathbf{L}_2(0,1)$ en un subespacio unidimensional, vemos que todo autovector correspondiente a un autovalor no nulo es proporcional a $e(t) = t$. Y teniendo en cuenta la integral en (8.9), concluimos que el autovalor correspondiente es $\lambda = 1$).

Para el núcleo $\Gamma(t, s; \mu)$ tenemos finalmente

$$\Gamma(t, s; \mu) = \frac{t\, e^s}{1-\mu}\,, \quad \text{para } \mu \neq 1\,. \tag{8.12}$$

◇

Bibliografía:

- G. Ye. Shilov, *The Theory of Linear Spaces.*
- G. Ye. Shilov, *Mathematical Analysis.*
- A.N. Kolmogorov y S.V. Fomin, *Elementos de la Teoría de Funciones y del Análisis Funcional.*
- M. Krasnov, A. Kiseliov, G. Macarenko, *Ecuaciones Integrales.*
- R. Courant y D. Hilbert, *Methods of Mathematical Physics.*
- M. Reed y B. Simon, *Methods of Modern Mathematical Physics*, Vol. I.