

Universidad Nacional de La Plata

**Funciones Espectrales de Operadores
Singulares**

P.A.G. Pisani

17 de diciembre de 2004

Tesis Doctoral del Departamento de Física
de la Facultad de Ciencias Exactas
de la Universidad Nacional de La Plata.

Director: Dr. Horacio A. Falomir.





Dedicado a la memoria de mi viejo.

Desocupado lector, sin juramento me podrás creer que quisiera que este libro, como hijo del entendimiento, fuera el más hermoso, el más gallardo y más discreto que pudiera imaginarse. Pero no he podido yo contravenir al orden de naturaleza; que en ella cada cosa engendra su semejante.

*Miguel de Cervantes
(Primeras palabras del prólogo al
Ingenioso Hidalgo Don Quijote de la Mancha.)*

For the most wild yet most homely narrative which I am about to pen, I neither expect nor solicit belief. Mad indeed would I be to expect it, in a case where my very senses reject their own evidence. Yet, mad am I not -and very surely do I not dream. But tomorrow I die, and today I would unburden my soul. My immediate purpose is to place before the world, plainly, succinctly, and without comment, a series of mere household events. In their consequences, these events have terrified -have tortured- have destroyed me. Yet I will not attempt to expound them. To me, they have presented little but horror -to many they will seem less terrible than baroques. Hereafter, perhaps, some intellect may be found which will reduce my phantasm to the commonplace -some intellect more calm, more logical, and far less excitable than my own, which will perceive, in the circumstances I detail with awe, nothing more than an ordinary succession of very natural causes and effects.

Edgar Allan Poe (The Black Cat.)

Índice general

I	Introducción	11
I.1.	Funciones Espectrales y Operadores Singulares	13
I.2.	Aplicaciones en Teoría Cuántica de Campos	20
I.2.1.	Funciones espectrales en Teoría Cuántica de Campos	20
I.2.2.	Potenciales singulares	26
I.3.	Plan de la Tesis	28
II	Extensiones Autoadjuntas	39
II.1.	Introducción	41
II.2.	Teoría de von Neumann	42
II.3.	Topología del conjunto de extensiones autoadjuntas	50
II.3.1.	Estados de borde	53
III	Ruptura Espontánea de SUSY en Mecánica Cuántica.	57
III.1.	Introducción	59
III.2.	N=2 SUSYQM	60
III.3.	Superpotencial singular	61
III.4.	El operador adjunto	63
III.4.1.	Dominio de Q_+^\dagger	63
III.4.2.	Espectro de Q_+^\dagger	64
III.5.	Extensiones autoadjuntas de la supercarga	67
III.5.1.	Límite regular	71
III.6.	Realización del álgebra de N=2 SUSYQM	73
III.7.	Clausura del operador	74
IV	Funciones Espectrales	77
IV.1.	Operadores pseudodiferenciales	79
IV.1.1.	Operadores integrales	83
IV.2.	Funciones espectrales	84
IV.2.1.	Relación entre la distintas funciones espectrales	87
IV.3.	Desarrollos asintóticos	89

V	Operadores Singulares	95
V.1.	Introducción	97
V.2.	Fórmula de Krein para operadores regulares	98
V.3.	Fórmula de Krein para operadores singulares	100
V.3.1.	Extensiones autoadjuntas	101
V.3.2.	Relación entre las distintas resolventes.	103
V.4.	Desarrollo asintótico de la resolvente	108
V.4.1.	Caso no compacto	108
V.4.2.	Caso compacto	114
VI	Ejemplos: Operadores de Schrödinger	119
VI.1.	Un operador de Schrödinger en una variedad de base no compacta	121
VI.1.1.	El operador y su adjunto	121
VI.1.2.	Extensiones autoadjuntas	128
VI.1.3.	Estructura de polos de la función- ζ	133
VI.1.4.	Comportamiento asintótico de los autovalores	137
VI.1.5.	Casos particulares	138
VI.2.	Un operador de Schrödinger en una variedad de base compacta	140
VI.2.1.	El operador y sus extensiones autoadjuntas	141
VI.2.2.	La resolvente	146
VI.2.3.	La función- ζ y la traza del heat-kernel	150
VI.2.4.	El caso $\nu = 0$	153
VII	Operadores de Dirac	157
VII.1.	Un operador de primer orden	159
VII.1.1.	El operador y sus extensiones autoadjuntas	160
VII.1.2.	La resolvente	164
VII.1.3.	Las funciones $\zeta(s)$ y $\eta(s)$	171
VII.2.	El problema de Aharonov-Bohm	176
VII.2.1.	El operador y su espectro	176
VII.2.2.	La función $\zeta^\beta(s)$	179
VII.2.3.	Estructura de polos de la función $\zeta^\beta(s)$	180
VII.2.4.	Desarrollo asintótico de la traza del heat-kernel de D^2	182
VIII	Conclusiones	185
IX	Problemas de interés	193
IX.1.	Método Functorial	195
IX.2.	Otro tipo de singularidad	201

X	Apéndice	205
X.1.	Operadores regulares sobre variedades no compactas	207
X.2.	SUSYQM: Funciones Espectrales	209
X.2.1.	La función de partición graduada	209
X.2.2.	La asimetría espectral de la supercarga	210
X.3.	Desarrollo asintótico del heat-kernel en varias dimensiones	214
X.4.	Desarrollos asintóticos de la sección VI.1	216
X.5.	Trazas de la sección VI.2	218
X.6.	Trazas de la sección VII.1	219
X.7.	Desarrollos asintóticos de las Secciones VI.2 y VII.1	221
XI	Agradecimientos	225
XII	Bibliografía	229

Parte I

Introducción

*No other question has ever moved so profoundly the spirit of man;
no other idea has so fruitfully stimulated his intellect;
yet no other concept stands in greater need of clarification
than that of the infinite.
(David Hilbert.)*

I.1. Funciones Espectrales y Operadores Singulares

En una serie de trabajos publicados entre 1967 y 1969, R.T. Seeley [112, 113, 114] estudió la existencia y propiedades de la resolvente $(A - \lambda)^{-1}$ de un operador diferencial A con coeficientes infinitamente derivables definido sobre secciones de un fibrado vectorial sobre una variedad de base compacta M con borde suave ∂M . El procedimiento utilizado consiste en construir una aproximación al núcleo de la resolvente $(A - \lambda)^{-1}$, con $\lambda \in \mathbb{C}$, para grandes valores de $|\lambda|$ a partir de una aproximación al símbolo de la resolvente. Esto permite, por su parte, definir e investigar las propiedades del operador pseudodiferencial A^{-s} , para una variable $s \in \mathbb{C}$.

Los trabajos [112, 113, 114] contienen un resultado fundamental en la teoría de las funciones espectrales: la traza de A^{-s} , también denominada función- ζ del operador A , es una función meromorfa de la variable s cuyas únicas singularidades consisten en una sucesión de polos simples s_n ubicados en puntos del eje real dados por,

$$\boxed{s_n = \frac{m - n}{d} \quad \text{con} \quad n = 0, 1, 2, \dots} \quad (1)$$

donde la cantidad m designa la dimensión de la variedad M y d el orden del operador diferencial A .

Es notable que los polos de la función espectral $\zeta_A(s) := \text{Tr } A^{-s}$, sólo dependen del orden del operador A y de la dimensión de la variedad M . No dependen, por ejemplo, de parámetros externos que aparecieran en los coeficientes del operador diferencial ni de la forma funcional de estos coeficientes.

No obstante, el resultado (1) es válido bajo las hipótesis que hemos mencionado. La variedad M debe ser compacta y su borde ∂M suficientemente suave. Por otra parte, existen restricciones sobre las condiciones de contorno del problema, esto es, sobre el comportamiento de las funciones del dominio $\mathcal{D}(A)$ del operador en el borde ∂M de la variedad.

Las condiciones de contorno deben estar definidas por operadores de borde locales que son combinaciones lineales de las derivadas normales al borde (véase la ecuación 258.) El operador diferencial A y los operadores de borde deben, además, definir un sistema elíptico para el cual se satisfaga la condición de Agmon (véanse las definiciones (IV.3.1), (IV.3.2) y (IV.3.3).) Asimismo, el operador A debe ser regular, *i.e.*, sus coeficientes deben pertenecer a la clase $C^\infty(M)$ de funciones infinitamente derivables sobre la variedad.

Antes de mencionar las aplicaciones de este resultado en Teoría Cuántica de Campos hemos de decir que, a pesar de la gran actividad desarrollada en el estudio de las funciones espectrales, no existe información suficiente acerca de la validez del resultado (1) en el caso de operadores diferenciales con coeficientes singulares.

El objetivo central de esta Tesis es estudiar la estructura de polos de la función $\zeta_A(s)$ de un operador diferencial A con coeficientes singulares definido sobre una variedad con borde. En el capítulo IV presentaremos sucintamente la derivación del resultado (1) pero mostraremos que este resultado pierde validez en presencia de cierto tipo de singularidades. Deduiremos entonces el Teorema V.4.1 que muestra la ubicación de los polos de la función- ζ de operadores de Schrödinger unidimensionales cuyos potenciales poseen ese tipo de singularidad. Veremos que, en este caso, la posición de los polos puede depender de algunos otros parámetros que caracterizan la singularidad del operador.

Algunos ejemplos serán tratados en el capítulo VI, en el que calcularemos los polos y residuos de las funciones- ζ correspondientes a algunos operadores diferenciales con coeficientes singulares que pueden resolverse en forma explícita¹.

Consideraremos, en particular, hamiltonianos de Schrödinger,

$$A = -\partial_x^2 + U_\nu(x), \quad (2)$$

en variedades de base unidimensionales M compactas y no compactas, cuyos potenciales $U_\nu(x)$ presentan una singularidad en el borde ∂M . También resolveremos un problema asociado al hamiltonianos de Dirac,

$$A = i\gamma_0 (\not{\partial}_x - i\mathcal{A}_\nu(x)), \quad (3)$$

definidos sobre una variedad no compacta M de dos dimensiones en la que el campo de gauge $\mathcal{A}_\nu(x)$ presenta una singularidad aislada.

Es importante señalar que, para ambos operadores, el “grado” de la singularidad presente en los coeficientes $U_\nu(x)$ y $\mathcal{A}_\nu(x)$ coincide con el orden d del operador diferencial; *id est*, el potencial del operador de Schrödinger, para el que $d = 2$, posee un término singular proporcional a x^{-2} , en tanto que el término singular en el campo de gauge del operador de Dirac, para el cual $d = 1$, es proporcional a x^{-1} . Esta propiedad permite

¹En los casos que hemos estudiado, las autofunciones pueden expresarse en términos de funciones especiales y los autovalores están determinados por las soluciones de ecuaciones trascendentes.

estudiar las funciones espectrales en términos de las transformaciones de escala en las proximidades de la singularidad. El subíndice ν , por su parte, está relacionado, tanto en uno como en otro caso, con el coeficiente de los términos singulares, caracterizando así la “intensidad” de la singularidad.

De acuerdo con el resultado (1), los polos de la función- ζ de los operadores regulares de primer y segundo orden definidos sobre variedades de base de una y dos dimensiones están ubicados en valores enteros o semienteros del eje real. No obstante, los operadores diferenciales (2) y (3) que hemos estudiado en el capítulo VI poseen un coeficiente² con una singularidad regular de la forma x^{-2} y x^{-1} , respectivamente. En consecuencia, no podemos afirmar *a priori* que se verifique (1) pues los operadores no satisfacen las hipótesis que lo rigen.

La resolución explícita para los operadores (2) y (3) que daremos en el capítulo VI muestra que, por el contrario, se verifica la estructura de polos de las funciones- ζ que probaremos en el capítulo IV para operadores con coeficientes singulares. Como dijimos, esta estructura no responde a la ecuación (1) según la cual, en los casos $d = 1, 2$ y $m = 1, 2$, los polos están ubicados en enteros o semienteros del eje real. En presencia de las singularidades regulares mencionadas, las funciones- ζ correspondientes tienen polos simples en el eje real cuyas posiciones dependen con continuidad del parámetro ν que, como hemos dicho, caracteriza la intensidad de la singularidad. Por consiguiente, como el parámetro ν toma valores en un intervalo del eje real, las posiciones de los polos de las funciones- ζ pueden tomar, incluso, valores irracionales. Asimismo, se observa que, aunque las singularidades de las funciones- ζ son aisladas, la distancia entre polos sucesivos disminuye en la dirección del semieje real negativo y su densidad aumenta conforme la variable s tiende a $-\infty$ sobre el eje real. En el caso de operadores regulares, por el contrario, las singularidades de la función- ζ están, como indica (1), igualmente espaciadas.

Daremos a continuación expresiones para las funciones espectrales que estudiaremos en esta Tesis y veremos algunas consecuencias del resultado (1). Las definiciones y propiedades de las funciones espectrales se presentan con mayor detalle en la sección IV.2.

Si el operador diferencial A tiene un espectro de autovalores dado por $\{\lambda_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ entonces,

$$\zeta_A(s) = \text{Tr } A^{-s} = \sum_{n \in \mathbb{N}} \lambda_n^{-s}, \quad (4)$$

que converge para $\Re(s)$ suficientemente grande. Por otra parte, si el valor absoluto de los autovalores crece suficientemente rápido conforme $n \rightarrow \infty$, entonces la traza de la resolvente existe y está dada por,

$$\text{Tr } (A - \lambda)^{-1} = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{\lambda_n - \lambda}. \quad (5)$$

²Nos referimos al potencial $U_\nu(x)$ y al campo de gauge $\mathcal{A}_\nu(x)$ como los coeficientes del término de orden cero en las derivadas.

Asimismo, si la parte real de los autovalores está acotada inferiormente, la traza del heat-kernel $\text{Tr } e^{-tA}$ verifica,

$$\text{Tr } e^{-tA} = \sum_{n \in \mathbb{N}} e^{-t\lambda_n}, \quad (6)$$

siendo $t \in \mathbb{R}^+$.

En la sección IV.2 mostraremos que la transformada de Mellin de la traza del heat-kernel es la función- ζ y que su transformada de Laplace es la traza de la resolvente (véanse las ecuaciones (245) y (246).) Esto implica que las singularidades de $\zeta_A(s)$ aportan información acerca de los desarrollos asintóticos de $\text{Tr } (A - \lambda)^{-1}$ y de $\text{Tr } e^{-tA}$ para grandes valores de $|\lambda|$ y para pequeños valores de t , respectivamente. Si la función $\zeta_A(s)$ posee polos simples en $s = s_n$, con $n \in \mathbb{N}$, entonces $\text{Tr } (A - \lambda)^{-1}$ admite un desarrollo asintótico para grandes valores de $|\lambda|$ en potencias de la forma λ^{-s_n-1} en tanto que $\text{Tr } e^{-tA}$ admite un desarrollo asintótico para pequeños valores de t en potencias de la forma t^{-s_n} . Los coeficientes de estas potencias en ambos desarrollos asintóticos están determinados por los residuos de la función $\zeta_A(s)$ en el polo correspondiente. En consecuencia, si se cumplen las hipótesis del resultado (1), los exponentes de las potencias de λ y t en los desarrollos asintóticos de $\text{Tr } (A - \lambda)^{-1}$ y de $\text{Tr } e^{-tA}$ están determinados por el orden del operador y la dimensión de la variedad.

Consideremos, por ejemplo, un operador diferencial de Schrödinger regular,

$$A = -\Delta + V(x), \quad (7)$$

definido sobre secciones ϕ de un fibrado vectorial E de rango k y conexión ω sobre una variedad de base compacta M que satisfacen la condición de contorno local,

$$(\partial_m + S) \phi|_{\partial M} = 0 \quad (8)$$

donde ∂_m es la derivada respecto de la coordenada x^m normal al borde ∂M y $S : \partial M \rightarrow \mathbb{C}^{k \times k}$. Se demuestra entonces [66] que la traza del heat-kernel e^{-tA} satisface el siguiente desarrollo asintótico para pequeños valores de t ,

$$\text{Tr } e^{-tA} \sim \sum_{n=0}^{\infty} c_n(A) \cdot t^{-\frac{m+n}{2}}, \quad (9)$$

donde los coeficientes $c_n(A)$ están dados por,

$$c_{2k}(A) = \frac{1}{(4\pi)^{m/2}} \int_M c_{2k}(A, x) d\mu(x) + \frac{1}{(4\pi)^{m/2}} \int_{\partial M} c_{2k}^b(A, x) d\mu^b(x), \quad (10)$$

$$c_{2k+1}(A) = \frac{1}{(4\pi)^{(m-1)/2}} \int_{\partial M} c_{2k+1}^b(A, x) d\mu^b(x),$$

siendo $d\mu(x)$ y $d\mu^b(x)$ medidas de integración sobre la variedad y sobre su borde, respectivamente. Como puede verse de la expresión (9), los exponentes de las potencias de t

están de acuerdo con la ubicación de los polos de la función- ζ correspondiente, dada por (1).

Los coeficientes locales $c_{2k}(A, x)$, $c_{2k}^b(A, x)$, $c_{2k+1}^b(A, x)$ de las expresiones (10) son funciones del potencial $V(x)$, de la conexión ω , de la matriz S , del tensor de curvatura $\mathcal{R}_{\mu\nu\rho\sigma}$ de la variedad M y del tensor de curvatura extrínseca $K_{\mu\nu}$ del borde ∂M . Los valores calculados para los primeros de estos coeficientes son [66, 82, 123],

$$c_0(A, x) = k, \quad (11)$$

$$c_2(A, x) = \text{tr}_E V(x) + \frac{1}{6} k \mathcal{R}, \quad (12)$$

$$c_4(A, x) = \frac{1}{360} (60 \text{tr}_E \Delta V(x) + 60 \mathcal{R} \text{tr}_E V(x) + 180 \text{tr}_E V^2(x) + 12 k \Delta \mathcal{R} + 5 k \mathcal{R}^2 - 2 k \mathcal{R}_{\mu\nu} \mathcal{R}^{\mu\nu} + 2 k \mathcal{R}_{\mu\nu\rho\sigma} \mathcal{R}^{\mu\nu\rho\sigma} + 30 \text{tr}_E \Omega_{\mu\nu} \Omega^{\mu\nu}), \quad (13)$$

$$c_0^b(A, x) = 0, \quad (14)$$

$$c_2^b(A, x) = \frac{1}{3} (k K + 6 k S), \quad (15)$$

$$c_1^b(A, x) = \frac{1}{4} k, \quad (16)$$

$$c_3^b(A, x) = \frac{1}{384} (96 \text{tr}_E V(x) + 16 k \mathcal{R} + 8 k \mathcal{R}_{m\mu m}^\mu + 13 k K^2 + 2 k K_{\mu\nu} K^{\mu\nu} + 96 k S K + 192 k S^2). \quad (17)$$

En estas expresiones tr_E representa la traza de los operadores sobre la fibra, que es isomorfa a \mathbb{C}^k , y Ω es la “curvatura” de la conexión ω .

Por el contrario, los resultados obtenidos en el capítulo V y verificados con ejemplos en el capítulo VI indican que las funciones espectrales $\text{Tr} (A - \lambda)^{-1}$ y $\text{Tr} e^{-tA}$ del operador (2) con un potencial $U_\nu(x)$ singular admiten un desarrollo asintótico en potencias de λ y t cuyos exponentes dependen del parámetro ν involucrado en el término singular. Un resultado similar para la traza de la resolvente $\text{Tr} (A - \lambda)^{-1}$ del operador singular (3) es ilustrado con algunos ejemplos en el capítulo VII.

En el Capítulo V estudiaremos, en particular, el operador de Schödinger (2), definido sobre la variedad de base \mathbb{R}^+ , cuyo un potencial $U_\nu(x)$ tiene un comportamiento singular en $x = 0$ dado por,

$$U_\nu(x) = \frac{\nu^2 - 1/4}{x^2} + V(x), \quad (18)$$

siendo $V(x)$ una función analítica e inferiormente acotada. Mostraremos que el desarrollo asintótico de la traza de su heat-kernel contiene potencias de t dependientes del parámetro ν dadas por,

$$\sum_{N=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} b_{N,n}(A) \theta^N t^{\nu N + n/2 - 1/2}, \quad (19)$$

donde θ es un parámetro que caracteriza la condición de contorno en el origen. Daremos también una técnica para determinar los coeficientes $b_{N,n}(A)$.

Algunas otras divergencias con respecto al resultado (1) ya han sido estudiadas bajo distintas hipótesis. La presencia de polos de multiplicidad mayor que uno en la función $\zeta_A(s)$ está relacionada con desarrollos asintóticos de la traza de la resolvente y del heat-kernel que involucran factores de la forma $\log \lambda$ y $\log t$ multiplicando a las potencias de λ y t , respectivamente. Se ha demostrado [73, 74, 75, 76, 77] que el desarrollo asintótico para pequeños valores de t de la traza del heat-kernel $\text{Tr } e^{-tA}$ de operadores diferenciales definidos sobre funciones que satisfacen condiciones de contorno espectrales³ presentan términos logarítmicos en t multiplicando a las potencias de t . Por lo tanto, la función $\zeta_A(s)$ correspondiente presenta polos de multiplicidad mayor. No obstante, la ubicación de estas singularidades en el plano complejo s está determinada, al igual que bajo las hipótesis del resultado (1), por el orden d del operador A y la dimensión m de la variedad de base M .

Existe, también, cierta controversia [50, 10, 115, 49] con respecto al desarrollo asintótico del heat-kernel en problemas con condiciones de contorno mixtas, esto es, definidas por un operador de borde singular⁴, referida a las propiedades de los coeficientes e , incluso, a la presencia de términos logarítmicos en t . No obstante, una vez más los exponentes de las potencias de t y, consecuentemente, la ubicación de las singularidades de la función- ζ están determinadas por el orden del operador diferencial y la dimensión de la variedad.

En 1980, C. Callias y C.H. Taubes [26] conjeturaron que el desarrollo asintótico de la traza del heat-kernel de operadores diferenciales con coeficientes singulares presentaría factores logarítmicos en t multiplicando potencias de t cuyos exponentes podrían, además, depender de los parámetros que caracterizaran las singularidades de los coeficientes. Sin embargo, no proveyeron en esa ocasión argumentos o ejemplos que sostuvieran su conjetura.

En 1983, C. Callias [25] estudió el operador de Schrödinger (2), con $x \in \mathbb{R}^+$, dado por el potencial

$$U_\nu(x) = \frac{\nu^2 - 1/4}{x^2}, \quad (20)$$

con $\nu > 1$ pero demostró que la traza de su heat-kernel admite un desarrollo asintótico en potencias de t cuyos exponentes responden a la ecuación (1).

Sin embargo, en el capítulo VI mostraremos que, para operadores de la forma (2) con un potencial (20) pero con $0 \leq \nu < 1$, los exponentes de las potencias de t dependen, en

³Condiciones de contorno espectrales son un tipo de condiciones no locales que aparecen en el Teorema del índice de Atiyah-Patodi-Singer para variedades con borde [6].

⁴También llamadas condiciones de contorno de Zaremba; *e.g.*, condiciones de contorno del tipo Dirichlet en una subvariedad de ∂M y condiciones de contorno del tipo Neumann en su complemento.

general, del parámetro ν . La diferencia se debe a que este operador admite una familia infinita de extensiones autoadjuntas si $0 \leq \nu < 1$ en tanto que es esencialmente autoadjunto si $\nu \notin [0, 1)$.

Si el operador es esencialmente autoadjunto, como es el caso considerado en [25], las condiciones de contorno en la singularidad están unívocamente determinadas. Por el contrario, el caso en el que $0 \leq \nu < 1$, estudiado en el capítulo VI de esta Tesis, admite un conjunto infinito de condiciones de contorno en $x = 0$. Como veremos, la presencia de esta variedad de condiciones de contorno posibles es esencial para obtener potencias de t con exponentes dependientes de ν .

La relevancia de las condiciones de contorno para el estudio de operadores de la forma (2) con un potencial singular dado por (18) se deduce de un argumento dimensional que desarrollaremos con mayor detalle en el capítulo IX. En efecto, como el orden de la singularidad x^{-2} coincide con el orden del operador ($d = 2$), éste es “formalmente” invariante de escala. Por consiguiente, el problema presenta esta simetría si el dominio del operador o, equivalentemente, las condiciones de contorno que lo definen son también invariantes de escala. Utilizando la teoría de von Neumann para las extensiones autoadjuntas, que expondremos en el capítulo II, puede probarse que existen dos condiciones de contorno particulares, esto es, dos extensiones autoadjuntas, que presentan esta invariancia. Estas dos condiciones de contorno no involucran, por lo tanto, ningún parámetro con dimensiones. Es plausible, por ello, que los exponentes del desarrollo asintótico del heat-kernel respondan, para estas dos extensiones, al resultado (1).

Para comprender esto observemos, en primer lugar, que los autovalores λ_n del operador de Schrödinger tienen dimensión correspondiente a la inversa del cuadrado de una longitud, L^{-2} . Por lo tanto, el parámetro t en la traza $\text{Tr} e^{-tA}$ tiene dimensión L^2 y, consecuentemente, el coeficiente de la potencia t^{-s_n} en el desarrollo asintótico del heat-kernel tiene dimensiones L^{2s_n} . Si, con excepción del término singular proporcional a x^{-2} , el potencial es analítico en la coordenada entonces el operador sólo involucra parámetros cuyas dimensiones son potencias enteras de L . Como, además, las dos condiciones de contorno invariantes de escala no involucran ningún parámetro adicional con dimensiones, se puede probar que las dimensiones de los coeficientes de la potencia t^{-s_n} son potencias enteras de L . De modo que, para estas dos extensiones autoadjuntas particulares, los exponentes s_n y, en consecuentemente los polos de la función- ζ , deben ser semienteros, como indica la ecuación (1).

Contrariamente, las demás extensiones autoadjuntas que admite el operador diferencial involucran un parámetro θ cuya dimensión, como se deduce de la condición de contorno correspondiente (véase el capítulo II), es una potencia de L dependiente del parámetro adimensional ν del término singular. Si los coeficientes del desarrollo asintótico del heat-kernel dependen de la extensión autoadjunta están, entonces, relacionados con el parámetro θ por lo que resulta plausible que sus dimensiones sean potencias de L que, al igual que el exponente de t , dependan también de ν .

En conclusión, existen dos extensiones autoadjuntas invariantes de escala para las que los exponentes de t en el desarrollo asintótico del heat-kernel obedecen a la ecuación (1). Las condiciones de contorno de las restantes extensiones autoadjuntas están caracterizadas por un parámetro θ cuya dimensión depende del coeficiente del término singular del operador diferencial. Para estas extensiones autoadjuntas los coeficientes del desarrollo asintótico del heat-kernel involucran al parámetro θ y, por consiguiente, los exponentes de las potencias de t también dependen del coeficiente del término singular en el operador.

Esta dependencia, uno de los resultados centrales de esta Tesis, será enunciada en el Teorema V.4.1.

La demostración de este Teorema se basa en una generalización de la fórmula de Krein. Esta fórmula relaciona las resolventes de dos extensiones autoadjuntas de un operador regular. En el Teorema V.3.11 extendemos este resultado al caso de un operador de Schrödinger (2), con $x \in \mathbb{R}^+$, cuyo potencial presenta un término singular proporcional a x^{-2} . De esta manera podemos expresar la resolvente $(A^\theta - \lambda)^{-1}$ de una extensión autoadjunta arbitraria A^θ del operador A como una combinación lineal de las resolventes de las dos extensiones autoadjuntas caracterizadas por condiciones de contorno invariantes de escala. Los coeficientes de esta combinación lineal presentan desarrollos asintóticos en potencias de λ cuyos exponentes dependen del coeficiente del término singular del operador diferencial. Este es el origen de la dependencia con la intensidad de la singularidad de los exponentes de las potencias de t en el desarrollo asintótico del heat-kernel y de la posición de los polos de la función- ζ del operador.

I.2. Aplicaciones en Teoría Cuántica de Campos

I.2.1. Funciones espectrales en Teoría Cuántica de Campos

Las funciones espectrales encuentran aplicación en diversas áreas de la física y la matemática. Completas descripciones y referencias acerca de estas aplicaciones pueden encontrarse en los trabajos de K. Kirsten [82], D. Vassilevich [123], G. Espósito [53] y E. Elizalde *et al.* [52].

En Teoría Cuántica de Campos las amplitudes de dispersión de partículas representadas por campos cuánticos $\phi(x)$ se calculan en términos de las funciones de Green definidas como el valor de expectación de vacío del producto ordenado temporalmente de esos campos. En la formulación basada en la integral funcional, esos valores de expectación están dados por,

$$\langle 0|T \{ \phi(x_1) \dots \phi(x_n) \} |0 \rangle = \frac{1}{N} \int \mathcal{D}\phi \phi(x_1) \dots \phi(x_n) e^{-\frac{1}{\hbar} S[\phi]}, \quad (21)$$

donde N es una constante de normalización y $S[\phi]$ es la acción que rige la dinámica de los campos $\phi(x)$ evaluados en una variedad de base M . La integral funcional (21) puede

calcularse perturbativamente, con respecto a \hbar , utilizando la técnica de los diagramas de Feynmann. Este cálculo permite regularizar, perturbativamente, los parámetros que intervienen en la acción $S[\phi]$ mediante la introducción de contratérminos en el lagrangiano. Las funciones espectrales proveen un mecanismo de regularización al primer orden perturbativo, esto es, $O(\hbar)$, equivalente al cálculo de los diagramas de Feynmann con 1-loop.

Consideremos la funcional,

$$Z[J] = \frac{1}{N} \int \mathcal{D}\phi e^{-\frac{1}{\hbar} S[\phi] + \frac{1}{\hbar} (J, \phi)}, \quad (22)$$

donde (\cdot, \cdot) es el producto interno en el espacio de funciones sobre la variedad de base M . La funcional $Z[J]$ se denomina funcional generatriz, pues sus derivadas funcionales permite calcular los valores de expectación (21),

$$\langle 0|T \{ \phi(x_1) \dots \phi(x_n) \} |0 \rangle = \hbar^n \frac{\delta}{\delta J(x_1)} \dots \frac{\delta}{\delta J(x_n)} Z[J] \quad (23)$$

Por consiguiente, la información obtenida perturbativamente utilizando los diagramas de Feynmann se encuentra contenida en la funcional $Z[J]$. Las contribuciones de los diagramas conexos están dadas por la funcional,

$$W[J] = \hbar \log Z[J]. \quad (24)$$

Por su parte, las contribuciones de los diagramas conexos e irreducibles a una partícula están dados por la transformada de Legendre $\Gamma[\phi_J]$ de $W[J]$,

$$\Gamma[\phi_J] = (J, \phi_J) - W[J], \quad (25)$$

donde,

$$\phi_J(x) := \frac{\delta}{\delta J(x)} W[J]. \quad (26)$$

Esta ecuación permite expresar a la fuente $J(x)$ en términos del campo $\phi_J(x)$, en virtud de lo cual podemos eliminar en la ecuación (25) la dependencia de la funcional $\Gamma[\phi_J]$ con $J(x)$.

En consecuencia, el campo $\phi_J(x)$ satisface,

$$\frac{\delta}{\delta \phi_J(x)} \Gamma[\phi_J] = J(x). \quad (27)$$

La funcional $\Gamma[\phi_J]$ se denomina acción efectiva pues coincide, a orden dominante en \hbar , con la acción clásica $S[\phi_J]$. Haciendo una traslación en la variable de integración ϕ de (22), obtenemos la siguiente expresión para la acción efectiva,

$$\Gamma[\phi_J] = -\hbar \log \left[\frac{1}{N} \int \mathcal{D}\phi e^{-\frac{1}{\hbar} S[\phi_J + \phi] + \frac{1}{\hbar} (\phi, J)} \right]. \quad (28)$$

Si desarrollamos la acción $S[\phi_J + \phi]$ alrededor del campo $\phi_J(x)$ obtenemos,

$$\Gamma[\phi_J] = -\hbar \log \left[\frac{1}{N} e^{-\frac{1}{\hbar} S[\phi_J]} \int \mathcal{D}\phi e^{-\frac{1}{2\hbar}(\phi, A \cdot \phi) + \dots} \right], \quad (29)$$

siendo,

$$A \cdot \phi(x) := \int_M \frac{\delta^2 S[\phi]}{\delta\phi(x)\delta\phi(x')} \Big|_{\phi=\phi_J} \phi(x'). \quad (30)$$

Como la acción es local el operador A es un operador diferencial. Nótese también que, al orden que estamos considerando, los términos lineales en los campos en (29) se cancelan en virtud de la ecuación (27).

Si representamos la variable de integración ϕ en (29) en términos de las autofunciones del operador A y definimos la constante “infinita” N convenientemente, la integral en (29) satisface,

$$\int \mathcal{D}\phi e^{-\frac{1}{2\hbar}(\phi, A \cdot \phi)} \sim \text{Det}^{-1/2}(A). \quad (31)$$

Este resultado es válido para campo bosónicos. En el caso de campos fermiónicos, la integral es proporcional al determinante del operador A .

Obtenemos finalmente la aproximación al orden de 1-loop de la acción efectiva,

$$\Gamma[\phi_J] = S[\phi_J] + \frac{\hbar}{2} \log \text{Det}(A) + O(\hbar^2) \quad (32)$$

Como A es un operador diferencial su determinante debe ser correctamente definido. En efecto, si designamos por $\{\lambda_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ al espectro del operador, el producto de sus autovalores $\prod_n \lambda_n$ resulta divergente por lo que requiere una “regularización”, esto es, una definición consistente que conduzca a un resultado finito. Esto equivale a las divergencias que se encuentran en el cálculo perturbativo a 1-loop. Las funciones espectrales proveen algunas técnicas para regularizar el determinante de un operador diferencial y, consecuentemente, regularizar la acción efectiva.

Para introducir una de las regularizaciones del determinante de operadores diferenciales comúnmente utilizadas consideremos la identidad,

$$\log a - \log b = - \int_0^\infty \frac{dt}{t} (e^{-ta} - e^{-tb}), \quad (33)$$

válida para $a, b \in \mathbb{R}^+$. Podemos entonces proponer,

$$\log \text{Det}(A) \sim - \int_0^\infty \frac{dt}{t} \text{Tr} e^{-tA}. \quad (34)$$

No obstante, como $\text{Tr} e^{-tA} \sim t^{-m/d}$ cuando $t \rightarrow 0^+$ (véase la ecuación (9)), la integral en (34) no es convergente y requiere una regularización. Definimos entonces,

$$\log \text{Det}(A) := -\mu^{2s} \int_0^\infty dt t^{s-1} \text{Tr} e^{-tA} \Big|_{s=0}, \quad (35)$$

siendo μ un parámetro con dimensiones de energía.

De acuerdo con la relación entre la traza del heat-kernel y la función- ζ que probaremos en la sección IV.2 (véase la ecuación (246)),

$$\begin{aligned} \log \text{Det}(A) &= -\mu^{2s} \Gamma(s) \zeta(s) \Big|_{s=0} = \\ &= -\frac{\zeta(0)}{s} - 2 \log \mu \zeta(0) + \gamma_E \zeta(0) - \zeta'(0). \end{aligned} \quad (36)$$

Como la función $\zeta(s)$ es regular en $s = 0$ [112, 113, 114], las divergencias del determinante del operador A están representadas por el primer término de la ecuación (36), que es proporcional a $\zeta(0)$. En la sección IV.2 se demuestra que este valor de la función- ζ está dado por uno de los coeficientes del desarrollo asintótico de la traza del heat-kernel (véase la ecuación (247)),

$$\zeta(0) = c_m(A), \quad (37)$$

siendo m la dimensión de la variedad de base M . Es importante observar en este punto que, dado que el término divergente en la acción efectiva resulta proporcional al coeficiente $c_m(A, x)$, es esencial que este coeficiente dependa localmente del campo de modo que la divergencia pueda removerse mediante una redefinición de los parámetros del lagrangiano (véanse las expresiones (11-17).)

A modo de ilustración consideremos un campo escalar sin carga $\phi(x)$ con un lagrangiano dado por,

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \phi \cdot \partial_\mu \phi + m^2 \phi^2 + \lambda \phi^4. \quad (38)$$

Suponemos que el campo está definido en una variedad M euclídea, plana y compacta. Omitiremos además los efectos del borde ∂M .

De acuerdo con las expresiones (30) y (38), el operador A resulta, en este caso,

$$A = -\Delta + m^2 + 6\lambda \phi_J(x). \quad (39)$$

En consecuencia, si la variedad de base M tiene dimensión $m = 4$ (véase la ecuación (13)),

$$\zeta(0) = c_4(A) = \frac{3}{8\pi^2} \int_M (m^2 \lambda \phi_J^2(x) + 3\lambda^2 \phi_J^4(x)). \quad (40)$$

Vemos que la dependencia de $\zeta(0)$ con el campo $\phi_J(x)$ permite remover los términos divergentes de la acción efectiva redefiniendo los parámetros m y λ . De modo que, teniendo en cuenta las ecuaciones (32), (36) y (40), la acción efectiva resulta finita si introducimos en el lagrangiano los contratérminos de modo que,

$$m^2 \rightarrow m^2 \left[1 + \hbar \frac{3}{16\pi^2} \lambda \frac{1}{s} + O(\hbar^2) \right], \quad (41)$$

$$\lambda \rightarrow \lambda \left[1 + \hbar \frac{9}{16\pi^2} \lambda \frac{1}{s} + O(\hbar^2) \right]. \quad (42)$$

Mencionamos también la regularización del tiempo propio que consiste en modificar la integral (34),

$$\log \text{Det}(A) = - \int_{\Lambda^{-2}}^{\infty} \frac{dt}{t} \text{Tr} e^{-tA}, \quad (43)$$

que permite expresar los términos divergentes de la acción efectiva en términos de la energía de corte Λ . De ese modo, las divergencias ultravioletas están determinadas por los primeros términos del desarrollo asintótico del heat-kernel.

Existe una regularización “analítica” del determinante basada en la función $\zeta(s) = \text{Tr} A^{-s}$. Si el operador A actúa sobre un espacio de dimensión finita y tiene un conjunto de autovalores dado por $\{\lambda_n\}_{n=1,\dots,N}$ entonces se verifica,

$$\begin{aligned} \log \text{Det}(A/\mu^2) &= \log \prod_{n=1}^N \frac{\lambda_n}{\mu^2} = \sum_{n=1}^N \log \lambda_n - 2 \log \mu N = \\ &= - \frac{d}{ds} \left(\sum_{n=1}^N \lambda_n^{-s} \right) - 2 \log \mu \sum_{n=1}^N \lambda_n^{-s} \Big|_{s=0}. \end{aligned} \quad (44)$$

Generalizando esta igualdad al caso de operadores en espacios de dimensión infinita, definimos [79, 100],

$$\log \text{Det}(A) := -\zeta'(0) - 2 \log \mu \zeta(0). \quad (45)$$

Esta definición conduce a una regularización finita de las constantes de acoplamiento.

Las funciones espectrales poseen información acerca de otras cantidades en Teoría Cuántica de Campos. Si el lagrangiano sólo posee términos cuadráticos se puede ver, completando cuadrados en la expresión (22), que la funcional generatriz $Z_0[J]$ de los campos libres está dada por,

$$Z_0[J] = \frac{1}{N} e^{-\frac{1}{4} \int_{M \times M} J(x) A^{-1}(x,x') J(x')} \text{Det}^{-1/2}(A). \quad (46)$$

Las funciones espectrales aportan información acerca de la estructura de singularidades del propagador $A^{-1}(x, x')$. En efecto, en la sección IV.2 veremos que el núcleo de la resolvente $(A - \lambda)^{-1}(x, x')$ es la transformada de Laplace del núcleo del heat-kernel $e^{-tA}(x, x')$. En consecuencia, el propagador o función de Green $A^{-1}(x, x')$ está dado por,

$$A^{-1}(x, x') = \int_0^{\infty} dt e^{-tA}(x, x'). \quad (47)$$

Por consiguiente, el desarrollo asintótico del núcleo del heat-kernel para pequeños valores de t determina las singularidades que presenta el propagador en puntos coincidentes $x = x'$.

Por otra parte, el cálculo de la energía de Casimir del campo electromagnético cuántico también conduce a la aparición de cantidades divergentes de la forma $\hbar/2 \cdot \sum_n \omega_n$

siendo $\{\omega_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ las frecuencias de los modos electromagnéticos. Las funciones espectrales son utilizadas, en este contexto, para regularizar la energía de Casimir. Una descripción ilustrada con ejemplos de la regularización de la energía de las oscilaciones del vacío puede consultarse en [111]. En el trabajo de M. Bordag *et al.* [18] se encuentra un estudio detallado del efecto Casimir y de sus aplicaciones. Los resultado recientes pueden consultarse en el trabajo de K.A. Milton [92].

Finalmente, mencionemos que las funciones espectrales permiten también el cálculo de anomalías en Teoría Cuántica de Campos. Las anomalías representan una variación de la acción efectiva ante un grupo de simetría de la acción clásica. Teniendo en cuenta las ecuaciones (32) y (36) vemos que las anomalías están determinadas por las propiedades de transformación de la función $\zeta_A(s)$ ante el grupo de simetría⁵,

$$\delta\zeta(s) = \delta(\text{Tr } A^{-s}) = -s \text{Tr} (\delta A A^{-s-1}) . \quad (48)$$

Consideremos, por ejemplo, la anomalía conforme que está dada por la variación de la acción efectiva frente a la transformación $g_{\mu\nu}(x) \rightarrow e^{2\varphi(x)}g_{\mu\nu}(x)$ y puede escribirse en términos de la traza del tensor energía impulso $T_{\mu\nu}(x)$,

$$\begin{aligned} \delta\Gamma[\phi] &= \int_M \frac{\delta\Gamma[\phi]}{\delta g_{\mu\nu}(x)} \delta g^{\mu\nu}(x) d\mu(x) = -2 \int_M \sqrt{g} T_{\mu\nu}(x) g^{\mu\nu}(x) \delta\varphi(x) d\mu(x) = \\ &= \int_M \sqrt{g} T_{\mu}^{\mu}(x) \delta\varphi(x) d\mu(x) . \end{aligned} \quad (49)$$

Si la teoría clásica posee simetría conforme la transformación del operador A está dada por $A \rightarrow e^{-2\varphi(x)}A$ de modo que la variación conforme de la función $\zeta_A(s)$ es, de acuerdo con la expresión (48),

$$\delta\zeta(s) = 2s \text{Tr} (\delta\varphi(x)A^{-s}) . \quad (50)$$

Como la cantidad $\text{Tr} (\delta\varphi(x)A^{-s})$ es regular en $s = 0$ [66], la transformación conforme de la función $\zeta_A(s)$ en $s = 0$ verifica,

$$\delta\zeta_A(0) = 0, \quad \delta\zeta'_A(0) = 2 \text{Tr} (\delta\varphi(x)A^{-s})|_{s=0} . \quad (51)$$

De acuerdo con las ecuaciones (32) y (36), junto con (51), concluimos que la anomalía conforme no es divergente ni depende del parámetro de escala μ . Utilizando además la ecuación (49) y la relación entre $\text{Tr} (\delta\varphi(x)A^{-s})$ y $\text{Tr} (\delta\varphi(x)e^{-tA})$, similar a la ecuación (246), obtenemos la corrección cuántica a 1-loop de la traza del tensor energía impulso,

$$T_{\mu}^{\mu} = -\hbar c_m(A, x) + O(\hbar^2) . \quad (52)$$

La expresión (48) puede aplicarse también al cálculo de la anomalía quiral⁶ y de esta manera se obtiene una relación entre las funciones espectrales y el Teorema del índice.

⁵Estas identidades pueden demostrarse formalmente en base a las técnicas de [7, 107].

⁶El método de K. Fujikawa para determinar la anomalía quiral [59] equivale a la regularización del determinante mediante la ecuación (43).

I.2.2. Potenciales singulares

Los fundamentos de la teoría de los índices de deficiencia de von Neumann para el estudio de las extensiones autoadjuntas pueden consultarse en [101, 4]. La contribución de las singularidades aisladas a los índices de deficiencia de los operadores de Schrödinger es estudiada en [23]. En [17] se encuentra una discusión pedagógica de las extensiones autoadjuntas.

Los operadores de Schrödinger definidos por un potencial singular $U_\nu(x)$ cuyo término dominante cerca de la singularidad tiene la forma dada por la expresión (18) han sido estudiados como modelos de invariancia conforme en mecánica cuántica [44]. Con este objetivo, se analiza en [28] este tipo de potenciales mediante una regularización dimensional en tanto que en [12, 35] se consideran regularizaciones del potencial en las proximidades de la singularidad. En [121] se describen diversos aspectos de las extensiones autoadjuntas debidas a la presencia de singularidades.

El modelo de Calogero es un sistema exactamente resoluble [96, 98] que describe un conjunto de partículas idénticas en interacción mediante un potencial de la forma (18). En sus trabajos, Calogero [27] (véase también un tratamiento algebraico en [20, 99, 78]) impone la anulación de la función de onda en los puntos en que dos partículas coinciden. Sin embargo, condiciones de contorno más generales, determinadas por las extensiones autoadjuntas del hamiltoniano, han sido consideradas en este modelo en presencia de potenciales confinantes [14] y en ausencia de ellos [15].

Potenciales de la forma (18) adquieren especial interés en teorías supersimétricas pues proveen un mecanismo de ruptura espontánea de la supersimetría en modelos de mecánica cuántica con superpotenciales singulares [55]. Este mecanismo se debe a que, en general, las condiciones de contorno admisibles en la singularidad no respetan la supersimetría. La ruptura espontánea debida a la presencia de singularidades [80, 108, 36] ha generado cierta controversia pues en [43, 41, 65] se sostiene que una regularización del potencial apropiada preserva la supersimetría.

Por otra parte, en virtud de la presencia de singularidades de la forma (18) existe una descripción microscópica de los agujeros negros en las proximidades del horizonte en términos de modelos de invariancia conforme [33, 69, 118]. *E.g.*, en [13] se considera un campo escalar en las proximidades del horizonte de una métrica de Schwarzschild mediante un método algebraico y se estudia la relevancia del álgebra de Virasoro y la invariancia de escala en relación con las extensiones autoadjuntas. Las extensiones autoadjuntas del operador de Klein-Gordon en distintos tipos de agujeros negros son también consideradas en [71, 94].

La dispersión de partículas bosónicas y fermiónicas por agujeros negros de Schwarzschild ha sido calculada en [122] (véanse también los estudios detallados de [110, 64].) Sin embargo, cálculos recientes [86, 87] basados en el comportamiento de las

funciones de onda asociadas a potenciales (18) muestran efectos cuánticos que se manifiestan en una reducción de la sección eficaz de absorción y en la posibilidad de emisión de partículas clásicamente confinadas al interior del horizonte del agujero negro.

Además de su aplicación al cálculo de la entropía de agujeros negros, las singularidades de la forma (18) tienen interés en el estudio de cuerdas cósmicas [124, 81] y en Teoría de Cuerdas [46, 47, 11].

La construcción de una teoría cuántica de la gravedad exige el desarrollo de la Teoría Cuántica de Campos en espacios curvos [22] en el contexto de la cual, como hemos mencionado, las funciones espectrales determinan los contratérminos del lagrangiano necesarios para renormalizar la teoría al orden de 1-loop [125].

Aunque se conoce el comportamiento de los desarrollos asintóticos de las funciones espectrales para el caso de variedades de base suaves, sólo han sido resueltos problemas de Teoría Cuántica de Campos en espacios con singularidades en algunos casos particulares (véanse *e.g.* [31, 62, 8].)

Operadores diferenciales con un potencial singular de la forma (18) se obtienen a partir del estudio del laplaciano en variedades con singularidades cónicas; el parámetro ν que caracteriza la intensidad de la singularidad está, en este caso, relacionado con el ángulo de deficiencia del cono. El desarrollo asintótico del heat-kernel del laplaciano en variedades con singularidades cónicas fue tratado, quizás por primera vez, en [30, 119]. J.J. Cheeger [32] realiza un tratamiento detallado del problema en el que se prueba que la contribución de la singularidad al desarrollo asintótico de la traza del heat-kernel puede calcularse en las proximidades de la singularidad. En [21] se calcula el desarrollo de la traza del heat-kernel para ciertos operadores singulares que incluyen al laplaciano en un cono para la extensión de Friedrichs.

Existen numerosos trabajos en Teoría Cuántica de Campos referidos a variedades con singularidades cónicas. En [34] se estudia la acción efectiva al orden de 1-loop de campos escalares con masa y autointeracción sobre singularidades cónicas. Se han calculado también propiedades del heat-kernel para campos con spines mayores en [88] en conexión con las correcciones cuánticas a la entropía de los agujeros negros.

En [61] se calculan las correcciones a los primeros coeficientes del desarrollo asintótico del heat-kernel del laplaciano para campos de spin $1/2$, $3/2$ y 2 y se obtienen las divergencias ultravioletas cuánticas para la entropía de agujeros negros. Es interesante notar que los resultados no siempre se reducen al caso de una variedad suave cuando se considera el límite en el que el ángulo de deficiencia que define al cono tiende a cero. Se sugiere que esto puede relacionarse con la formulación de [120, 29] en la que el ángulo de deficiencia es una variable cuántica conjugada al área del horizonte.

El heat-kernel en casos especiales de variedades con singularidades cónicas también es tratado en detalle en [48, 60, 63, 19, 45, 51]. Sin embargo, en ninguno de estos casos

se consideran las condiciones de contorno más generales que admite el operador en la singularidad. De este modo, se calculan las contribuciones de la singularidad a los coeficientes del desarrollo asintótico del heat-kernel en los casos en que los exponentes de las potencias de t son las usuales (véase la ecuación (9).)

En [93] E. Mooers estudia las extensiones autoadjuntas del operador laplaciano definido sobre las formas diferenciales de una variedad con una singularidad cónica y encuentra que el desarrollo asintótico de la traza del heat-kernel posee potencias que dependen del ángulo de deficiencia de la variedad. Este resultado coincide con nuestro estudio del operador (2) en el caso $V(x) = 0$. Este es, a nuestro entender, el único trabajo que describe un desarrollo asintótico con potencias dependientes de parámetros externos. Por otra parte, la extensión de la fórmula de Krein que derivamos en la sección V.3 se basa en la formulación planteada en [93].

I.3. Plan de la Tesis

Capítulo II: Extensiones Autoadjuntas

Como hemos mencionado, la posición inusual de los polos de la función- ζ de algunos operadores con coeficientes singulares, dependiente de la intensidad de la singularidad, se manifiesta en virtud de la variedad de condiciones de contorno que hacen autoadjunto al operador. Los operadores simétricos no son, en general, autoadjuntos; pero existe la posibilidad, determinada por el valor de sus índices de deficiencia, de extender el dominio de un operador simétrico de modo de obtener un operador autoadjunto.

En la sección II.2 expondremos las ideas básicas necesarias para la construcción de las extensiones autoadjuntas de un operador cerrado y simétrico. En primer lugar, daremos las definiciones y teoremas básicos de la teoría de los índices de deficiencia de von Neumann. Estos conceptos serán ilustrados mediante el ejemplo sencillo del operador impulso $P = -i\partial_x$.

Existe una perspectiva que permite comprender algunas propiedades topológicas del conjunto de extensiones autoadjuntas que será presentada brevemente en la sección II.3. En este contexto se definirán las subvariedades de Cayley, relacionadas con la topología no trivial del conjunto de extensiones autoadjuntas, con la existencia de estados de borde y con la ausencia de una cota inferior común a todas las energías de los estados fundamentales de las distintas extensiones autoadjuntas.

Capítulo III: Ruptura Espontánea de SUSY en Mecánica Cuántica

En este capítulo ilustraremos la importancia de considerar el conjunto de todas las condiciones de contorno que hacen autoadjunto a un operador a partir de un ejemplo en

el contexto de la mecánica cuántica supersimétrica unidimensional. La variedad de condiciones de contorno admisibles en este caso provee un mecanismo de ruptura de la supersimetría. Esto es posible pues, aunque el operador hamiltoniano conmuta “formalmente” con las supercargas, existen condiciones de contorno que no preservan la supersimetría. Este es uno de los resultados originales de esta tesis.

En particular mostraremos que en el conjunto infinito de extensiones autoadjuntas del hamiltoniano existen solamente dos, definidas por condiciones de contorno invariantes de escala, para las cuales puede realizarse el álgebra de supersimetría $N=2$. En estos casos, el espectro del hamiltoniano es doblemente degenerado. Sin embargo, para una de estas extensiones la supersimetría es manifiesta y existe un estado fundamental con energía nula, en tanto que para la otra existe una ruptura espontánea de la supersimetría y la energía del estado fundamental es estrictamente positiva.

Para las restantes extensiones autoadjuntas los dominios de las supercargas no coinciden, de modo que cada una de ellas, junto con el hamiltoniano, constituye una realización del álgebra de supersimetría $N=1$.

Capítulo IV: Funciones Espectrales

En la sección IV.1 introduciremos los espacios de Sobolev y los operadores pseudo-diferenciales o de Calderón-Zygmund. En este contexto definiremos, en la sección IV.2, las funciones espectrales que se obtienen de las trazas de los operadores e^{-tA} , $(A - \lambda)^{-1}$ y A^{-s} , siendo A un operador diferencial⁷. Asimismo, estableceremos las relaciones que las vinculan y las consecuentes relaciones entre sus desarrollos asintóticos.

Mostraremos que la traza de la resolvente $\text{Tr} (A - \lambda)^{-1}$ es la transformada de Laplace de la traza del heat-kernel $\text{Tr} e^{-tA}$ y que la función $\zeta_A(s) := \text{Tr} A^{-s}$ se obtiene a partir de la transformada de Mellin de la traza del heat-kernel. Esto implica ciertas relaciones entre sus comportamientos asintóticos. Veremos que, efectivamente, el comportamiento a pequeños valores de t de la traza del heat-kernel determina el comportamiento a grandes valores de $|\lambda|$ de la traza de la resolvente y la posición de los polos de la función $\zeta_A(s)$ en el plano complejo s .

En la sección IV.3 daremos una derivación del resultado (1) basada en la construcción del desarrollo asintótico del núcleo de la resolvente $(A - \lambda)^{-1}$ para grandes valores de $|\lambda|$. Esta construcción, por su parte, se realiza a partir de una aproximación, para grandes valores de $|\lambda|$, del símbolo de la resolvente.

Capítulo V: Operadores Singulares

El capítulo V está dedicado a la descripción de un tipo de operadores de Schrödinger singulares cuyas funciones- ζ tienen una estructura de polos que se aparta del resultado

⁷Recuérdese que el operador e^{-tA} se define solamente para operadores positivos.

(1). Estudiaremos, en particular, operadores diferenciales A de la forma:

$$A = -\partial_x^2 + \frac{\nu^2 - 1/4}{x^2} + V(x), \quad (53)$$

donde x pertenece a \mathbb{R}^+ o al intervalo $[0, 1]$ y $V(x)$ es una función analítica. El valor del parámetro $\nu \in (0, 1)$, de manera que el operador A admite un conjunto infinito de extensiones autoadjuntas caracterizado por un parámetro real θ .

Debido a la presencia de un coeficiente singular en el operador, los polos de la función- ζ no están ubicados en semienteros negativos⁸, como indicaría la ecuación (1), sino que sus posiciones dependen del parámetro ν . En efecto, el procedimiento descrito en la sección IV.3 para demostrar (1) no puede ser aplicado a un operador con coeficientes singulares. Por un lado, las cotas que permiten obtener un desarrollo asintótico para el núcleo de la resolvente a partir de una aproximación de su símbolo pierden validez en presencia singularidades. Por otra parte, en el caso regular, los coeficientes del desarrollo asintótico de la traza de la resolvente se expresan como integrales sobre la variedad de base y sobre su borde de combinaciones lineales de potencias del potencial y de sus derivadas⁹; ciertamente, esto pierde sentido si el potencial contiene un término no integrable de la forma x^{-2} .

Para describir entonces la estructura de polos de la función- ζ del operador singular (53) tendremos en cuenta la existencia de dos extensiones autoadjuntas caracterizadas por condiciones de contorno invariantes de escala. Los polos de las funciones- ζ de estas dos extensiones autoadjuntas sí están dados por la ecuación (1).

En la sección V.2 presentaremos la fórmula de Krein que relaciona las resolventes de distintas extensiones autoadjuntas de operadores regulares. A continuación construiremos, en la sección V.3, una fórmula similar que relaciona las resolventes correspondientes a distintas extensiones autoadjuntas del operador con coeficientes singulares (53). A partir de esta relación expresaremos, en el Teorema V.3.11, la resolvente de una extensión autoadjunta arbitraria de A como combinación lineal de las resolventes de las dos extensiones caracterizadas por condiciones de contorno invariantes de escala. De esta manera, identificamos en los coeficientes de esta combinación el origen de los exponentes dependientes de ν en el desarrollo en potencias de λ de la resolvente.

Finalmente, en la sección V.4, utilizamos el Teorema V.3.11 para deducir el Teorema V.4.1 que permite calcular explícitamente el desarrollo asintótico de la resolvente del operador (53). De acuerdo con la relación entre el desarrollo asintótico de la resolvente y los polos de la función- ζ demostrada en la sección IV.2, deducimos que la posición de los polos de la función- ζ del operador de Schrödinger singular depende del parámetro ν . En

⁸Téngase en cuenta que, para un operador de Schrödinger unidimensional, $d = 2$ y $m = 1$.

⁹Estos coeficientes son, a su vez, proporcionales a los coeficientes del desarrollo asintótico de la traza del heat-kernel que están dados por las expresiones (10).

efecto, si $0 < \nu < 1$, se prueba que la función- ζ del operador (53) tiene una sucesión de polos en los puntos del plano complejo dados por,

$$s_{N,n} = -\nu N - \frac{n}{2} \quad N = 1, 2, \dots \quad n = 0, 1, \dots \quad (54)$$

cuyos residuos son proporcionales a θ^N , siendo θ el parámetro que caracteriza la extensión autoadjunta. La función- ζ posee, además, una segunda serie de polos en los puntos $1/2 - n$ con $n = 0, 1, 2, \dots$, como indica el resultado (1).

Finalizamos el capítulo V con algunas consideraciones acerca del caso compacto para el que $x \in [0, 1]$. Aunque no se pudo obtener una forma explícita de los polos de la función- ζ para este caso, las conclusiones de la sección V.4.2 serán útiles para verificar los resultados del caso particular estudiado en la sección VI.2.

Capítulo VI: Ejemplos

En este capítulo resolveremos dos ejemplos particulares de operadores diferenciales con coeficientes singulares para los que el resultado (1) pierde validez. En ambos casos, el estudio de las funciones espectrales se basa en la obtención de una resolución espectral explícita del operador. En las Secciones VI.1 y VI.2 estudiaremos operadores de Schrödinger (2) con un término singular proporcional a x^{-2} sobre las variedades de base \mathbb{R}^+ y $[0, 1]$, respectivamente. Estos ejemplos ilustran los resultados obtenidos en las Secciones V.3 y V.4.

■ Sección VI.1: Un operador de Schrödinger en una variedad de base no compacta

En la sección VI.1.1 estudiaremos el operador,

$$A = -\partial_x^2 + \frac{\nu^2 - 1/4}{x^2} + x^2 \quad (55)$$

definido sobre un subconjunto apropiado de $L_2(\mathbb{R}^+)$. El parámetro $\nu \in (0, 1)$, de modo que el operador diferencial (55) admite una familia de extensiones autoadjuntas.

Como la teoría de von Neumann para las extensiones autoadjuntas se aplica a operadores simétricos y cerrados, definiremos primeramente un dominio de definición sobre el cual (55) sea simétrico. Luego calcularemos la clausura del operador y posteriormente caracterizaremos el dominio y la acción del operador adjunto. Resolviendo finalmente la ecuación de autovalores del operador adjunto determinaremos los subespacios de deficiencia del operador que describen sus extensiones autoadjuntas.

A partir de los resultados obtenidos en la sección VI.1.1 y utilizando la teoría de von Neumann de los índices de deficiencia, calcularemos en la sección VI.1.2 las extensiones autoadjuntas del operador (55). De esta manera, caracterizaremos las condiciones de contorno que admite el problema y determinaremos el espectro de cada extensión autoadjunta. En este punto, reconoceremos la existencia de dos extensiones autoadjuntas particulares que, como se verá, corresponden a las condiciones de contorno invariantes de escala a las que ya nos hemos referido. Por último, estudiaremos el límite regular $\nu \rightarrow 1/2$, esto es, en ausencia del término singular en (55); verificaremos, en relación con la sección II.3.1, la existencia de estados de borde para las extensiones autoadjuntas cercanas a la subvariedad de Cayley \mathcal{C}_- .

En la sección VI.1.3 construiremos una representación integral de la función $\zeta(s)$ del operador (55) que permitirá obtener su estructura de singularidades. Demostraremos que la función- ζ presenta un polo simple en $s = 1$ con residuo igual a $1/4$. Este polo no obedece al resultado (1) debido a que la variedad de base no es compacta. En efecto, en la sección X.1 del Apéndice mostraremos un argumento que indica la posición del primer polo de la función $\zeta(s)$ de un operador de Schrödinger en una variedad de base no compacta con un potencial homogéneo; este resultado predice la existencia de un polo en $s = 1$ si el operador está definido sobre \mathbb{R}^+ y el potencial es homogéneo de grado 2 en el infinito. En consecuencia, no atribuiremos la existencia de este polo que contradice el resultado (1) a la singularidad del operador sino a la no compacidad de la variedad de base.

La función $\zeta(s)$ posee, además, otras singularidades ubicadas sobre el eje real que consisten en una sucesión $s_{N,n} = -\nu N - 2n$, con $N = 1, 2, \dots$ y $n = 0, 1, \dots$. Estos polos simples confirman el resultado (54) calculado en la sección V.4 para un potencial arbitrario $V(x)$ considerando que, en el caso $V(x) = x^2$, los residuos de los polos dados en (54) son no nulos sólo si n es un múltiplo de 4.

En la sección VI.1.4 estudiaremos la relación entre la estructura de polos de la función $\zeta(s)$ y el comportamiento asintótico de los autovalores mencionada al finalizar la sección IV.2. Verificaremos, a partir de un estudio asintótico de la ecuación de autovalores, la estructura de polos encontrada en la sección VI.1.3 mediante la representación integral de la función $\zeta(s)$.

Finalizaremos el estudio del operador (55) considerando algunos casos particulares; en la sección VI.1.5 analizaremos las funciones $\zeta(s)$ de las extensiones correspondientes a condiciones de contorno invariantes de escala y al límite regular $\nu \rightarrow 1/2$ de (55) que corresponde al oscilador armónico en la semirrecta.

- **Sección VI.2: Un operador de Schrödinger en una variedad de base compacta**

En la sección VI.2.1 estudiaremos las extensiones autoadjuntas del operador singular,

$$A = -\partial_x^2 + \frac{\nu^2 - 1/4}{x^2} \quad (56)$$

definido sobre un subconjunto apropiado de $L_2([0, 1])$. Nuevamente, el parámetro $\nu \in (0, 1)$ de modo que el operador (56) admite un conjunto infinito de extensiones autoadjuntas.

En lugar de utilizar la teoría de von Neumann, como en la sección VI.1, para determinar las extensiones autoadjuntas del operador (56), describiremos las condiciones de contorno en el origen en términos de los mapeos suryectivos definidos en el Teorema (V.2.1). Estos mapeos definen una forma simpléctica respecto de la cual los subespacios lagrangianos están identificados con las extensiones autoadjuntas. En el extremo $x = 1$ impondremos condiciones de contorno de Dirichlet, de manera que las extensiones autoadjuntas de (56) resultan caracterizadas por un parámetro real relacionado con el comportamiento de las funciones en el origen; el espectro depende, consecuentemente, del valor de este parámetro.

Al igual que en el ejemplo estudiado en la sección VI.1, los espectros de las extensiones autoadjuntas del operador (56) no poseen una cota inferior uniforme, de modo que, aunque el espectro de cada extensión está acotado inferiormente, todo número real negativo corresponde al autovalor del estado fundamental de alguna extensión autoadjunta.

En la sección VI.2.2 construiremos explícitamente las resolventes de las extensiones autoadjuntas del operador (56). Para ello, reconoceremos primeramente la existencia de dos extensiones autoadjuntas definidas por condiciones de contorno invariantes de escala, cuyas resolventes presentan el desarrollo asintótico usual. Posteriormente, expresaremos la resolvente de una extensión autoadjunta arbitraria como combinación lineal de las resolventes de estas dos extensiones particulares. De esta manera, reconoceremos en los coeficientes de la combinación lineal el origen de las potencias con exponentes dependientes de ν en el desarrollo asintótico de la resolvente.

A partir de las relaciones entre las funciones espectrales presentada en la sección IV.2, en la sección VI.2.3 utilizaremos el desarrollo asintótico de la traza de la resolvente para demostrar que los polos de la función- ζ y los exponentes de las potencias de t en el desarrollo asintótico del heat-kernel dependen del parámetro ν . En efecto, los resultados de la sección VI.2.3 indican que la función $\zeta(s)$ posee polos en los puntos $s_k = -\nu k$ con $k = 1, 2, \dots$. Existe también una sucesión de polos en los puntos $s_n = 1/2 - n$, con $n = 0, 1, \dots$ que obedece al resultado (1).

Como hemos mencionado, la presencia de polos de la función- ζ en posiciones dependientes de ν se manifiesta en aquellas condiciones de contorno que no son invariantes ante una transformación de escala. Finalizamos la sección VI.2.3 verificando con un análisis dimensional la consistencia del resultado obtenido para la dependencia de los residuos de la función- ζ con el parámetro que caracteriza las extensiones autoadjuntas.

Por último, como el comportamiento de las funciones en el origen es esencialmente distinto cuando $\nu = 0$, estudiaremos este caso por separado en la sección VI.2.4. A pesar de la existencia de un conjunto infinito de extensiones autoadjuntas, la construcción explícita de la resolvente y de su desarrollo asintótico muestra que los polos de la función- ζ obedecen, en este caso, al resultado (1).

Capítulo VI: Operadores de Dirac

En este capítulo estudiaremos dos operadores de Dirac con coeficientes singulares para los que el resultado (1) también pierde validez.

En la sección VII.1 estudiaremos un operador de Dirac (3) sobre la variedad de base $[0, 1]$ cuyo campo de gauge posee un término singular proporcional a x^{-1} .

En la sección VII.2 consideraremos el hamiltoniano de una partícula cargada, sin masa y con spin en 2+1 dimensiones en presencia de un campo magnético homogéneo y de un flujo magnético de Aharonov-Bohm.

■ Sección VII.1: Un operador de primer orden

En la sección VII.1.1 estudiaremos las extensiones autoadjuntas del operador de Dirac,

$$D = \begin{pmatrix} 0 & -\partial_x + \frac{\alpha}{x} \\ \partial_x + \frac{\alpha}{x} & 0 \end{pmatrix}, \quad (57)$$

definido sobre un subconjunto de $\mathbb{C}^2 \otimes \mathbf{L}_2([0, 1])$ sobre el cual D sea simétrico. Estudiaremos el caso $|\alpha| < 1/2$ para el que el operador (57) admite un conjunto infinito de extensiones autoadjuntas.

Primeramente estudiaremos el comportamiento de las funciones del dominio del operador adjunto D^\dagger en proximidades de la singularidad $x = 0$. Esto permitirá definir los mapeos suryectivos referidos en el Teorema (V.2.1) que definen una forma simpléctica respecto de la cual los subespacios lagrangianos están identificados con las extensiones autoadjuntas de D . En el extremo $x = 1$ impondremos una condición tipo Dirichlet para una de las componentes de las funciones de $\mathbb{C}^2 \otimes \mathbf{L}_2([0, 1])$.

Posteriormente, determinaremos el espectro de cada una de las extensiones autoadjuntas. Veremos que estos espectros sólo son simétricos respecto del origen para las extensiones autoadjuntas caracterizadas por una condición de contorno invariante de escala.

En la sección VII.1.2 calcularemos las resolventes de las extensiones autoadjuntas del operador (57). Para ello, expresaremos la resolvente de una extensión arbitraria como una combinación lineal de las resolventes de las extensiones caracterizadas por condiciones de contorno invariantes de escala, que admiten el desarrollo asintótico usual. Como se verá, el comportamiento asintótico de los autovalores λ_n de las extensiones del operador (57) satisface $\lambda_n \sim n$. Por consiguiente, no existe la traza de las resolventes que son operadores de Hilbert-Schmidt. En consecuencia, calcularemos las trazas de los cuadrados de las resolventes.

Mostraremos entonces que la traza del cuadrado de la resolvente de una extensión autoadjunta caracterizada por una condición de contorno que no es invariante de escala admite un desarrollo asintótico en potencias de λ cuyos exponentes dependen del parámetro α . El origen de estas potencias reside en los coeficientes de la combinación lineal que expresa esta resolvente en términos de las resolventes de las extensiones correspondientes a condiciones de contorno invariantes de escala.

En la sección VII.1.3 calculamos la estructura de polos de las funciones espectrales $\zeta(s)$ y $\eta(s)$ definidas en la sección IV.2. Comenzaremos estudiando los polos de una función- ζ parcial, que se calcula teniendo en cuenta sólo las contribuciones de los autovalores positivos. Como veremos, la función $\zeta(s)$ de una extensión autoadjunta correspondiente a una condición de contorno que no es invariante de escala presenta polos en posiciones dependientes del parámetro α dadas por $s_k = -2|\alpha|k$ con $k = 1, 2, \dots$. Cabe señalar que, a diferencia de los casos considerados en las secciones anteriores, la función $\zeta(s)$ completa del operador de primer orden (57) no posee otras singularidades. Por consiguiente, las funciones $\zeta(s)$ de las extensiones definidas por condiciones de contorno invariantes de escala son funciones enteras.

Asimismo, las funciones $\eta(s)$ de estas extensiones se anulan, en virtud de la simetría de sus espectros. Sin embargo, la función $\eta(s)$ de una extensión correspondiente a una condición de contorno que no es invariante de escala no se anula trivialmente y posee polos en los puntos $s_k = -2|\alpha|(2k + 1)$ con $k = 0, 1, \dots$

Finalizaremos la sección VII.1.3 con una discusión acerca del comportamiento de las funciones espectrales ante una transformación de escala que nos permitirá verificar la dependencia de los residuos de los polos de la función $\zeta(s)$ con la extensión autoadjunta considerada. Señalaremos además que la estructura de polos de la función- ζ se reduce a la indicada por el resultado (1) en el caso $\alpha = 0$.

■ **Sección VII.2: El problema de Aharonov-Bohm**

En esta sección estudiaremos el hamiltoniano de Dirac de una partícula con spin, de masa nula y carga e , en $1 + 2$ dimensiones, en presencia de un campo magnético homogéneo y de un flujo magnético singular de Aharonov-Bohm. El hamiltoniano de Dirac correspondiente es un operador del tipo (3) en el que el campo de gauge \mathcal{A} posee un término singular en el origen $r = 0$ de la forma $\Phi/2\pi r$, siendo Φ el flujo magnético singular. Demostraremos, al finalizar la sección VII.2, que el desarrollo asintótico de la traza del heat-kernel ¹⁰ e^{-tD^2} correspondiente al cuadrado del hamiltoniano de Dirac D presenta potencias de t cuyos exponentes dependen del flujo singular Φ .

En la sección VII.2.1 calculamos las extensiones autoadjuntas del hamiltoniano D . Como el campo de gauge es invariante ante rotaciones, será suficiente considerar la restricción D_l del hamiltoniano a los subespacios de momento angular caracterizados por el Casimir $l + 1/2$, con $l \in \mathbb{Z}$. Mostraremos que sólo la restricción D_0 admite un conjunto infinito de extensiones autoadjuntas en tanto que las restantes son esencialmente autoadjuntas.

Los autovalores de los operadores D_l , con $l > 0$ están dados por $\lambda_n = \pm 2\sqrt{n}$, por lo que las correspondientes funciones $\zeta_l(s)$ son el producto de una función entera por la función $\zeta_R(s/2)$ de Riemann, que posee un polo en $s = 2$.

Por su parte, los autovalores de los operadores D_l , con $l < 0$ están dados por $\lambda_n = \pm 2\sqrt{n + |l| + e\Phi/2\pi}$ por lo que las correspondientes funciones $\zeta_l(s)$ son el producto de una función entera de s por la función $\zeta_H(s/2, |l| + e\Phi/2\pi)$ de Hurwitz, que posee un polo simple en $s = 2$.

El espectro correspondiente a la restricción D_0 está dado por las soluciones de una ecuación trascendente. A diferencia del caso $l \neq 0$ el espectro no es simétrico con respecto al origen, excepto para las dos extensiones autoadjuntas definidas por condiciones de contorno invariantes de escala.

En la sección VII.2.2 calcularemos la estructura de polos de la función $\zeta^\beta(s)$ correspondiente a la extensión autoadjunta D^β de la restricción D_0 del hamiltoniano de Dirac D al subespacio caracterizado por $l = 0$. Como veremos, esta función $\zeta^\beta(s)$ tiene un polo simple en $s = 1$. Aunque este polo no es previsto por la ecuación (1), no atribuimos esta discrepancia al término singular en el operador sino a la no compacidad de la variedad de base.

¹⁰Como la variedad de base no es compacta, deberemos abstraer cantidades divergentes. Para ello calculamos el desarrollo asintótico de la traza del operador $e^{-tD^2} - e^{-t\bar{D}^2}$, siendo \bar{D} el hamiltoniano en el caso $\Phi = 0$, esto es, en ausencia del flujo singular.

Los polos restantes de la función $\zeta_\beta(s)$ están ubicados en puntos dependientes del flujo magnético Φ ,

$$s_{N,n} = -N \left(1 - \frac{e\Phi}{\pi} \right) - 2n, \quad N = 1, 2, 3, \dots \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (58)$$

Como hemos mencionado, debido a la presencia de un campo de gauge singular, la estructura de polos de la función $\zeta(s)$ depende del flujo singular Φ .

Finalizaremos la sección VII.2 y con ella el capítulo VII, calculando el desarrollo asintótico de la traza del heat-kernel $e^{-tD^2} - e^{-t\bar{D}^2}$, siendo \bar{D} el hamiltoniano de Dirac correspondiente al caso $\Phi = 0$. Mostraremos que este desarrollo presenta potencias de t cuyos exponentes dependen del flujo singular Φ (véase la expresión (716).)

Capítulos VIII y IX: Conclusiones y Problemas de interés

En el capítulo VIII resumiremos las principales conclusiones de esta Tesis en tanto que algunos problemas que merecen consideración a partir de los resultados que hemos obtenido serán discutidos en el capítulo IX.

En la sección IX.1 describiremos una perspectiva comúnmente adoptada en el estudio del desarrollo asintótico del heat-kernel. Se ha demostrado [66] que los coeficientes del desarrollo asintótico en potencias de t que admite el heat-kernel correspondiente a un operador regular pueden escribirse como integrales sobre la variedad de base M , o sobre su borde ∂M , de ciertas cantidades locales (véanse las ecuaciones (10) y (11-17).) Estas cantidades son combinaciones lineales de los invariantes geométricos del problema y los coeficientes de estas combinaciones lineales son, bajo las mismas hipótesis que las del resultado (1), constantes universales independientes del problema en consideración. Por ello, ha sido motivo de intenso estudio la determinación de estos coeficientes universales.

Determinaremos luego, a partir de argumentos dimensionales, los primeros términos del desarrollo asintótico del heat-kernel del operador (53) y verificaremos algunos de los resultados obtenidos en las secciones anteriores. Consideraremos luego la posibilidad de extender el resultado acerca de la universalidad de los coeficientes del desarrollo asintótico del heat-kernel al caso de este operador singular.

En la sección IX.2, por su parte, analizaremos la posibilidad de generalizar nuestros resultados a operadores diferenciales con otro tipo de singularidad. En ese sentido, estudiaremos un operador de Schrödinger en una dimensión cuyo potencial posee un término singular proporcional a x^{-1} . Como en este caso el orden de la singularidad no coincide con el orden del operador diferencial, no pueden aplicarse directamente las técnicas utilizadas en el caso del operador (53). No obstante, el ejemplo que trataremos admite una solución explícita y permite observar que la estructura de polos de la correspondiente función- ζ es de una naturaleza distinta.

En efecto, aunque el operador admite una familia de extensiones autoadjuntas, mostraremos que, aún imponiendo condiciones de contorno del tipo Dirichlet, *i.e.*, invariantes de escala, los polos de la función $\zeta(s)$ no obedecen el comportamiento (1). La función $\zeta(s)$ posee un polo en $s = 1/2$ con residuo $1/2\pi$ en coincidencia con el caso regular.

Sin embargo, demostraremos también la existencia de un polo doble en $s = -1/2$. Verificaremos posteriormente que la presencia de este polo doble corresponde a un comportamiento asintótico de los autovalores dado por $\lambda_n \sim \log n/n$. Como hemos mencionado, esto implica la presencia de términos de la forma $\log t$ en el desarrollo asintótico del heat-kernel a pequeños valores de t .

Los resultados originales contenidos en esta Tesis se encuentran en los trabajos:

- H. Falomir y P.A.G. Pisani, “Hamiltonian self-adjoint extensions for (2+1)-dimensional Dirac particles,” *J. Phys. A: Mathematical and General* **34**, 1 (2001).
- H. Falomir, P.A.G. Pisani y A. Wipf, “Pole structure of the Hamiltonian ζ -function for a singular potential,” *J. Phys. A: Mathematical and General* **35**, (2002) 5427.
- H. Falomir, M.A. Muschietti, P.A.G. Pisani y R. Seeley, “Unusual poles of the ζ -functions for some regular singular differential operators,” *J. Phys. A: Mathematical and General* **36**, 9991 (2003).
- H. Falomir, M.A. Muschietti y P.A.G. Pisani, “On the resolvent and spectral functions of a second order differential operator with a regular singularity,” aceptado para su publicación en *Journal of Math. Phys.*; arXiv:math-ph/0404034.
- H. Falomir y P.A.G. Pisani, “Self-adjoint extensions and SUSY breaking in Supersymmetric Quantum Mechanics,”; enviado para su publicación al *J. Phys. A* (2004).

Parte II

Extensiones Autoadjuntas

*In mathematics you don't understand things.
You just get used to them.
(John von Neumann.)*

II.1. Introducción

En la física clásica, las condiciones de contorno de un problema sobre una variedad con borde están generalmente determinadas por consideraciones fenomenológicas. En ocasiones, estas condiciones de contorno son locales. Encontramos, *e.g.*, condiciones tipo Dirichlet para el potencial electrostático en una región limitada por conductores, condiciones tipo Neumann en el movimiento de una cuerda finita con extremos libres o tipo Robin en la emisión de calor de un cuerpo sumergido en un medio de temperatura constante. No obstante, también se presenta la necesidad de estudiar condiciones de contorno no locales, como las condiciones de contorno periódicas en el caso de problemas sobre una variedad con topología no trivial. Este tipo de condiciones de contorno son relevantes en teorías de gauge, gravedad cuántica y teoría de cuerdas, en las que deben sumarse las contribuciones de distintas topologías de la variedad de base.

En mecánica cuántica las condiciones de contorno apropiadas están relacionadas con la conservación de la probabilidad, garantizada por la unitariedad del operador evolución temporal $\mathcal{U}(t)$. Las traslaciones temporales infinitesimales están generadas por el operador hamiltoniano H , de modo que el operador $\mathcal{U}(t) = e^{itH}$ está bien definido y representa un grupo unitario dependiente de un parámetro y fuertemente continuo¹¹ si el hamiltoniano es autoadjunto.

En general, no es difícil determinar un dominio de definición sobre el cual el hamiltoniano sea simétrico pero puede ser necesario extender este dominio para que el hamiltoniano sea también autoadjunto. Esta extensión requiere un análisis cuidadoso que determine las condiciones de contorno apropiadas del problema. Por otra parte, existen operadores simétricos que admiten distintas extensiones de su dominio que resultan en sendos operadores autoadjuntos. Este conjunto de extensiones autoadjuntas determina una variedad de condiciones de contorno admisibles que corresponden a sistemas físicos distintos y caracterizan el efecto de las propiedades microscópicas del borde.

¹¹La función $U(t)$ con valores en el espacio de operadores lineales sobre un espacio de Hilbert \mathcal{H} es un grupo de un parámetro fuertemente continuo si $\mathcal{U}(t)\mathcal{U}(s) = \mathcal{U}(t+s)$ y $\forall \phi \in \mathcal{H}$, $\mathcal{U}(t)\phi \rightarrow \mathcal{U}(0)\phi$ si $t \rightarrow 0$ (véase el Teorema de Stone [103].)

El presente capítulo está dedicado al estudio de las extensiones autoadjuntas de operadores simétricos. En el transcurso de este estudio distinguiremos operadores simétricos de operadores autoadjuntos y mostraremos, en particular, que existen operadores simétricos que no son autoadjuntos. En estos casos, extenderemos el dominio de definición de modo de obtener operadores autoadjuntos. Veremos el modo de determinar en qué casos esta extensión es posible y, si el operador admite más de una extensión autoadjunta, estudiaremos cómo caracterizarlas. Estos planteamientos son resueltos por la teoría de von Neumann de los índices de deficiencia, que describiremos a continuación.

En la sección II.3 daremos las propiedades topológicas del conjunto de extensiones autoadjuntas que admite un operador simétrico y finalizaremos este capítulo considerando, en la sección III, un problema en mecánica cuántica supersimétrica con un superpotencial singular en el que la presencia de extensiones autoadjuntas está relacionada con la ruptura espontánea de la supersimetría.

II.2. Teoría de von Neumann

Dado un operador A definido en un subespacio denso $\mathcal{D}(A)$ de un espacio de Hilbert \mathcal{H} dotado de un producto interno (\cdot, \cdot) , decimos que A es **simétrico** si todo par de elementos $\phi, \psi \in \mathcal{D}(A)$ satisface,

$$(\psi, A\phi) = (A\psi, \phi). \quad (59)$$

En el caso de operadores diferenciales, la condición (59) suele verificarse mediante una integración por partes; la anulación de los términos de borde que surgen de esta integración imponen restricciones sobre las condiciones de contorno. No obstante, como hemos mencionado, las condiciones de contorno apropiadas no sólo deben asegurar que el operador sea simétrico en su dominio de definición sino también autoadjunto.

Consideremos, por ejemplo, la propiedad (59) para el caso del operador impulso de una partícula en un segmento,

$$P = -i\partial_x. \quad (60)$$

Si definimos su dominio $\mathcal{D}(P)$ como el conjunto denso $C_0^\infty((0, 1))$ de las funciones suaves del intervalo $[0, 1] \subset \mathbb{R}$ cuyo soporte no contiene a los extremos entonces el operador P resulta simétrico con respecto al producto interno usual en $L_2([0, 1])$:

$$\begin{aligned} (\psi, P\phi) &= \int_0^1 \psi^*(x)(-i\phi'(x)) dx = \\ &= -i\psi^*(x)\phi(x)|_{x=0}^1 + \int_0^1 (-i\psi'(x))^* \phi(x) dx = (P\psi, \phi). \end{aligned} \quad (61)$$

En efecto, los términos de borde se anulan en la ecuación anterior en virtud de la adecuada elección del dominio de definición $\mathcal{D}(P) = C_0^\infty((0, 1))$.

La definición (59) tiene sentido si tanto ψ como ϕ pertenecen al dominio de definición de A . No obstante, podemos considerar el producto,

$$(\psi, A\phi), \quad (62)$$

aún para aquellos vectores ψ que no pertenezcan al dominio de definición de A , siempre que $\phi \in \mathcal{D}(A)$. Nuestro objetivo es estudiar el subconjunto $\mathcal{D}(A^\dagger)$ de \mathcal{H} constituido por aquellos vectores ψ para los cuales la cantidad (62) es una funcional lineal y continua de ϕ . Esto es,

$$\mathcal{D}(A^\dagger) := \{\psi \in \mathcal{H} : \exists K > 0, \forall \phi \in \mathcal{D}(A), |(\psi, A\phi)| \leq K\|\phi\|\}, \quad (63)$$

donde $\|\cdot\| = \sqrt{(\cdot, \cdot)}$. La desigualdad en (63) indica que la cantidad $(\psi, A\phi)$ tiende a cero si la norma de ϕ lo hace o que $(\psi, A\phi)$ es una funcional lineal acotada sobre el conjunto $\phi \in \mathcal{D}(A) : \|\phi\| = 1$, lo que garantiza su continuidad en ϕ .

Esta definición es relevante cuando tratamos con operadores no acotados pues si el operador A es acotado existe $\|A\| := \sup_{\mathcal{D}(A)} \{\|A\phi\|/\|\phi\|\}$ y se verifica que $\|A\phi\| \leq \|A\| \cdot \|\phi\|$ para todo $\phi \in \mathcal{D}(A)$. Por consiguiente, en virtud de la desigualdad de Cauchy-Schwartz, $|(\psi, A\phi)| \leq \|\psi\| \cdot \|A\phi\| \leq \|\psi\| \cdot \|A\| \cdot \|\phi\|$ y, en consecuencia, $\mathcal{D}(A^\dagger) = \mathcal{H}$. En tanto que, si el operador A no es acotado, $\|A\phi\|$ no está acotada por una cantidad proporcional a $\|\phi\|$ y la desigualdad en (63) impone restricciones que no se satisfacen para todo $\psi \in \mathcal{H}$.

No obstante, debemos notar que si el operador A es simétrico entonces, utilizando nuevamente la desigualdad de Cauchy Schwartz, vemos que $|(\psi, A\phi)| = |(A\psi, \phi)| \leq \|A\psi\| \cdot \|\phi\|$ que implica,

$$\mathcal{D}(A) \subset \mathcal{D}(A^\dagger), \quad (64)$$

que es también un subconjunto denso de \mathcal{H} . El **operador adjunto** A^\dagger se define sobre el conjunto (63) que, por esta razón, hemos designado $\mathcal{D}(A^\dagger)$.

Para definir la acción del operador adjunto A^\dagger sobre los vectores de $\mathcal{D}(A^\dagger)$, notemos que $\forall \psi \in \mathcal{D}(A^\dagger)$, existe, en virtud del Lema de representación de Riesz¹², un vector $\tilde{\psi}$ en \mathcal{H} que representa la funcional lineal y continua $(\psi, A\phi)$, esto es,

$$(\psi, A\phi) = (\tilde{\psi}, \phi). \quad (65)$$

Este vector es único puesto que $\mathcal{D}(A)$ es denso en \mathcal{H} . Definimos entonces la acción de A^\dagger sobre ψ como,

$$A^\dagger\psi := \tilde{\psi}. \quad (66)$$

El operador A es **autoadjunto** si $A = A^\dagger$, lo que requiere que $\mathcal{D}(A) = \mathcal{D}(A^\dagger)$. La ecuación (64) muestra entonces que el operador simétrico A no es autoadjunto toda vez

¹²El Lema de Riesz [102] indica también que si la funcional $(\psi, A\phi)$ está acotada, entonces su norma, esto es, el máximo de la funcional en el conjunto $\phi \in \mathcal{D}(A) : \|\phi\| = 1$ coincide con $\|\tilde{\psi}\|$.

que existan vectores $\psi \in \mathcal{H} - \mathcal{D}(A)$ para los que la funcional $(\psi, A\phi)$ sea continua para todo $\phi \in \mathcal{D}(A)$.

Podemos en este punto explicar el origen de la expresión **extensiones autoadjuntas**. Es inmediato ver, a partir de la definición (63), que si definimos una extensión simétrica de un operador entonces el dominio del operador adjunto se reduce. En efecto, si dos operadores simétricos satisfacen $A \subset \tilde{A}$, *i.e.*, $\mathcal{D}(A) \subset \mathcal{D}(\tilde{A})$ y $A = \tilde{A}|_{\mathcal{D}(A)}$, entonces el conjunto $\mathcal{D}(\tilde{A}^\dagger)$ de vectores $\psi \in \mathcal{H}$ para los que el producto $(\psi, \tilde{A} \cdot)$ es una funcional lineal y continua en $\mathcal{D}(\tilde{A})$ está contenido en el conjunto de vectores para los que el mismo producto es una funcional lineal y continua en $\mathcal{D}(A)$. Por consiguiente,

$$\mathcal{D}(A) \subset \mathcal{D}(\tilde{A}) \subset \mathcal{D}(\tilde{A}^\dagger) \subset \mathcal{D}(A^\dagger). \quad (67)$$

De modo que si extendemos en forma simétrica un operador, reducimos el dominio del operador adjunto. Nuestro objetivo es realizar esta extensión de modo que su dominio de definición coincida con el dominio de su operador adjunto. Obtendremos, entonces, una extensión que no sólo es simétrica sino también autoadjunta. La teoría de los índices de deficiencia de von Neumann establece en qué casos es posible hacer coincidir los dominios de las extensiones simétricas con los dominios de sus operadores adjuntos e indica cómo caracterizar las diversas extensiones posibles.

Consideremos nuevamente el operador simétrico P y determinemos el dominio $\mathcal{D}(P^\dagger)$ de su adjunto, que satisface,

$$\mathcal{D}(P) = \mathcal{C}_0^\infty((0, 1)) \subset \mathcal{D}(P^\dagger) \subset \mathcal{H} = \mathbf{L}_2([0, 1]). \quad (68)$$

El dominio $\mathcal{D}(P^\dagger)$ es el conjunto de funciones $\psi(x) \in \mathbf{L}_2([0, 1])$ para las que la funcional $(\psi, P\phi)$ es continua para todo $\phi \in \mathcal{C}_0^\infty((0, 1))$. Por el Lema de Riesz, esto implica la existencia de una función $\tilde{\psi}(x) \in \mathbf{L}_2([0, 1])$ que satisface,

$$\int_0^1 \psi^*(x) \cdot (-i\partial_x \phi(x)) dx = \int_0^1 \tilde{\psi}^*(x) \cdot \phi(x) dx. \quad (69)$$

La función ψ pertenece entonces al espacio de Sobolev $\mathbf{H}_1((0, 1))$ (véase la definición (IV.1.3)) que coincide con el conjunto de funciones $\psi \in \mathbf{L}_2([0, 1])$ con derivada generalizada $\psi' \in \mathbf{L}_2([0, 1])$ definida por¹³,

$$\int_0^1 \psi'^*(x) \cdot \phi(x) dx = - \int_0^1 \psi^*(x) \cdot \partial_x \phi(x) dx, \quad \forall \phi \in \mathcal{C}_0^\infty((0, 1)). \quad (70)$$

Por consiguiente, $\mathcal{D}(P^\dagger) = \mathbf{H}_1((0, 1))$ y la forma en que opera P^\dagger está dada por,

$$P^\dagger \psi = \tilde{\psi} = -i\psi' \in \mathbf{L}_2([0, 1]), \quad (71)$$

¹³Las funciones con derivada generalizada en $\mathbf{L}_2([0, 1])$ son aquellas que definen una distribución regular cuya derivada débil es otra distribución regular.

donde ψ' es la derivada generalizada o derivada (débil) en el sentido de las distribuciones de la distribución regular ψ .

Vemos, entonces, que el operador $P = -i\partial_x$ definido sobre $\mathcal{C}_0^\infty((0, 1))$ es simétrico pero no es autoadjunto, puesto que $\mathcal{D}(P^\dagger) = \mathbf{H}_1((0, 1))$ no coincide con $\mathcal{D}(P) = \mathcal{C}_0^\infty((0, 1))$ mas lo contiene.

Como hemos señalado, debemos extender el dominio de definición del operador simétrico P , reduciendo así el dominio de su adjunto P^\dagger , de modo de lograr $\mathcal{D}(P) = \mathcal{D}(P^\dagger)$. Como buscamos una extensión simétrica los términos de borde que surgen de la integración por partes que conduce a la propiedad (59) deben permanecer nulos. De todas maneras, veremos que no existe una única extensión autoadjunta del operador P sino un conjunto infinito de ellas que tiene la topología de S^1 .

De acuerdo con la teoría de von Neumann, para caracterizar las extensiones autoadjuntas de un operador A debe resolverse la ecuación de autovalores,

$$A^\dagger\psi = \lambda\psi, \quad (72)$$

con $\psi \in \mathcal{D}(A^\dagger)$ y $\mathbb{I}(\lambda) \neq 0$. Esta expresión exige algunas observaciones. En primer lugar, nótese que si A es un operador diferencial simétrico entonces, como indican las ecuaciones (65) y (66), A^\dagger se obtiene “formalmente” reemplazando las derivadas en A por derivadas generalizadas sobre ψ (véase, e.g., la ecuación (71).) Por otra parte, en los ejemplos que estudiaremos podrá verse que la propiedad (72) implica que $\psi \in \mathcal{C}^\infty \cap \mathbf{L}_2$, de manera que la ecuación (72) equivale a una ecuación diferencial sobre funciones infinitamente derivables cuyas soluciones en \mathcal{H} pertenecen a $\mathcal{D}(A^\dagger)$.

Nótese que un operador simétrico no tiene autovalores complejos puesto que si $\phi \neq 0$ es un autovector de A con autovalor λ entonces,

$$(\phi, A\phi) = (\phi, \lambda\phi) = \lambda(\phi, \phi) = (A\phi, \phi) = (\lambda\phi, \phi) = \lambda^*(\phi, \phi) \rightarrow \lambda \in \mathbb{R}. \quad (73)$$

De modo que la existencia de soluciones de (72) con $\lambda \notin \mathbb{R}$ indica que el conjunto $\mathcal{D}(A^\dagger) - \mathcal{D}(A)$ no es vacío y, por consiguiente, el operador A es simétrico pero no autoadjunto. Como $\dim \text{Ker}(A^\dagger - \lambda)$ es constante en los semiplanos abiertos superior e inferior del plano complejo- λ [104], será suficiente para determinar la existencia y caracterizar las extensiones autoadjuntas de A considerar las soluciones de (72) con $\lambda = \pm i$. Por ello, damos las siguientes definiciones.

Definición II.2.1 *Los espacios de deficiencia \mathcal{K}_\pm son los subespacios característicos del operador A^\dagger de autovalor $\pm i$ respectivamente.*

Esto es,

$$\mathcal{K}_\pm := \text{Ker}(A^\dagger \mp i). \quad (74)$$

Definición II.2.2 *Los índices de deficiencia n_{\pm} son las dimensiones de los subespacios de deficiencia.*

$$n_{\pm} := \dim \mathcal{K}_{\pm}. \quad (75)$$

De acuerdo con la discusión anterior, si alguno de los índices de deficiencia es distinto de cero entonces el operador no es autoadjunto. Presentamos ahora dos Teoremas. El primero de ellos, Teorema II.2.3, establece la recíproca de esta última afirmación, *i.e.*, si los índices de deficiencia son nulos, entonces el operador es autoadjunto. El Teorema siguiente, Teorema II.2.4, permite construir las extensiones autoadjuntas si los índices de deficiencia son iguales y distintos de cero.

Teorema II.2.3 *Si A es un operador cerrado¹⁴, simétrico y densamente definido en un espacio de Hilbert \mathcal{H} entonces A es autoadjunto si y sólo si $n_{\pm} = 0$.*

Demostración: Nótese primeramente que,

$$\text{Ker}(A^{\dagger} \pm i) = \text{Ran}^{\perp}(A \mp i). \quad (76)$$

Esta propiedad es inmediata a partir de la siguiente igualdad,

$$((A^{\dagger} \pm i)\psi, \phi) = (\psi, (A \mp i)\phi), \quad (77)$$

válida para todo par de vectores $\psi \in \mathcal{D}(A^{\dagger})$ y $\phi \in \mathcal{D}(A)$. La ecuación (77) implica la ecuación (76) en virtud de que $\mathcal{D}(A)$ es un subespacio denso del espacio de Hilbert \mathcal{H} . Por lo tanto, si $n_{+} = 0$ entonces $\text{Ran}(A + i)$, que para un operador simétrico y cerrado es un subespacio cerrado, coincide con el espacio de Hilbert \mathcal{H} . En consecuencia todo vector perteneciente a \mathcal{H} es la imagen por $A + i$ de algún vector de $\mathcal{D}(A)$.

En particular, si $\phi \in \mathcal{D}(A^{\dagger})$ entonces existe $\chi \in \mathcal{D}(A)$ tal que $(A^{\dagger} + i)\phi = (A + i)\chi$ o bien $A^{\dagger}(\phi - \chi) = -i(\phi - \chi)$ puesto que A es la restricción de A^{\dagger} a $\mathcal{D}(A)$. Pero si, además, $n_{-} = 0$ entonces no existen autovectores de A^{\dagger} con autovalor $-i$, por lo cual $\phi = \chi$. Por consiguiente, $\phi \in \mathcal{D}(A)$ y el operador es autoadjunto.

□

El Teorema II.2.3 prueba que si los índices de deficiencia de un operador simétrico y cerrado son nulos entonces el operador es autoadjunto. A continuación, mostraremos cómo se debe proceder cuando los índices de deficiencia son no nulos. Veremos que si los índices de deficiencia no coinciden entonces no pueden construirse extensiones autoadjuntas. Por el contrario, si los índices de deficiencia son no nulos e iguales, $n_{+} = n_{-} > 0$, entonces existe un conjunto de extensiones autoadjuntas en correspondencia biunívoca con los elementos de $U(n_{\pm})$.

¹⁴Un operador es cerrado si su gráfica es un conjunto cerrado en $\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$.

Teorema II.2.4 *Sea A un operador cerrado, simétrico y densamente definido. Las extensiones simétricas \tilde{A} de A están en correspondencia biunívoca con el conjunto de isometrías lineales parciales de \mathcal{K}_+ en \mathcal{K}_- .*

Si U es una de tales isometrías, con dominio $\mathcal{D}(U) \subset \mathcal{K}_+$, entonces la extensión simétrica correspondiente \tilde{A} tiene dominio¹⁵,

$$\mathcal{D}(\tilde{A}) = \mathcal{D}(A) \oplus \mathcal{D}(U) \oplus \text{Im}(U), \quad (78)$$

y su acción queda definida por,

$$\tilde{A}(\phi_0 + \phi_+ + U(\phi_+)) = A^\dagger(\phi_0 + \phi_+ + U(\phi_+)) = A(\phi_0) + i\phi_+ - iU(\phi_+), \quad (79)$$

donde $\phi_0 \in \mathcal{D}(A)$ y $\phi_+ \in \mathcal{D}(U) \subset \mathcal{K}_+$. Además, si los índices de deficiencia son finitos,

$$n_\pm(\tilde{A}) = n_\pm(A) - \dim \mathcal{D}(U). \quad (80)$$

Véase la demostración en [101].

□

Definición II.2.5 *Un operador A simétrico y densamente definido es **esencialmente autoadjunto** si su clausura¹⁶ \overline{A} es autoadjunta.*

Corolario II.2.6 *Dado un operador simétrico y densamente definido:*

- *Si sus índices de deficiencia son distintos entonces no admite extensiones autoadjuntas.*
- *Si sus índices de deficiencia son nulos entonces el operador es esencialmente autoadjunto y admite una única extensión autoadjunta, que está dada por su clausura.*
- *Si sus índices de deficiencia son iguales y distintos de cero, $n_+ = n_- > 0$, se pueden establecer n_\pm^2 isometrías lineales con dominio en todo el subespacio \mathcal{K}_+ cuyas imágenes son \mathcal{K}_- . En ese caso, la extensión asociada a cada isometría tendrá índices de deficiencia nulos y será, por lo tanto, ella misma autoadjunta. El conjunto de extensiones autoadjuntas está entonces en correspondencia biunívoca con los elementos del grupo $U(n_\pm)$.*

Finalizamos esta sección considerando nuevamente el operador $P = -i\partial_x$ definido sobre $\mathcal{D}(P) = \mathcal{C}_0^\infty((0, 1))$ con el fin de ilustrar los resultados del Corolario II.2.6.

¹⁵Esta descomposición de $\mathcal{D}(\tilde{A})$ en una suma directa debe entenderse con respecto al producto interno $(\cdot, \cdot)_A := (\cdot, \cdot) + (A\cdot, A\cdot)$.

¹⁶El operador clausura \overline{A} de un operador A es aquel cuya gráfica es la clausura de la gráfica de A con la norma inducida en $\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}$. Puede probarse que $\overline{A} = (A^\dagger)^\dagger$.

Ya hemos demostrado que se verifica,

$$\mathcal{D}(P) = \mathcal{C}_0^\infty((0, 1)) \subset \mathcal{D}(P^\dagger) = \mathbf{H}_1((0, 1)) \subset \mathcal{H} = \mathbf{L}_2([0, 1]), \quad (81)$$

de modo que el operador P no es esencialmente autoadjunto.

Para calcular los índices de deficiencia del operador P debemos resolver,

$$P^\dagger \psi_\pm = -i\psi'_\pm = \pm i\psi_\pm, \quad (82)$$

en $\mathcal{H} = \mathbf{L}_2([0, 1])$. Recordemos que ψ'_\pm representa, en principio, la derivada (débil) en el sentido de las distribuciones. Sin embargo, como ya hemos adelantado, la propiedad (82) implica que las autofunciones ψ_\pm son infinitamente derivables. En efecto, la ecuación (82) indica que $\psi'_\pm \in \mathbf{L}_2([0, 1])$; esto significa que las funciones ψ_\pm admiten una derivada generalizada en $\mathbf{L}_2([0, 1])$ o que las distribuciones que definen admiten una derivada regular. Utilizando reiteradamente la ecuación (82) concluimos que ψ_\pm admiten derivadas regulares de todo orden. Las funciones que admiten una derivada generalizada en $\mathbf{L}_2([0, 1])$ son funciones absolutamente continuas y, consecuentemente, continuas. Por consiguiente $\psi_\pm \in \mathcal{C}^\infty([0, 1])$. En otros términos, como ψ_\pm admiten derivadas generalizadas regulares de todo orden, pertenecen a $\bigcap_{d \in \mathbb{N}} \mathbf{H}_d((0, 1))$; el Lema de Sobolev indica, entonces, que ψ admite infinitas derivadas en el sentido usual¹⁷. La ecuación (82) es, entonces, una ecuación diferencial en el sentido usual cuyas soluciones están generadas por,

$$\psi_+(x) = e^{1-x}, \quad (83)$$

$$\psi_-(x) = e^x. \quad (84)$$

Los subespacios de deficiencia \mathcal{K}_\pm son entonces subespacios de una dimensión generados por las funciones (83) y (84), respectivamente. Los índices de deficiencia resultan, en consecuencia,

$$n_\pm = 1. \quad (85)$$

De acuerdo con el Corolario II.2.6, el operador P no es esencialmente autoadjunto y admite extensiones autoadjuntas identificadas con las isometrías de $\mathcal{K}_+ \approx \mathbb{C}$ en $\mathcal{K}_- \approx \mathbb{C}$. De modo que el conjunto de extensiones autoadjuntas está identificado con el grupo $U(1)$ y sus elementos están caracterizados por un parámetro real $\gamma \in [0, 2\pi)$. Para construir una extensión autoadjunta particular consideramos una isometría $U_\gamma \in U(1)$ de \mathcal{K}_+ en \mathcal{K}_- que definimos de acuerdo con su acción sobre el elemento de la base (83),

$$U_\gamma : \mathcal{K}_+ \rightarrow \mathcal{K}_- \quad (86)$$

$$U_\gamma(\psi_+) := e^{i\gamma}\psi_-. \quad (87)$$

De acuerdo con el Teorema II.2.4, el dominio $\mathcal{D}(P_\gamma)$ de la extensión autoadjunta P_γ del operador impulso está definido por,

$$\mathcal{D}(P_\gamma) = \{\psi : \psi = \phi + A\psi_+ + e^{i\gamma}A\psi_-, \phi \in \mathcal{D}(\overline{P}), A \in \mathbb{C}\}. \quad (88)$$

¹⁷El Lema de Sobolev [67] demuestra que si $\psi \in \mathbf{H}_d(M)$ entonces $\psi \in \mathcal{C}^k(M)$ para todo $k < d - m/2$, siendo $k \in \mathbb{N}$ y $m = \dim M$.

Asimismo, resulta inmediato mostrar que,

$$\mathcal{D}(\overline{P}) = \{\phi \in \mathbf{H}_1((0, 1)) : \phi(0) = \phi(1) = 0\}. \quad (89)$$

Hemos señalado que la condición de autoadjunto del generador de las transformaciones unitarias determina las condiciones de contorno apropiadas en mecánica cuántica. Estamos ahora en condiciones de establecer estas condiciones de contorno para el operador impulso. Para ello calculamos los valores de las funciones $\psi \in \mathcal{D}(P_\gamma)$ en los extremos del intervalo $[0, 1]$ (véanse las ecuaciones (88), (83) y (84))¹⁸,

$$\psi(0) = A e + e^{i\gamma} A, \quad (90)$$

$$\psi(1) = A + e^{i\gamma} A e. \quad (91)$$

A partir de estas expresiones es fácil ver que,

$$\psi(1) = e^{-i\gamma} \frac{1 + e^{1+i\gamma}}{1 + e^{1-i\gamma}} \psi(0). \quad (92)$$

Esta relación indica que los valores de borde de la funciones de onda difieren en una fase,

$$\psi(1) = e^{i\alpha} \psi(0), \quad (93)$$

donde hemos definido,

$$\alpha := -\gamma + 2 \arctan \left(\frac{\sin \gamma}{1 + e \cos \gamma} \right). \quad (94)$$

En conclusión, el operador P definido sobre las funciones de $\mathcal{C}_0^\infty((0, 1))$ no es autoadjunto. Las funciones de $\mathcal{C}_0^\infty((0, 1))$ y todas sus derivadas se anulan en los bordes y esto asegura que P sea simétrico pues se cancelan las contribuciones de borde,

$$-i(\psi^*(1)\phi(1) - \psi^*(0)\phi(0)), \quad (95)$$

en la integración por partes de la ecuación (61). Sin embargo, $\mathcal{C}_0^\infty((0, 1))$ es un conjunto muy restringido de funciones, por lo que el dominio de P^\dagger es demasiado amplio y el operador P no resulta autoadjunto.

Como el objetivo es encontrar extensiones simétricas de P , el comportamiento de las funciones en los extremos debe ser aún tal que se anule la contribución de los términos de borde (95). La condición de contorno apropiada para el operador impulso, dada por la ecuación (93), es la misma que habríamos obtenido de haber impuesto el menor número posible de restricciones que exige la anulación de las contribuciones de borde (95). En efecto, la anulación de estos términos en el caso particular en el que $\psi = \phi$ implica que el

¹⁸Puede demostrarse con los métodos de las Secciones III y VI.1 que la función $\phi \in \mathcal{D}(\overline{P})$ no contribuye al orden dominante.

valor de la función en los extremos difiere en una fase. Es inmediato ver, luego, que esa fase debe ser la misma para todas las funciones del dominio del operador simétrico. En consecuencia, la condición (93), a la que hemos arribado independientemente a partir del Teorema II.2.4, es la mínima necesaria para la anulación de (95).

Existe otro argumento en favor de la condición de contorno (93). Como el operador P es autoadjunto, el operador de traslación e^{iaP} resulta unitario. Pero la transformación e^{iaP} sólo conserva la norma de las funciones definidas sobre el intervalo $[0, 1]$ si la función de onda $\psi(x)$ satisface $\|\psi(0)\|^2 = \|\psi(1)\|^2$, que es una consecuencia de la condición (93).

Finalizamos esta sección con dos últimas observaciones. En primer lugar la condición de contorno no local (93) modifica la topología de la variedad de base $[0, 1]$ identificándola con S^1 . Si $\alpha = 0$, la condición de contorno describe el movimiento de una partícula en S^1 y el espectro del operador impulso $k_n = 2\pi n$ indica que la órbita de la partícula es un múltiplo de su longitud de onda de de Broglie. Sin embargo, la existencia de una familia de extensiones autoadjuntas del operador impulso, que implica la necesidad de considerar condiciones de contorno más generales, con α arbitrario, tiene consecuencias físicas, *i.e.*, afecta el resultado de las mediciones. En efecto, los autovalores k_n^α del operador impulso definido por las condiciones de contorno (93) están dados por $k_n^\alpha = 2\pi n + \alpha$, de modo que dependen de la extensión autoadjunta. En este caso, el parámetro α representa el “flujo magnético” encerrado por S^1 .

Es interesante, finalmente, observar que las condiciones de contorno (93) para la función de onda $\psi(x)$ de una partícula confinada en el intervalo $[0, 1]$ no incluyen la condición tipo Dirichlet $\psi(0) = \psi(1) = 0$. Esto significa que, bajo esta condición, el operador impulso, si bien simétrico, no es autoadjunto. Como consecuencia, el operador impulso con condiciones de contorno tipo Dirichlet no tiene autofunciones; de hecho, si las hubiera no se verificaría el principio de incerteza. En efecto, las autofunciones del operador impulso tienen dispersión $\Delta p = 0$ en tanto que $\Delta x \sim 1$; la desigualdad de Heisenberg no se verifica pues es válida para operadores autoadjuntos.

II.3. Topología del conjunto de extensiones autoadjuntas

En esta sección presentaremos algunas propiedades topológicas de la variedad \mathcal{M} de las extensiones autoadjuntas de un operador diferencial de segundo orden a partir del estudio realizado por M. Asorey *et al.* [5].

Consideremos el operador $A = \Delta + V$ sobre secciones de un fibrado vectorial E de rango k sobre una variedad de base M de métrica g sobre la cual se define un potencial V y un campo de gauge \mathcal{A} . El laplaciano está dado por $\Delta = -d_{\mathcal{A}}^\dagger d_{\mathcal{A}}$, siendo $d_{\mathcal{A}}$ la derivada covariante exterior.

II.3 TOPOLOGÍA DEL CONJUNTO DE EXTENSIONES AUTOADJUNTAS

El espacio de estados físicos \mathcal{H} es isomorfo a $\mathbf{L}_2(M) \otimes \mathbb{C}^k$. El producto interno de dos estados $\psi^{(1)}, \psi^{(2)} \in \mathcal{H}$ está dado por,

$$(\psi^{(1)}, \psi^{(2)}) = \int_M (\psi^{(1)}, \psi^{(2)})_E \sqrt{g} dx, \quad (96)$$

siendo $(\psi^{(1)}, \psi^{(2)})_E$ el producto interno en la fibra, que es isomorfa a \mathbb{C}^k .

El operador A es simétrico en $\mathcal{C}_0^\infty(M)$, el subespacio de funciones de \mathcal{H} cuyo soporte es disjunto con el borde ∂M . El dominio $\mathcal{D}(A^\dagger)$ del operador adjunto A^\dagger es isomorfo al espacio de Sobolev $\mathbf{H}_2(M)$, que coincide con la clausura de $\mathcal{C}_0^\infty(M)$ con respecto a la métrica derivada del producto escalar,

$$(\psi^{(1)}, \psi^{(2)})_2 := (\psi^{(1)}, (\Delta + 1)\psi^{(2)}). \quad (97)$$

Definimos ahora para toda función ψ del espacio \mathcal{H} , sus valores de borde. Llamamos ϕ a la restricción de ψ al borde de ∂M y $\dot{\phi}$ a la restricción de su derivada con respecto al versor normal interior. Definimos también los valores de borde $\phi_\pm := \phi \pm i\dot{\phi}$ y la forma simpléctica Σ sobre el espacio $\mathbf{L}_2(\partial M, E) \otimes \mathbf{L}_2(\partial M, E)$,

Definición II.3.1

$$\Sigma(\psi^{(1)}, \psi^{(2)}) := \frac{i}{2} \int_{\partial M} \left\{ (\phi_+^{(1)}, \phi_+^{(2)}) - (\phi_-^{(1)}, \phi_-^{(2)}) \right\} \quad (98)$$

Puede entonces probarse, sin dificultad alguna, el siguiente Teorema,

Teorema II.3.2

$$\psi^{(1)}, \psi^{(2)} \in \mathcal{D}(A^\dagger) \Rightarrow (\psi^{(1)}, A^\dagger \psi^{(2)}) - (A^\dagger \psi^{(1)}, \psi^{(2)}) = \Sigma(\psi^{(1)}, \psi^{(2)}). \quad (99)$$

En consecuencia, el conjunto de extensiones autoadjuntas \mathcal{M} está en correspondencia biunívoca con el conjunto de transformaciones unitarias de funciones del borde, que anulan la forma simpléctica (98),

$$\mathcal{M} \approx \mathcal{U}(\mathbf{L}_2(\partial M, E)). \quad (100)$$

De este modo, a cada transformación unitaria $U \in \mathcal{U}(\mathbf{L}_2(\partial M, E))$ le corresponde una extensión autoadjunta H^U ; el dominio $\mathcal{D}(H^U)$ está constituido por las funciones $\psi \in \mathbf{L}_2(M, E)$ cuyos valores de borde satisfacen,

$$\phi_- = U \cdot \phi_+. \quad (101)$$

Esta caracterización se corresponde con la determinada por la teoría de von Neumann. Esto es evidente para el caso particular de aquellas variedades cuyos bordes están constituidos por n puntos aislados. En ese caso, el espacio de valores de borde es isomorfo a \mathbb{C}^n y el grupo de transformaciones unitarias es $\mathcal{U} = U(n)$. Por su parte, la teoría de los

II.3 TOPOLOGÍA DEL CONJUNTO DE EXTENSIONES AUTOADJUNTAS

índices de deficiencia indica que cada uno de estos bordes contribuye en una unidad al índice de deficiencia, de modo que de acuerdo con la teoría de von Neumann el conjunto \mathcal{M} de extensiones autoadjuntas también se identifica con el grupo $U(n)$.

Puede verse, en forma inmediata, que las transformaciones unitarias $U = \mp 1$ definen las extensiones autoadjuntas caracterizadas por condiciones de contorno Dirichlet y Neumann, respectivamente.

Por otra parte, para una extensión caracterizada por el operador U podemos definir los operadores autoadjuntos B_{\pm} ,

$$B_- := -i \frac{1 - U}{1 + U}, \quad (102)$$

$$B_+ := i \frac{1 + U}{1 - U}. \quad (103)$$

y caracterizar la condición de contorno por,

$$\dot{\phi} = B_- \cdot \phi, \quad (104)$$

o, equivalentemente, por,

$$\phi = B_+ \cdot \dot{\phi}. \quad (105)$$

Sin embargo, no debe pensarse que el conjunto \mathcal{M} de extensiones autoadjuntas puede identificarse, mediante los operadores B_+ o B_- , con el conjunto $\mathcal{L}(\partial M, E)$ de operadores autoadjuntos definidos sobre el borde ∂M . En efecto, el conjunto \mathcal{L} tiene topología trivial, en tanto que la topología del grupo unitario $\mathcal{U}(\mathbf{L}_2(\partial M, E))$, que sí está identificado con \mathcal{M} , está dada por,

$$\pi_n(\mathcal{U}(\mathbf{L}_2(\partial M, E))) = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ es par,} \\ \mathbb{Z} & \text{si } n \text{ es impar.} \end{cases} \quad (106)$$

Para comprender la diferencia entre los conjuntos $\mathcal{L}(\partial M, E)$ y \mathcal{M} definimos los subconjuntos de $\mathcal{U}(\mathbf{L}_2(\partial M, E))$ cuyos operadores contienen a ∓ 1 en su espectro,

$$\mathcal{C}_{\mp} := \{U \in \mathcal{U}(\mathbf{L}_2(\partial M, E)) : \mp 1 \in \sigma(U)\}. \quad (107)$$

Estos subconjuntos se denominan **subvariedades de Cayley**. De acuerdo con las ecuaciones (102) y (103), si $U \in \mathcal{C}_{\mp}$ entonces los operadores B_{\mp} no pueden definirse. En otros términos, la caracterización de las extensiones autoadjuntas o, equivalentemente, de las condiciones de contorno mediante la ecuación (104) ((105)) no es posible para aquellas extensiones autoadjuntas pertenecientes al conjunto \mathcal{C}_- (\mathcal{C}_+).

Por su parte, el conjunto $\mathcal{U}(\mathbf{L}_2(\partial M, E)) - \mathcal{C}_-$ está identificado con $\mathcal{L}(\partial M, E)$ y define extensiones autoadjuntas que pueden caracterizarse por una condición de contorno de la forma (104). Lo mismo puede decirse de las extensiones autoadjuntas pertenecientes a $\mathcal{U}(\mathbf{L}_2(\partial M, E)) - \mathcal{C}_+$ con respecto a la condición (105).

II.3 TOPOLOGÍA DEL CONJUNTO DE EXTENSIONES AUTOADJUNTAS

En conclusión, la topología de la variedad $\mathcal{U}(\mathbf{L}_2(\partial M, E))$ no es trivial pero todos los ciclos intersecan tanto a \mathcal{C}_- como a \mathcal{C}_+ . Por consiguiente, las variedades,

$$\mathcal{L}_\pm \approx \mathcal{U}(\mathbf{L}_2(\partial M, E)) - \mathcal{C}_\pm, \quad (108)$$

tiene topología trivial.

En los ejemplos que veremos a lo largo de esta Tesis, las extensiones autoadjuntas provienen del estudio de fibrados lineales, *i.e.*, $E = \mathbb{C}$, sobre variedades unidimensionales cuyo borde es un punto P (a excepción del ejemplo considerado en la sección VII.2.) En estos casos la variedad \mathcal{M} de extensiones autoadjuntas es isomorfa al grupo de transformaciones unitarias $\mathcal{U}(\mathbf{L}_2(P, \mathbb{C})) = U(1)$. Nótese que, como indica la ecuación (106), $\pi_1(U(1)) \approx \mathbb{Z}$, todos los ciclos intersecan a las variedades de Cayley $\mathcal{C}_\mp = \mp 1$ y las subvariedades \mathcal{L}_\pm (véase la ecuación (108)) tienen, en efecto, topología trivial.

Aunque no discutiremos los detalles, mencionamos además que, dado que el grupo fundamental de homotopía de $\pi_1(\mathcal{M})$ es isomorfo a los enteros y que \mathcal{M} es conexa, el grupo de cohomología $H^1(\mathcal{M}) \approx \mathbb{Z}$ y se puede entonces construir, sobre el fibrado de determinantes, la 1-forma diferencial que lo caracteriza.

II.3.1. Estados de borde

Consideraremos, ahora, una propiedad interesante de las subvariedades de Cayley en relación con la existencia de estados de borde [5].

En primer lugar, señalemos que el operador $\Delta = -d_A^\dagger d_A$ definido sobre $\mathcal{C}_0^\infty(M, E)$ es positivo definido. No obstante una extensión autoadjunta Δ^U , caracterizada por un operador unitario $U \notin \mathcal{C}_-$, puede no ser positiva definida. Consideremos el producto interno de dos funciones $\psi^{(1)}, \psi^{(2)} \in \mathcal{D}(\Delta^U)$,

$$(d_A \psi^{(1)}, d_A \psi^{(2)}) = (\dot{\phi}^{(1)}, \phi^{(2)}) + (\Delta^U \psi^{(1)}, \psi^{(2)}) = (B_- \cdot \phi^{(1)}, \phi^{(2)}) + (\Delta^U \psi^{(1)}, \psi^{(2)}). \quad (109)$$

En consecuencia, para todo vector $\psi \in \mathcal{D}(\Delta^U)$,

$$(\Delta^U \psi, \psi) = (d_A \psi, d_A \psi) - (B_- \cdot \phi, \phi). \quad (110)$$

De modo que el operador Δ puede no resultar positivo definido si el segundo término del miembro derecho de la ecuación anterior es suficientemente grande. El siguiente Teorema relaciona esta posibilidad con la “proximidad” del operador U a la subvariedad de Cayley \mathcal{C}_- .

Teorema II.3.3 *$U \in \mathcal{C}_-$ entonces $U_t := e^{it}U$ define una extensión autoadjunta Δ^t que tiene un “estado de borde” de energía negativa para t suficientemente pequeño. La energía de este estado tiende a $-\infty$ cuando t tiende a cero.*

Demostración: Daremos indicaciones para una demostración constructiva omitiendo los detalles técnicos. El estado de borde $\psi_{\xi,t}$ está dado por,

$$\psi_{\xi,t} := \xi(y) \exp\left(-\frac{\tan(x)}{\tan(t/2)}\right), \quad (111)$$

siendo y la coordenada sobre el borde ∂M , x la coordenada normal al borde y $\xi(y)$ un estado de $\mathbf{L}_2(\partial M, E)$ que satisface

$$U\xi(y) = -\xi(y). \quad (112)$$

El estado $\xi(y)$ existe puesto que $U \in \mathcal{C}_-$. El estado de borde $\psi_{\xi,t}$, por su parte, pertenece a la extensión autoadjunta caracterizada por el operador unitario $e^{it}U$, como puede verificarse sin dificultad. Asimismo, es fácil ver que el estado $\psi_{\xi,t}$ se concentra en el borde ∂M a medida que t tiende a cero.

Finalmente, puede calcularse el miembro derecho de la ecuación (110) para el estado de borde $\psi_{\xi,t}$ y probar que tiende a $-\infty$ a medida que t tiende a cero.

□

En conclusión, podemos construir extensiones autoadjuntas caracterizadas por un operador $e^{it}U$, con $U \in \mathcal{C}_-$ (e.g., condiciones Dirichlet¹⁹), cuyos estados fundamentales tienen energías que tienden a $-\infty$ cuando t tiende a cero. Estas extensiones contienen, además, estados de borde cuyas normas tienden a cero con \sqrt{t} .

Ejemplo

Consideremos el operador laplaciano en una dimensión $-\partial_x^2$ con dominio de definición $\mathcal{D}(-\partial_x^2) = \mathcal{C}_0^\infty((0, 1))$. Como el conjunto de funciones de borde $\mathbf{L}_2(\partial M, \mathbb{C})$ es isomorfo a \mathbb{C}^2 , el conjunto de extensiones autoadjuntas está en correspondencia biunívoca con $U(2)$.

Construiremos un estado de borde a partir de una extensión en \mathcal{C}_- . Sea entonces,

$$U = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & e^{i\beta} \end{pmatrix}, \quad (113)$$

que define condiciones de contorno Dirichlet en el origen y condiciones de contorno Robin en 1 caracterizadas por el parámetro β . El autovector correspondiente ξ está dado por,

$$\xi = \begin{pmatrix} \xi(0) \\ \xi(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (114)$$

¹⁹Si hubiéramos realizado el mismo análisis a partir de extensiones caracterizadas por operadores en \mathcal{C}_+ (e.g., condiciones Neumann) habríamos obtenido estados con energías arbitrariamente grandes que tienden, en el límite $t \rightarrow 0$ a modos ceros del operador Δ^t .

II.3 TOPOLOGÍA DEL CONJUNTO DE EXTENSIONES AUTOADJUNTAS

De acuerdo con el Teorema II.3.3, el estado de borde está entonces dado por,

$$\psi_{\xi,t} = \begin{cases} \exp\left(-\epsilon \frac{\tan(x/\epsilon)}{\tan(t/2)}\right) & \text{si } 0 \leq x \leq \epsilon \frac{\pi}{2} \\ 0 & \text{si } \epsilon \frac{\pi}{2} \leq x \leq 1, \end{cases} \quad (115)$$

donde $0 < \epsilon < 1$.

Es inmediato verificar que $\psi_{\xi,t}$ pertenece a la extensión caracterizada por $e^{it}U$ y que el valor de expectación del hamiltoniano con respecto a este estado tiende²⁰ a $-\infty$ conforme t tiende a cero. La norma del estado (115), cuya energía es arbitrariamente negativa para valores suficientemente pequeños de t , está acotada por t , de modo que este estado no existe en el límite $t \rightarrow 0$.

Nótese que las extensiones autoadjuntas caracterizadas por operadores unitarios U en la intersección $\mathcal{C}_- \cap \mathcal{C}_+$ representa un cambio de topología en la variedad de base M , *i.e.*, en este caso, condiciones de contorno periódicas. Eventualmente, una fase en los elementos de U representa condiciones de contorno pseudoperiódicas, correspondientes a partículas con estadística fraccionaria.

²⁰Si $\epsilon < 1/\sqrt{2}$.

II.3 TOPOLOGÍA DEL CONJUNTO DE EXTENSIONES AUTOADJUNTAS

Parte III

Ruptura Espontánea de SUSY en Mecánica Cuántica.

*I have done a terrible thing: I have postulated a particle
that cannot be detected.
(Wolfgang Pauli.)*

III.1. Introducción

La supersimetría (SUSY) es considerada una extensión natural de las teorías de gauge, contribuye a la cancelación de divergencias en la Teoría Cuántica de Campos y es un ingrediente esencial de la Teoría de Cuerdas. Sin embargo, la degeneración de los niveles de energía asociada con esta simetría implica la existencia de compañeros supersimétricos de igual masa que no existen en la naturaleza.

En consecuencia, esta simetría sólo puede realizarse bajo un mecanismo de ruptura espontánea (dinámica). Pero a diferencia de lo que ocurre con las simetrías ordinarias, la ruptura espontánea de la SUSY es muy difícil de implementar.

Modelos de mecánica cuántica supersimétrica (SUSYQM) en una dimensión fueron estudiados primeramente por H. Nicolai [95] y E. Witten [126, 127, 128]. En este contexto se propuso la ruptura de la SUSY a partir de mecanismos no perturbativos basados en potenciales asociados a soluciones de instantones [126, 127, 109, 36, 37, 38].

Más recientemente, A. Jevicki y J.P. Rodrigues [80] han sugerido que la SUSY también podría ser espontáneamente rota mediante superpotenciales singulares por efecto de condiciones de contorno inusuales en la singularidad. Para ello consideraron un operador diferencial de segundo orden, estudiado previamente por L. Lathouwers [89], correspondiente a un hamiltoniano supersimétrico derivado de un superpotencial con una singularidad en el origen $x = 0$ proporcional a x^{-1} . Sin embargo, los autores no han tenido en cuenta si las autofunciones analizadas corresponden a un mismo hamiltoniano autoadjunto.

Posteriormente, A. Das y S. Pernice [41, 43] han mostrado que una regularización del superpotencial conduce a una SUSY explícita, es decir, a un sistema con un estado fundamental de energía nula y estados excitados doblemente degenerados.

En este capítulo presentaremos uno de los resultados originales de esta tesis referido a este superpotencial en SUSYQM [55]. En particular, estudiaremos la relevancia de las extensiones autoadjuntas de las supercargas (generadores de la SUSY) y del hamiltoniano del sistema en relación con la ruptura espontánea de la SUSY. Mostraremos que, en

general, las extensiones autoadjuntas poseen una SUSY dinámicamente rota por efecto de las condiciones de contorno y, por consecuencia, sus espectros presentan un estado fundamental de energía no nula y estados excitados no degenerados.

El hamiltoniano y las supercargas de este sistema constituyen, asimismo, ejemplos de interés en relación con el objetivo central de esta tesis, referido a las propiedades inusuales de las funciones espectrales correspondientes a operadores singulares. En la sección X.2 del Apéndice calcularemos algunas de las funciones espectrales asociadas a este problema.

III.2. $N=2$ SUSYQM

La mecánica cuántica supersimétrica $N = 2$ es la realización en $0 + 1$ -dimensiones del álgebra de supersimetría:

$$\begin{aligned} \{Q, Q\} = \{Q^\dagger, Q^\dagger\} = 0, \quad \{Q, Q^\dagger\} = H, \\ [H, Q] = [H, Q^\dagger] = 0. \end{aligned} \quad (116)$$

El generador de las traslaciones temporales es el hamiltoniano H y los generadores Q y Q^\dagger , adjuntos uno a otro, son las supercargas que generan traslaciones en el superespacio y constituyen el sector fermiónico del álgebra. Todos los generadores actúan sobre un mismo espacio de Hilbert \mathcal{H} . Si definimos las combinaciones lineales autoadjuntas,

$$Q_+ = Q + Q^\dagger \quad Q_- = i(Q - Q^\dagger), \quad (117)$$

el álgebra (116) toma la forma,

$$\begin{aligned} \{Q_+, Q_-\} = 0, \quad \{Q_+, Q_+\} = \{Q_-, Q_-\} = 2H, \\ [H, Q_+] = [H, Q_-] = 0. \end{aligned} \quad (118)$$

Una representación de las relaciones (118) está dada por,

$$Q_+ = \begin{pmatrix} 0 & D^\dagger \\ D & 0 \end{pmatrix}, \quad Q_- = \begin{pmatrix} 0 & -iD^\dagger \\ iD & 0 \end{pmatrix}, \quad H = \begin{pmatrix} D^\dagger D & 0 \\ 0 & D D^\dagger \end{pmatrix}, \quad (119)$$

donde,

$$D = \frac{1}{\sqrt{2}} (-\partial_x + W(x)), \quad D^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}} (\partial_x + W(x)), \quad (120)$$

son operadores diferenciales definidos sobre un subespacio denso de funciones de una variedad unidimensional en el cual la composición está bien definida. La función $W(x)$ se denomina superpotencial.

De las relaciones de anticonmutación (118) se puede ver que el operador hamiltoniano H es positivo definido y autoadjunto. Además, si el estado fundamental ψ_0 del sistema es invariante ante las transformaciones de supersimetría, *id est*,

$$Q_+\psi_0 = Q_-\psi_0 = 0, \quad (121)$$

entonces $H\psi_0 = 0$, la energía del estado fundamental es cero. Recíprocamente, si la energía del estado fundamental es distinta de cero, entonces existe una ruptura espontánea de la supersimetría; el hamiltoniano conmuta con las supercargas pero sus autoestados no son invariantes ante una transformación de supersimetría.

El mecanismo de ruptura espontánea de la supersimetría que estudiaremos consiste en considerar variedades con borde y determinar la energía del estado fundamental en términos de las condiciones de contorno. Con este objetivo, estudiaremos a continuación un superpotencial que posee una singularidad en el borde de una variedad unidimensional. Las distintas condiciones de contorno admisibles en la singularidad están determinadas por las extensiones autoadjuntas del hamiltoniano. La supersimetría resultará espontáneamente rota para aquellas extensiones autoadjuntas cuyos estados fundamentales tengan energía distinta de cero.

Se debe tener presente que, aunque la representación dada por las expresiones (119) y (120) indican que los operadores Q^\dagger, D^\dagger son “formalmente” los operadores adjuntos de Q, D , respectivamente, esta propiedad está condicionada por la adecuada elección de los dominios de definición de los operadores. Mostraremos que estos dominios quedan determinados por el procedimiento que utilizaremos para construir las extensiones autoadjuntas del hamiltoniano.

III.3. Superpotencial singular

Consideremos entonces el problema en SUSYQM definido por un superpotencial $W(x)$, con una singularidad en el origen, dado por,

$$W = \frac{\alpha}{x} - x, \quad (122)$$

siendo $x \in \mathbb{R}^+$ y $\alpha \in \mathbb{R}$. Teniendo en cuenta las expresiones (120) definimos los operadores diferenciales,

$$D_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(-\partial_x + \frac{\alpha}{x} - x \right), \quad (123)$$

$$D_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\partial_x + \frac{\alpha}{x} - x \right), \quad (124)$$

con dominio en el subespacio denso $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^+)$ de funciones infinitamente derivables y con soporte compacto disjunto del origen.

III.3 SUPERPOTENCIAL SINGULAR

Es conveniente definir ahora el operador de supercarga Q_+ en el subespacio $\mathcal{D}(Q_+) = \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^+) \otimes \mathbb{C}^2$ cuya acción sobre los vectores Φ de componentes ϕ_1, ϕ_2 está dada por,

$$Q_+ \Phi = \begin{pmatrix} 0 & D_2 \\ D_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix}. \quad (125)$$

Su cuadrado, que está bien definido, permite definir,

$$H := Q_+^2. \quad (126)$$

El operador Q_+ , al igual que H , es simétrico debido a las restrictivas condiciones de contorno de su dominio de definición, sin embargo, no es autoadjunto (ni cerrado) sino que admite una familia de extensiones autoadjuntas $Q_+^{(\gamma)}$ caracterizada por un parámetro real γ (la clausura del operador será determinada, posteriormente, en la sección (III.7).)

Ahora bien, en virtud de un teorema de von Neumann [106], el operador hamiltoniano definido por,

$$H^{(\gamma)} := Q_+^{(\gamma)} \cdot Q_+^{(\gamma)}, \quad (127)$$

es autoadjunto en el dominio de definición,

$$\mathcal{D}(H^{(\gamma)}) = \{\psi \in \mathcal{D}(Q_+^{(\gamma)}) : Q_+^{(\gamma)} \psi \in \mathcal{D}(Q_+^{(\gamma)})\}. \quad (128)$$

En consecuencia, las extensiones autoadjuntas del operador Q_+ constituyen distintas representaciones de la supercarga caracterizadas por el parámetro γ y determinan los dominios sobre los cuales los operadores hamiltonianos (127) son autoadjuntos.

Por otra parte, se puede definir una segunda supercarga linealmente independiente de Q_+ como,

$$Q_- = \begin{pmatrix} 0 & -iD_2 \\ iD_1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (129)$$

que también resulta simétrica en $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^+) \otimes \mathbb{C}^2$ y verifica,

$$Q_-^2 = Q_+^2 = H, \quad \{Q_+, Q_-\} = 0. \quad (130)$$

Sin embargo, los generadores Q_+, Q_-, H no son autoadjuntos en $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^+) \otimes \mathbb{C}^2$.

Dado que Q_- se obtiene de Q_+ mediante una transformación unitaria,

$$Q_- = e^{i\pi\sigma_3/4} Q_+ e^{-i\pi\sigma_3/4}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (131)$$

toda extensión autoadjunta $Q_+^{(\gamma)}$ de Q_+ determina una extensión autoadjunta $Q_-^{(\gamma)}$ de Q_- cuyo dominio es la imagen de $\mathcal{D}(Q_+^{(\gamma)})$ por la transformación unitaria $e^{i\pi\sigma_3/4}$. En consecuencia, ambas extensiones presentan el mismo espectro. Más adelante estudiaremos la compatibilidad entre los dominios de estas supercargas en relación con la posibilidad de realizar el álgebra (118).

El primer paso en la construcción de las extensiones autoadjuntas de Q_+ consiste en determinar su adjunto Q_+^\dagger . Este es el tema de la siguiente sección.

III.4. El operador adjunto

Para determinar las extensiones autoadjuntas de Q_+ debemos estudiar sus subespacios de deficiencia,

$$\mathcal{K}_\pm := \text{Ker} \left(Q_+^\dagger \mp i \right). \quad (132)$$

Para ello, determinaremos el dominio y el espectro de Q_+^\dagger .

III.4.1. Dominio de Q_+^\dagger

Un vector $\Psi \in \mathbf{L}_2(\mathbb{R}^+) \otimes \mathbb{C}^2$ pertenece al dominio de Q_+^\dagger ,

$$\Psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} \in \mathcal{D}(Q_+^\dagger), \quad (133)$$

si $(\Psi, Q_+ \Phi)$ es una funcional lineal y continua de $\Phi \in \mathcal{D}(Q_+)$. Esto implica, por el Teorema de Riesz, la existencia de una función $\tilde{\Psi}$,

$$\tilde{\Psi} = \begin{pmatrix} \tilde{\psi}_1 \\ \tilde{\psi}_2 \end{pmatrix} \in \mathbf{L}_2(\mathbb{R}^+), \quad (134)$$

tal que,

$$(\Psi, Q_+ \Phi) = (\tilde{\Psi}, \Phi), \quad \forall \Phi \in \mathcal{D}(Q_+). \quad (135)$$

La función $\tilde{\Psi}$ está unívocamente determinada en virtud de que $\mathcal{D}(Q_+)$ es un subespacio denso. Consecuentemente, la acción de Q_+^\dagger , para cada $\Psi \in \mathcal{D}(Q_+^\dagger)$, está definida por,

$$Q_+^\dagger \Psi := \tilde{\Psi}. \quad (136)$$

Se debe recordar que, como Q_+ es simétrico, $\mathcal{D}(Q_+) \subset \mathcal{D}(Q_+^\dagger)$.

Determinaremos ahora las propiedades de las funciones pertenecientes a $\mathcal{D}(Q_+^\dagger)$, y el modo en que Q_+^\dagger actúa sobre ellas. La ecuación (135) implica,

$$-\psi_1' + \left(\frac{\alpha}{x} - x \right) \psi_1 = \sqrt{2} \tilde{\psi}_2, \quad (137)$$

$$\psi_2' + \left(\frac{\alpha}{x} - x \right) \psi_2 = \sqrt{2} \tilde{\psi}_1, \quad (138)$$

donde las derivadas se consideran en el sentido generalizado. Esto muestra que $\Psi'(x)$ es una distribución regular, *i.e.*, localmente integrable. Por lo tanto, $\Psi(x)$ es una función absolutamente continua para $x > 0$, y el dominio de Q_+^\dagger resulta,

$$\mathcal{D}(Q_+^\dagger) = \{ \Psi \in AC(\mathbb{R}^+ - \{0\}) \cap \mathbf{L}_2(\mathbb{R}^+); D_1 \psi_1, D_2 \psi_2 \in \mathbf{L}_2(\mathbb{R}^+) \}. \quad (139)$$

Por consiguiente, podemos realizar una integración por partes en el miembro izquierdo de la ecuación (135) y concluir que la acción de Q_+^\dagger sobre $\Psi \in \mathcal{D}(Q_+^\dagger)$ está dada por,

$$Q_+^\dagger \Psi = \begin{pmatrix} 0 & D_2 \\ D_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}, \quad (140)$$

donde las derivadas deben interpretarse en el sentido generalizado.

III.4.2. Espectro de Q_+^\dagger

Consideremos ahora el problema de autovalores de Q_+^\dagger ,

$$Q_+^\dagger \Phi_\lambda = \lambda \Phi_\lambda, \quad (141)$$

o equivalentemente,

$$D_1 \phi_1 = \lambda \phi_2, \quad D_2 \phi_2 = \lambda \phi_1, \quad (142)$$

con,

$$\Phi_\lambda = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} \in \mathcal{D}(Q_+^\dagger), \quad (143)$$

y $\lambda \in \mathbb{C}$.

A partir de las ecuaciones (123), (124) y (142), se deduce que $\Phi_\lambda'(x)$ es también una función absolutamente continua. En consecuencia, aplicaciones sucesivas de Q_+^\dagger a ambos lados de la ecuación (141), demuestran que $\Phi_\lambda(x) \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^+ - \{0\})$, y la ecuación (142) resulta equivalente a un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias.

Reemplazando ϕ_2 en términos de ϕ_1 en la ecuación (142) obtenemos,

$$-\frac{1}{2} \phi_1'' + \frac{1}{2} \left\{ \frac{\alpha(\alpha-1)}{x^2} + x^2 - 1 - 2\alpha \right\} \phi_1 = \lambda^2 \phi_1, \quad (144)$$

$$\lambda \phi_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ -\phi_1' + \left(\frac{\alpha}{x} - x \right) \phi_1 \right\}. \quad (145)$$

Haciendo la substitución,

$$\phi_1(x) = x^\alpha e^{-x^2/2} F(x^2) \quad (146)$$

en la ecuación (144) obtenemos la ecuación de Kummer [1] para $F(z)$,

$$z F''(z) + (b-z) F'(z) - a F(z) = 0, \quad (147)$$

con,

$$a = -\frac{\lambda^2}{2}, \quad b = \alpha + \frac{1}{2}. \quad (148)$$

Para cualquier valor de los parámetros a y b , la ecuación (147) tiene dos soluciones linealmente independientes [1] dadas por las funciones de Kummer,

$$y_1(z) = U(a, b, z) = \frac{\pi}{\sin \pi b} \left\{ \frac{M(a, b, z)}{\Gamma(1+a-b)\Gamma(b)} - z^{1-b} \frac{M(1+a-b, 2-b, z)}{\Gamma(a)\Gamma(2-b)} \right\}, \quad (149)$$

y,

$$y_2(z) = e^z U(b-a, b, -z). \quad (150)$$

En la ecuación (149), $M(a, b, z)$ es la función hipergeométrica confluyente ${}_1F_1(a; b; z)$.

Para grandes valores de $|z|$ [1],

$$U(a, b, z) = z^{-a} \{1 + \mathcal{O}(|z|^{-1})\}, \quad (151)$$

de modo que solamente $y_1(x^2)$ conduce a una función $\phi_1(x) \in \mathbf{L}_2(1, \infty)$ al ser reemplazada en la ecuación (146).

Por consiguiente, una de las componentes de Φ_λ está dada por,

$$\phi_1(x) = x^\alpha e^{-x^2/2} U\left(-\frac{\lambda^2}{2}, \alpha + \frac{1}{2}, x^2\right). \quad (152)$$

Por su parte, reemplazando la ecuación (152) en la ecuación (145), obtenemos para la otra componente de Φ_λ ,

$$\phi_2(x) = -\frac{\lambda}{\sqrt{2}} x^{\alpha+1} e^{-x^2/2} U\left(1 - \frac{\lambda^2}{2}; \alpha + \frac{3}{2}, x^2\right), \quad (153)$$

que también pertenece a $\mathbf{L}_2(1, \infty)$.

Sin embargo, debemos también considerar el comportamiento de $\Phi_\lambda(x)$ cerca del origen; esto permitirá la determinación del espectro. De la ecuación (149), y del desarrollo para pequeños argumentos de las funciones de Kummer [1], se concluye que existen tres casos que deben analizarse por separado, de acuerdo con el valor del parámetro α :

1. Si $\alpha \geq 1/2$, se puede ver que $\Phi_\lambda(x) \in \mathbf{L}_2(0, 1)$ si y sólo si $-\lambda^2/2 = -n$, con $n = 0, 1, 2, \dots$

En este caso, teniendo en cuenta que $U(-n, b, z)$ se reduce al polinomio de Laguerre de grado n en z ,

$$U(-n, b, z) = (-1)^n n! L_n^{(b-1)}(z), \quad (154)$$

obtenemos $\phi_1(x) \sim x^\alpha$ y $\phi_2(x) \sim x^{\alpha+1}$ para $0 < x \ll 1$. En consecuencia, si $\alpha \geq 1/2$, Q_\pm^\dagger tiene un espectro real no degenerado y simétrico respecto del origen, dado por los autovalores,

$$\lambda_0 = 0, \quad \lambda_{\pm, n} = \pm\sqrt{2n}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (155)$$

que corresponden a las autofunciones,

$$\Phi_0 = x^\alpha e^{-x^2/2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (156)$$

y,

$$\Phi_{\pm, n} = (-1)^n n! x^\alpha e^{-x^2/2} \begin{pmatrix} L_n^{(\alpha-\frac{1}{2})}(x^2) \\ \mp \frac{x}{\sqrt{n}} L_{n-1}^{(\alpha+\frac{1}{2})}(x^2) \end{pmatrix}, \quad (157)$$

respectivamente.

2. Por su parte, si $\alpha \leq -1/2$ se puede ver que $\Phi_\lambda(x) \in \mathbf{L}_2(0, 1)$ si y sólo si $-\lambda^2/2 = \alpha - \frac{1}{2} - n$, con $n = 0, 1, 2, \dots$

En este caso, teniendo en cuenta la transformación de Kummer (véase [1], pág. 505),

$$U(1 - n - b, 2 - b, z) = z^{b-1} U(-n, b, z), \quad (158)$$

y la ecuación (154), obtenemos $\phi_1(x) \sim x^{1-\alpha}$ y $\phi_2(x) \sim x^{-\alpha}$ para $0 < x \ll 1$. Por lo tanto, si $\alpha \leq -1/2$, Q_+^\dagger tiene un espectro real no degenerado y simétrico respecto del origen, dado por los autovalores,

$$\lambda_{\pm, n} = \pm \sqrt{2n + 1 - 2\alpha}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (159)$$

correspondientes a las autofunciones,

$$\Phi_{\pm, n} = (-1)^n n! x^{-\alpha} e^{-x^2/2} \begin{pmatrix} x L_n^{(\frac{1}{2}-\alpha)}(x^2) \\ \mp \sqrt{n + \frac{1}{2} - \alpha} L_n^{(-\alpha-\frac{1}{2})}(x^2) \end{pmatrix}. \quad (160)$$

Nótese que no existen modos cero para este rango de valores del parámetro α .

3. Por último, si $-1/2 < \alpha < 1/2$ se puede ver, a partir de (152), (153) y (149), que $\Phi_\lambda(x) \in \mathbf{L}_2(0, 1)$, $\forall \lambda \in \mathbb{C}$.

Esto implica que, si $|\alpha| < 1/2$, todo número complejo es un autovalor no degenerado de Q_+^\dagger . En consecuencia, la autofunción de Q_+^\dagger correspondiente a $\lambda = i$ está dada por,

$$\Phi_+(x) := \Phi_{\lambda=i}(x) = x^\alpha e^{-x^2/2} \begin{pmatrix} U\left(\frac{1}{2}, \alpha + \frac{1}{2}, x^2\right) \\ -\frac{i}{\sqrt{2}} x U\left(\frac{3}{2}, \alpha + \frac{3}{2}, x^2\right) \end{pmatrix}, \quad (161)$$

en tanto que la autofunción correspondiente a $\lambda = -i$ está dada por su complejo conjugado,

$$\Phi_-(x) := \Phi_{\lambda=-i}(x) = \Phi_+(x)^*, \quad (162)$$

dado que los coeficientes del operador diferencial de la ecuación (142) son reales.

Nótese que, como hemos señalado, la dimensión del subespacio $\text{Ker}(Q_+^\dagger - \lambda)$ es constante en cada uno de los semiplanos $\mathcal{J}(\lambda) \neq 0$. En la sección siguiente determinaremos las extensiones autoadjuntas de Q_+ .

III.5. Extensiones autoadjuntas de la supercarga

Para construir las extensiones autoadjuntas de Q_+ debemos tener en cuenta, de acuerdo con el Corolario II.2.6, los subespacios característicos de Q_+^\dagger correspondientes al autovalor $\pm i$ calculados en la sección anterior. Veremos que si $|\alpha| \geq 1/2$ los subespacios de deficiencia son triviales y el operador Q_+ es esencialmente autoadjunto. Por el contrario, si $|\alpha| < 1/2$ los subespacios de deficiencia son unidimensionales y el operador Q_+ admite un conjunto infinito de extensiones autoadjuntas.

Si $|\alpha| \geq 1/2$ el operador Q_+ es esencialmente autoadjunto

Como hemos visto en la sección III.4.2, los índices de deficiencia de Q_+ ,

$$n_{\pm} = \dim \text{Ker} \left(Q_+^\dagger \mp i \right), \quad (163)$$

se anulan para $|\alpha| \geq 1/2$. Esto significa que Q_+ es esencialmente autoadjunto y admite una única extensión autoadjunta dada por su clausura \overline{Q}_+ .

De acuerdo con las ecuaciones (126) y (128), el hamiltoniano admite entonces una única extensión autoadjunta dada por,

$$H = \overline{Q}_+ \cdot \overline{Q}_+, \quad (164)$$

cuyo dominio de definición está dado por,

$$\mathcal{D}(H) = \{ \psi \in \mathcal{D}(\overline{Q}_+) : \overline{Q}_+ \psi \in \mathcal{D}(\overline{Q}_+) \}. \quad (165)$$

Nótese que toda autofunción de \overline{Q}_+ , correspondiente a un autovalor λ , pertenece a $\mathcal{D}(H)$. Por lo tanto, es también una autofunción de H con autovalor $E = \lambda^2$. Obtenemos entonces la siguiente descripción del espectro del hamiltoniano en el caso $|\alpha| \geq 1/2$:

- Si $\alpha \geq 1/2$, las autofunciones de H están dadas por las ecuaciones (156) y (157). Nótese que existe un único modo cero, en tanto que los restantes autovalores de H ,

$$E_n = 2n, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (166)$$

son positivos y tienen una degeneración doble (véase la ecuación (155).)

Las combinaciones $\Phi_{+,n} \pm \Phi_{-,n}$ (véase la ecuación (157) representan estados *bo-sónicos* y *fermiónicos*, esto es, con la componente inferior o superior nula, respectivamente. Para estos valores del parámetro α el índice de Witten es $\Delta = 1$ y, por consiguiente, la supersimetría es explícita.

- Si $\alpha \leq -1/2$, las autofunciones de H están dadas por la ecuación (160). Nótese que, en este caso, no existen modos cero. Los autovalores de H ,

$$E_n = 2n + 1 - 2\alpha \geq 2, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (167)$$

son todos estrictamente positivos y tienen una degeneración doble (ver ecuación (159)).

Las combinaciones $\Phi_{+,n} \pm \Phi_{-,n}$ (véase la ecuación (160)) representan estados bosónicos y fermiónicos. Para estos valores de α , la supersimetría está espontáneamente rota y, consecuentemente, el índice de Witten es $\Delta = 0$.

Si $|\alpha| < 1/2$ el operador Q_+ admite extensiones autoadjuntas no triviales

De acuerdo con las ecuaciones (161) y (162) de la sección III.4.2, si $-1/2 < \alpha < 1/2$ los índices de deficiencia son $n_{\pm} = 1$. En consecuencia, Q_+ admite una familia de extensiones autoadjuntas $Q_+^{(\gamma)}$ caracterizadas por un parámetro real γ , que está en correspondencia biunívoca con el grupo $U(1)$ de isometrías $\mathcal{U}(\gamma)$ de \mathcal{K}_+ en \mathcal{K}_- ,

$$\mathcal{U}(\gamma)\Phi_+(x) := e^{2i\gamma}\Phi_-, \quad \gamma \in [0, \pi), \quad (168)$$

siendo Φ_+ y Φ_- las funciones dadas por las ecuaciones (161) y (162), respectivamente.

Nótese que la variedad \mathcal{M} de extensiones autoadjuntas es isomorfa a $U(1)$ y posee, en consecuencia, la topología señalada en la sección II.3: $\pi_0(\mathcal{M})$ es trivial y $\pi_1(\mathcal{M}) = \mathbb{Z}$. Las subvariedades de Cayley son $\mathcal{C}_- = \{-1\}$, correspondiente a $\gamma = \pi/2$, y $\mathcal{C}_+ = \{1\}$, correspondiente a $\gamma = 0$. Las variedades $\mathcal{M} - \mathcal{C}_{\mp}$ tienen, en consecuencia, topología trivial.

El operador autoadjunto $Q_+^{(\gamma)}$ es la restricción de Q_+^{\dagger} al subespacio denso,

$$\mathcal{D}(Q_+^{(\gamma)}) \subset \mathcal{D}(Q_+^{\dagger}) = \mathcal{D}(\overline{Q}_+) \oplus \mathcal{K}_+ \oplus \mathcal{K}_-, \quad (169)$$

que consiste en las funciones de la forma,

$$\Psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} = \overline{\Psi}_0 + c(\Phi_+ + e^{2i\gamma}\Phi_-), \quad (170)$$

con $\overline{\Psi}_0 \in \mathcal{D}(\overline{Q}_+)$ y $c \in \mathbb{C}$.

La acción del operador $Q_+^{(\gamma)}$ está dada por,

$$Q_+^{(\gamma)}\Psi = Q_+^{\dagger}\overline{\Psi}_0 + ic(\Phi_+ - e^{2i\gamma}\Phi_-), \quad (171)$$

con Q_+^{\dagger} dado por la ecuación (140).

La ecuación (170) caracteriza completamente el comportamiento en el origen de las funciones $\Psi \in \mathcal{D}(Q_+^{(\gamma)})$, de modo que permite determinar el espectro de $Q_+^{(\gamma)}$. En efecto, en la sección III.7 estudiaremos el dominio de la clausura \overline{Q}_+ y mostraremos que,

$$\overline{\Psi}_0(x) \in \mathcal{D}(\overline{Q}_+) \rightarrow \overline{\Psi}_0(x) = \begin{pmatrix} o(x^\alpha) \\ o(x^{-\alpha}) \end{pmatrix}, \quad (172)$$

para $x \rightarrow 0^+$. Por su parte, se puede ver, a partir de las ecuaciones (143), (152), (153) y (149), que el comportamiento en el origen de las autofunciones Φ_λ de Q_+^\dagger está dado por,

$$\begin{aligned} \phi_1(x) &= \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2} - \alpha\right)}{\Gamma\left(\frac{1-\lambda^2}{2} - \alpha\right)} x^\alpha + O(x^{1-\alpha}), \\ \phi_2(x) &= \frac{\sqrt{2}}{\lambda} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2} + \alpha\right)}{\Gamma\left(-\frac{\lambda^2}{2}\right)} x^{-\alpha} + O(x^{1+\alpha}). \end{aligned} \quad (173)$$

Las ecuaciones (172) y (173) muestran que no existen autofunciones de Q_+^\dagger pertenecientes a $\mathcal{D}(\overline{Q}_+)$. Por consiguiente, son las contribuciones de Φ_\pm en la ecuación (170) las que determinan el espectro de $Q_+^{(\gamma)}$. En efecto, el límite,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^{-\alpha} \phi_1(x)}{x^\alpha \phi_2(x)} = \frac{\lambda}{\sqrt{2}} \frac{\Gamma\left(-\frac{\lambda^2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1-\lambda^2}{2} - \alpha\right)} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2} - \alpha\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2} + \alpha\right)}, \quad (174)$$

obtenido a partir de la ecuación (173), debe coincidir con,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^{-\alpha} \psi_1(x)}{x^\alpha \psi_2(x)} = -\sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\cot(\gamma)}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2} - \alpha\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2} + \alpha\right)}, \quad (175)$$

obtenido a partir de las ecuaciones (170) y (172).

Por lo tanto, los autovalores de $Q_+^{(\gamma)}$ son las soluciones de la ecuación trascendental,

$$f(\lambda) := \frac{\lambda \Gamma\left(-\frac{\lambda^2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1-\lambda^2}{2} - \alpha\right)} = -\frac{\sqrt{\pi} \cot(\gamma)}{\Gamma(1-\alpha)} := \beta(\gamma). \quad (176)$$

Nótese que $-\infty \leq \beta(\gamma) < \infty$ para $0 \leq \gamma < \pi$. La función $f(\lambda)$ es impar en la variable λ y ha sido representada en la Figura 1 para un valor de $\alpha = 1/4$. Los autovalores de $Q_+^{(\gamma)}$ están determinados por las *abscisa* de las intersecciones de la gráfica de $f(\lambda)$ con la recta horizontal correspondiente a la constante $\beta(\gamma)$. En la Figura 1 se ha representado además la recta horizontal $\beta(\gamma) = 3$. Las autofunciones correspondientes se obtienen de las ecuaciones (143), (152) y (153). Cabe señalar que, de acuerdo con las expresiones (173), estas autofunciones son singulares en el origen.

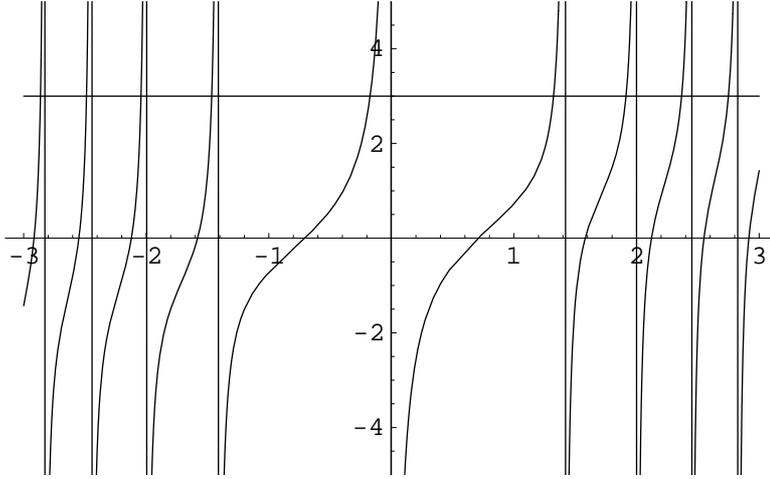


Figura 1: Las intersecciones de la función $f(\lambda)$, representada en la figura para $\alpha = 1/4$, con una recta horizontal determina el espectro de la extensión autoadjunta correspondiente; consideramos en la figura el caso $\beta(\gamma) = 3$.

Los autovalores de $Q_+^{(\gamma)}$ son, en general, no degenerados. En efecto, el espectro es simétrico con respecto al origen sólo para las extensiones autoadjuntas correspondientes a $\beta = -\infty$ ($\gamma = 0$) y $\beta = 0$ ($\gamma = \pi/2$) cuyos autovalores están dados por,

$$\lambda_{\pm,n} = \pm\sqrt{2n}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (177)$$

si $\beta = -\infty$ y por,

$$\lambda_{\pm,n} = \pm\sqrt{2n+1-2\alpha}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (178)$$

si $\beta = 0$.

En general los autovalores correspondientes al espectro de cualquier extensión autoadjunta están contenidos entre asíntotas contiguas de $\Gamma(-\lambda^2/2)$,

$$\sqrt{2n} < |\lambda_{\pm,n}| < \sqrt{2(n+1)}. \quad (179)$$

Por su parte, las extensiones autoadjuntas $H^{(\gamma)}$ del hamiltoniano están dadas por,

$$H^{(\gamma)} = Q_+^{(\gamma)} \cdot Q_+^{(\gamma)}, \quad (180)$$

sobre los dominios definidos por la ecuación (128). Estos dominios contienen, en particular, a las autofunciones de $Q_+^{(\gamma)}$ que resultan, por consiguiente, autofunciones de $H^{(\gamma)}$.

Describimos el espectro del hamiltoniano considerando separadamente distintas extensiones autoadjuntas:

- La extensión caracterizada por $\gamma = 0$ ($\beta = -\infty$) es la única extensión que posee un modo cero que es, por otra parte, no degenerado. El estado fundamental está dado por la ecuación (156). La ecuación (177) muestra que los autovalores no nulos de $H^{(0)}$ son doblemente degenerados,

$$E_n = (\lambda_{\pm,n})^2 = 2n, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (181)$$

Las combinaciones $\Phi_{+,n} \pm \Phi_{-,n}$ (véase la ecuación (157) representan autoestados bosónicos y fermiónicos del hamiltoniano, respectivamente.

Por lo tanto, las condiciones que satisfacen las funciones del dominio de $Q_+^{(0)}$ dan lugar a una extensión autoadjunta supersimétrica del hamiltoniano H . El índice de Witten es, en este caso, $\Delta = 1$.

- La extensión caracterizada por $\gamma = \pi/2$ ($\beta = 0$) no posee modos cero y tiene un espectro doblemente degenerado. En efecto, de la ecuación (178) se deduce que las energías de $H^{(\pi/2)}$ son,

$$E_n = (\lambda_{\pm,n})^2 = 2n + 1 - 2\alpha, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (182)$$

que son todas estrictamente positivas. Las combinaciones $\Phi_{+,n} \pm \Phi_{-,n}$ (véase la ecuación (160) representan autoestados bosónicos y fermiónicos del hamiltoniano, respectivamente.

Las condiciones impuestas sobre las funciones del dominio de $Q_+^{(\pi/2)}$ rompen espontáneamente la supersimetría pero preservando la degeneración del espectro. En consecuencia, el índice de Witten es $\Delta = 0$.

- Los valores de $\gamma \neq 0, \pi/2$ definen extensiones autoadjuntas del hamiltoniano que no poseen modos cero y que tienen un espectro no degenerado. Los autovalores de $H^{(\gamma)}$ están dados por los cuadrados de las soluciones de la ecuación (176).

Estas extensiones autoadjuntas, a diferencia de $H^{(0)}$ y $H^{(\pi/2)}$, no poseen autofunciones correspondientes a estados bosónicos ni fermiónicos (véanse las ecuaciones (152) y (153).) La condición de contorno que define el dominio de $Q_+^{(\gamma)}$ no solo rompe la supersimetría, sino también la degeneración del espectro. El índice de Witten es, por consiguiente, $\Delta = 0$.

III.5.1. Límite regular

Es interesante considerar el caso $\alpha = 0$, en el que el superpotencial, dado por la ecuación (122), es regular en el origen.

III.5 EXTENSIONES AUTOADJUNTAS DE LA SUPERCARGA

En este caso, las funciones en $\mathcal{D}(Q_+^{(\gamma)})$ tienden a valores finitos para $x \rightarrow 0^+$, como se deduce de la ecuación (173),

$$\begin{aligned} \bar{\Phi}_0(x) &= o(x^0), \\ \Phi_+(x) + e^{2i\gamma}\Phi_-(x) &= 2^{3/2} e^{i\gamma} \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cos \gamma \\ -\sin \gamma \end{pmatrix} + O(x). \end{aligned} \quad (183)$$

Por lo tanto, el dominio de $Q_+^{(\gamma)}$ puede ser caracterizado por una condición de contorno local de la forma,

$$\Phi \in \mathcal{D}(Q_+^{(\gamma)}) \Rightarrow \begin{pmatrix} \sin \gamma & \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cos \gamma \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \phi_1(0) \\ \phi_2(0) \end{pmatrix} = 0. \quad (184)$$

Los valores particulares $\gamma = 0$ y $\gamma = \pi/2$ conducen a las condiciones de contorno $\phi_2(0) = 0$ y $\phi_1(0) = 0$, respectivamente.

Como hemos mencionado en la sección III.5, para $\gamma = 0$ la supersimetría es explícita. El modo cero de $H^{(0)}$ está dado por,

$$\Phi_0 = \begin{pmatrix} e^{-x^2/2} \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (185)$$

Por su parte, los autovalores del hamiltoniano están dados por $E_n = 2n$, $n = 1, 2, \dots$ (véase la ecuación (181)), son doblemente degenerados y las correspondientes autofunciones toman la forma (véanse ecuaciones (152) y (153)),

$$\Phi_{\pm,n}(x) = \frac{e^{-x^2/2}}{2^{2n}} \begin{pmatrix} H_{2n}(x) \\ \pm 2\sqrt{n} H_{2n-1}(x) \end{pmatrix}, \quad (186)$$

donde $H_n(x)$ son los polinomios Hermite. Nótese que la componente inferior y la derivada de la componente superior de los autovectores se anulan en el origen.

Para $\gamma = \pi/2$ la supersimetría está espontáneamente rota pues no existen modos cero. Los autovalores de $H^{(\pi/2)}$ están dados por $E_n = 2n + 1$, $n = 0, 1, \dots$ (véase la ecuación (182)), son doblemente degenerados y las correspondientes autofunciones toman la forma (véanse las ecuaciones (152) y (153)),

$$\Phi_{\pm,n}(x) = \frac{e^{-x^2/2}}{2^{2n+1}} \begin{pmatrix} H_{2n+1}(x) \\ \mp \sqrt{4n+2} H_{2n}(x) \end{pmatrix}. \quad (187)$$

En este caso, la componente superior y la derivada de la componente inferior del autovector se anula en el origen.

Para valores del parámetro $\gamma \neq 0, \pi/2$, la supersimetría también está espontáneamente rota pues no existen modos cero pero el espectro es no degenerado. Vemos entonces que, a excepción de $\gamma = 0$, las condiciones de contorno en el origen que definen el operador autoadjunto $Q_+^{(\gamma)}$ y el operador autoadjunto $H^{(\gamma)}$ rompen la supersimetría.

III.6. Realización del álgebra de N=2 SUSYQM

Como hemos señalado, las extensiones autoadjuntas $Q_-^{(\gamma)}$ de la supercarga Q_- se obtienen a partir de la transformación unitaria,

$$Q_-^{(\gamma)} = e^{i\pi\sigma_3/4} Q_+^{(\gamma)} e^{-i\pi\sigma_3/4}. \quad (188)$$

Los correspondientes dominios de definición están dados por,

$$\mathcal{D}(Q_-^{(\gamma)}) = \left\{ \psi : e^{-i\pi\sigma_3/4} \psi \in \mathcal{D}(Q_+^{(\gamma)}) \right\} = e^{i\pi\sigma_3/4} \left(\mathcal{D}(Q_+^{(\gamma)}) \right). \quad (189)$$

En consecuencia, $Q_-^{(\gamma)}$ constituye una representación equivalente de la supercarga que, desde luego, presenta el mismo espectro que $Q_+^{(\gamma)}$. Asimismo, su cuadrado, definido sobre el conjunto,

$$\begin{aligned} \mathcal{D}\left((Q_-^{(\gamma)})^2\right) &= \left\{ \psi \in \mathcal{D}(Q_-^{(\gamma)}) : Q_-^{(\gamma)} \psi \in \mathcal{D}(Q_-^{(\gamma)}) \right\} = \\ &= \left\{ \psi : e^{-i\pi\sigma_3/4} \psi \in \mathcal{D}(Q_+^{(\gamma)}) \wedge e^{-i\pi\sigma_3/4} Q_-^{(\gamma)} \psi = Q_+^{(\gamma)} e^{-i\pi\sigma_3/4} \psi \in \mathcal{D}(Q_+^{(\gamma)}) \right\} = \\ &= e^{i\pi\sigma_3/4} \left(\mathcal{D}(H^{(\gamma)}) \right), \end{aligned} \quad (190)$$

constituye una representación equivalente de la extensión autoadjunta del hamiltoniano $H^{(\gamma)}$.

Ahora bien, las dos representaciones equivalentes del hamiltoniano $H^{(\gamma)}$ dadas por los cuadrados de las supercargas $Q_{\pm}^{(\gamma)}$ coinciden únicamente si el dominio $\mathcal{D}(Q_+^{(\gamma)})$ es invariante ante la transformación unitaria $e^{i\pi\sigma_3/4}$ y, en virtud de la relación (175), esto sólo es válido para las extensiones autoadjuntas correspondientes a $\gamma = 0, \pi/2$.

En consecuencia, sólo para los valores $\gamma = 0, \pi/2$ tienen sentido las composiciones,

$$Q_+^{(\gamma)} Q_-^{(\gamma)} \quad \text{y} \quad Q_-^{(\gamma)} Q_+^{(\gamma)}, \quad (191)$$

en el dominio $\mathcal{D}(H^{(\gamma)})$, donde se satisface además el álgebra de la SUSY con $N = 2$,

$$\left\{ Q_+^{(\gamma)}, Q_-^{(\gamma)} \right\} = 0, \quad H^{(\gamma)} = \left(Q_+^{(\gamma)} \right)^2 = \left(Q_-^{(\gamma)} \right)^2. \quad (192)$$

Para los restantes valores de γ , el dominio $\mathcal{D}(Q_+^{(\gamma)})$ no es invariante frente a $e^{i\pi\sigma_3/4}$ y no existe un dominio denso del espacio de Hilbert donde puedan definirse las composiciones (191). Por lo tanto, para estos casos existe una única supercarga y el álgebra de la SUSY se reduce a,

$$H^{(\gamma)} = \left(Q_+^{(\gamma)} \right)^2. \quad (193)$$

III.7 CLAUSURA DEL OPERADOR

Cabe señalar que la doble degeneración de los autovalores no nulos de $H^{(\gamma)}$ para $\gamma = 0, \pi/2$ es consecuencia de la existencia de dos supercargas. En efecto, si,

$$Q_+^{(\gamma)} \phi_\lambda = \lambda \phi_\lambda, \quad (194)$$

para $\phi_\lambda \in \mathcal{D}(Q_+^{(\gamma)})$ y $\lambda \neq 0$, entonces las relaciones (192) implican que,

$$Q_+^{(\gamma)} \left(Q_-^{(\gamma)} \phi_\lambda \right) = -Q_-^{(\gamma)} \left(Q_+^{(\gamma)} \phi_\lambda \right) = -\lambda \left(Q_-^{(\gamma)} \phi_\lambda \right), \quad (195)$$

por lo que $Q_-^{(\gamma)} \phi_\lambda$ es un autovector de autovalor $-\lambda$ de $Q_-^{(\gamma)}$ y, en consecuencia, $Q_-^{(\gamma)} \phi_\lambda \perp \phi_\lambda$, con,

$$\| Q_-^{(\gamma)} \phi_\lambda \|^2 = \left(\phi_\lambda, \left(Q_-^{(\gamma)} \right)^2 \phi_\lambda \right) = \lambda^2 \| \phi_\lambda \|^2 \neq 0. \quad (196)$$

En conclusión, las condiciones de contorno en $x = 0$ rompen, en general, la SUSY $N=2$, eliminando un generador. Esto implica que el espectro de la supercarga no sea simétrico y el del hamiltoniano resulte no degenerado.

Las únicas excepciones son a las extensiones autoadjuntas correspondientes a $\gamma = 0, \pi/2$, para las que se obtiene SUSY con $N = 2$ (dos generadores de la SUSY). Las dos supercargas presentan espectros simétricos y los estados excitados del hamiltoniano son doblemente degenerados.

Finalmente, para $\gamma = 0$ el estado fundamental tiene energía nula y la SUSY es manifiesta, en tanto que para $\gamma = \pi/2$ el estado fundamental tiene energía estrictamente positiva y la SUSY está espontáneamente rota.

III.7. Clausura del operador

En esta sección estudiaremos la clausura del operador Q_+ definido sobre $\mathcal{D}(Q_+) = \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^+) \otimes \mathbb{C}^2$ y demostraremos que, cerca del origen, las funciones $\bar{\Phi}_0(x) \in \mathcal{D}(\bar{Q}_+)$ verifican el comportamiento (172), para todo $|\alpha| < 1/2$. Esto permitió omitir las contribuciones de las funciones pertenecientes a $\mathcal{D}(\bar{Q}_+)$ en el límite $x \rightarrow 0^+$ del miembro derecho de la ecuación (170) y arribar a la ecuación (175).

Para determinar la clausura de la gráfica de Q_+ debemos considerar las sucesiones de Cauchy,

$$\left\{ \Phi_n = \begin{pmatrix} \phi_{1,n} \\ \phi_{2,n} \end{pmatrix} \right\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{D}(Q_+) := \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^+), \quad (197)$$

tales que $\{Q_+ \Phi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ son también sucesiones de Cauchy.

En este caso, $\{\phi_{1,n}\}_{n \in \mathbb{N}}$, $\{\phi_{2,n}\}_{n \in \mathbb{N}}$, $\{D_1 \phi_{1,n}\}_{n \in \mathbb{N}}$ y $\{D_2 \phi_{2,n}\}_{n \in \mathbb{N}}$ son sucesiones de Cauchy en $L_2([0, 1])$, siendo D_1 y D_2 los operadores diferenciales dados por las ecuaciones (123) y (124) respectivamente.

Por otra parte, como x está acotado en $[0, 1]$ y la suma de dos sucesiones de Cauchy es también una sucesión de Cauchy, se deduce que,

$$\left\{ \phi'_{1,n}(x) - \frac{\alpha}{x} \phi_{1,n}(x) \right\}_{n \in \mathbb{N}}, \quad (198)$$

y,

$$\left\{ \phi'_{2,n}(x) + \frac{\alpha}{x} \phi_{2,n}(x) \right\}_{n \in \mathbb{N}}, \quad (199)$$

son sucesiones de Cauchy en $\mathbf{L}_2(0, 1)$.

Asimismo, como $x^{\pm\alpha} \in \mathbf{L}_2([0, 1])$ para todo $-1/2 < \alpha < 1/2$ se verifica,

$$\left\{ x^{-\alpha} \left(\phi'_{1,n}(x) - \frac{\alpha}{x} \phi_{1,n}(x) \right) \right\}_{n \in \mathbb{N}} = \left\{ (x^{-\alpha} \phi_{1,n}(x))' \right\}_{n \in \mathbb{N}} \quad (200)$$

y

$$\left\{ x^{\alpha} \left(\phi'_{2,n}(x) + \frac{\alpha}{x} \phi_{2,n}(x) \right) \right\}_{n \in \mathbb{N}} = \left\{ (x^{\alpha} \phi_{2,n}(x))' \right\}_{n \in \mathbb{N}} \quad (201)$$

son sucesiones de Cauchy en $\mathbf{L}_1([0, 1])$.

Ahora bien, teniendo en cuenta que estas funciones se anulan idénticamente en una vecindad del origen, se puede probar que $\{x^{-\alpha} \phi_{1,n}(x)\}_{n \in \mathbb{N}}$ y $\{x^{\alpha} \phi_{2,n}(x)\}_{n \in \mathbb{N}}$ convergen uniformemente en $[0, 1]$. En efecto, $\forall x \in [0, 1]$ se verifica,

$$\begin{aligned} & \left| x^{\pm\alpha} [\phi_{1,n}(x) - \phi_{1,m}(x)] \right| = \\ & = \left| \int_0^x (y^{\pm\alpha} [\phi_{1,n}(y) - \phi_{1,m}(y)])' dy \right| \leq \\ & \leq \left\| (x^{\pm\alpha} \phi_{1,n}(x))' - (x^{\pm\alpha} \phi_{1,m}(x))' \right\|_{\mathbf{L}_1(0,1)} \xrightarrow{n,m \rightarrow \infty} 0. \end{aligned} \quad (202)$$

Por lo tanto, existen dos funciones continuas, $x^{-\alpha} \bar{\phi}_1(x)$ y $x^{\alpha} \bar{\phi}_2(x)$, que son sus límites uniformes en $[0, 1]$,

$$x^{-\alpha} \bar{\phi}_1(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} x^{-\alpha} \phi_{1,n}(x), \quad (203)$$

$$x^{\alpha} \bar{\phi}_2(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} x^{\alpha} \phi_{2,n}(x).$$

Por consiguiente,

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^{-\alpha} \bar{\phi}_1(x) = 0, \quad (204)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^{\alpha} \bar{\phi}_2(x) = 0.$$

Por otra parte, el límite de la sucesión $\{\Phi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ en $\mathbf{L}_2((0, 1))$ está dado por,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Phi_n = \bar{\Phi}_0 = \begin{pmatrix} \bar{\phi}_1 \\ \bar{\phi}_2 \end{pmatrix}. \quad (205)$$

III.7 CLAUSURA DEL OPERADOR

En efecto, teniendo en cuenta que, para todo $\varepsilon > 0$,

$$\left| x^{-\alpha} [\phi_{1,n}(x) - \bar{\phi}_1(x)] \right| < \varepsilon, \quad \forall x \in [0, 1], \quad (206)$$

si n es suficientemente grande, se deduce,

$$\begin{aligned} & \|\phi_{1,n} - \bar{\phi}_1\|_{\mathbf{L}_2(0,1)}^2 = \\ & = \int_0^1 x^{2\alpha} \left| x^{-\alpha} (\phi_{1,n}(x) - \bar{\phi}_1(x)) \right|^2 < \\ & < \varepsilon^2 \|x^\alpha\|_{\mathbf{L}_2(0,1)}^2. \end{aligned} \quad (207)$$

Se procede análogamente para la componente inferior. La ecuación (172) se deduce de las ecuaciones (205) y (204).

Como la gráfica de Q_+^\dagger es cerrada [101], contiene a la gráfica de \bar{Q}_+ . Verificaremos, para finalizar, que efectivamente la función $\bar{\Phi}_0$ pertenece a $\mathcal{D}(Q_+^\dagger)$.

Sea $\rho_1(x)$ el límite en $\mathbf{L}_1(0, 1)$ de la sucesión de Cauchy dada por la ecuación (200),

$$\rho_1(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} (x^{-\alpha} \phi_{1,n}(x))'. \quad (208)$$

Entonces, dado $\varepsilon > 0$, $\forall x \in [0, 1]$, se verifica,

$$\begin{aligned} & \left| x^{-\alpha} \phi_{1,n}(x) - \int_0^x \rho_1(y) dy \right| = \\ & = \left| \int_0^x [(y^{-\alpha} \phi_{1,n}(y))' - \rho_1(y)] dy \right| \leq \\ & \leq \left\| (y^{-\alpha} \phi_{1,n}(y))' - \rho_1(y) \right\|_{\mathbf{L}_1(0,1)} < \varepsilon, \end{aligned} \quad (209)$$

para n suficientemente grande.

Como el límite uniforme es único, se deduce de las ecuaciones (203) y (209),

$$\bar{\phi}_1(x) = x^\alpha \int_0^x \rho_1(y) dy, \quad (210)$$

con $\rho_1 \in \mathbf{L}_1(0, 1)$. Por consiguiente, $\bar{\phi}_1(x)$ es absolutamente continua para $x > 0$. La misma conclusión se obtiene análogamente para la componente inferior $\bar{\phi}_1(x)$ de $\bar{\Phi}_0$.

Parte IV

Funciones Espectrales

*The divergent series are the invention of the devil,
and it is a shame to base on them any demonstration whatsoever.
By using them, one may draw any conclusion he pleases
and that is why these series have produced
so many fallacies and so many paradoxes.
(Niels H. Abel.)*

IV.1. Operadores pseudodiferenciales

Los trabajos precursores en la teoría de los operadores pseudodiferenciales u operadores de Calderón-Zygmund se deben a Mikhlín [91] y Calderón y Zygmund [24]. Referencias acerca del desarrollo de esta teoría pueden encontrarse en los trabajos de P.B. Gilkey [66] y S.G. Krantz [83].

En este capítulo haremos una breve presentación de los operadores pseudodiferenciales como generalización de los operadores diferenciales. El orden de un operador diferencial es, desde luego, un entero positivo, en tanto que el orden de los operadores pseudodiferenciales puede tomar cualquier valor real. En este sentido, veremos que, en una dimensión, los operadores pseudodiferenciales de orden menor que -1 representan operadores integrales. De modo que al considerar el conjunto Ψ^d de operadores pseudodiferenciales de orden $d \in \mathbb{R}$ podremos tratar en un mismo formalismo a los operadores diferenciales y a sus inversos.

Sin embargo, así como los operadores diferenciales de orden $d \in \mathbb{N}$ actúan sobre funciones que admiten d derivadas, para tratar con operadores de orden $d \in \mathbb{R}$ deberemos definir, primeramente, un conjunto de funciones que admitan “derivada” de orden $d \in \mathbb{R}$. Este conjunto se denomina espacio de Sobolev \mathbf{H}_d . Tanto la definición de los espacios de Sobolev \mathbf{H}_d como la de los operadores pseudodiferenciales Ψ^d se expresan en términos de la transformación de Fourier \mathcal{F} .

Sean $d \in \mathbb{R}$ y $f(x)$ una función que pertenece al espacio de Schwartz $\mathcal{S} \subset \mathbf{L}_2(\mathbb{R})$, esto es, tal que admite derivadas continuas de todo orden que decrecen más rápido que cualquier potencia de x cuando $|x| \rightarrow \infty$. Definimos a continuación la transformada de Fourier $\mathcal{F}\{f\}(p)$, la norma $\|\cdot\|_d$ en S y los espacios de Sobolev $\mathbf{H}_d(\mathbb{R})$.

Definición IV.1.1 Dado que $\mathcal{S} \subset \mathbf{L}_1(\mathbb{R})$, definimos la **transformada de Fourier** $\mathcal{F}\{f\}(p)$ de la función $f(x)$,

$$\mathcal{F}\{f\}(p) := \int_{\mathbb{R}} e^{-ipx} f(x) \frac{dx}{\sqrt{2\pi}}. \quad (211)$$

Definición IV.1.2

$$\|f\|_d^2 := \int_{\mathbb{R}} (1 + |p|^2)^d |\mathcal{F}\{f\}(p)|^2 dp. \quad (212)$$

Definición IV.1.3 *El espacio de Sobolev $\mathbf{H}_d(\mathbb{R})$ es la clausura de S con respecto a la norma $\|\cdot\|_d$.*

Enunciamos, sin demostración, dos propiedades de los espacios de Sobolev. , si $f(x) \in \mathbf{H}_d(\mathbb{R})$ entonces $f(x) \in \mathcal{C}^k(\mathbb{R})$, para todo $k < d - 1/2$ (Lema de Sobolev [67].) Esta propiedad indica que una función admite derivadas continuas de cierto orden si pertenece a un espacio de Sobolev con índice suficientemente grande.

Por otra parte, si d es un entero positivo, $\mathbf{H}_d(\mathbb{R})$ coincide con el conjunto de funciones de $\mathbf{L}_2(\mathbb{R})$ que admiten derivadas generalizadas en $\mathbf{L}_2(\mathbb{R})$ de orden d (véase la ecuación (70).)

Consideremos, ahora, un operador diferencial regular A de orden $d \in \mathbb{N}$ que actúa sobre elementos de $\mathbf{H}_d(\mathbb{R}) \otimes \mathbb{C}^k$, *i.e.*, sobre funciones con dominio en \mathbb{R} que toman valores en un espacio vectorial de dimensión k y que admiten d derivadas en $\mathbf{L}_2(\mathbb{R})$. El operador A puede expresarse de la siguiente manera,

$$A = \sum_{n=0}^d A_n(x)(-i\partial_x)^n. \quad (213)$$

Los coeficientes $A_n(x)$ son funciones infinitamente derivables sobre \mathbb{R} que toman valores en el espacio de matrices $\mathbb{C}^{k \times k}$.

Es conveniente, antes de introducir el concepto de operador pseudodiferencial, definir el **símbolo** $\sigma\{A\}(x, p)$ del operador diferencial A :

$$\sigma\{A\}(x, p) := \sum_{n=0}^d A_n(x)p^n. \quad (214)$$

De acuerdo con esta definición, la acción de A sobre una función $f(x)$ del espacio de Schwartz S está representada por la acción de su símbolo $\sigma\{A\}(x, p)$ sobre su transformada de Fourier $\mathcal{F}\{f\}(p)$,

$$Af(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{ipx} \sigma\{A\}(x, p) \cdot \mathcal{F}\{f\}(p) \frac{dp}{\sqrt{2\pi}}. \quad (215)$$

El símbolo $\sigma\{A\}(x, p)$ de un operador diferencial A de orden d es un polinomio de grado d en la variable p . Para definir operadores pseudodiferenciales simplemente extendemos la definición de símbolo.

Definición IV.1.4 Sean $d \in \mathbb{R}$ y $S^d \subset \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2)$ un subconjunto de funciones $\xi(x, p)$ para las que, dado un par de enteros positivos m, n , existe una constante $C_{m,n}$ tal que,

$$|\partial_x^m \partial_p^n \xi(x, p)| \leq C_{m,n} (1 + |p|)^{d-n}. \quad (216)$$

Sea, también, $S^{-\infty} := \bigcap_d S^d$.

Nótese que el símbolo $\sigma\{A\}(x, p)$ de un operador diferencial A , que es un polinomio en p de grado $d \in \mathbb{N}$, pertenece al conjunto S^d . Asimismo, toda función $\xi(x, p)$ que sea un polinomio de grado d en p con coeficientes dependientes de x tiene asociado un operador diferencial de orden d cuyo símbolo está dado por $\xi(x, p)$. Definiremos el conjunto Ψ de operadores pseudodiferenciales asociando un operador a toda función $\xi(x, p) \in S^d$.

Definición IV.1.5 Dados $\xi(x, p) \in S^d$, $d \in \mathbb{R}$ y $f(x) \in \mathcal{S}$, definimos el **operador pseudodiferencial** P como aquel que asigna a la función $f(x)$ la imagen,

$$Pf(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{ipx} \xi(x, p) \cdot \mathcal{F}\{f\}(p) \frac{dp}{\sqrt{2\pi}}. \quad (217)$$

El conjunto de operadores así definido será denotado por Ψ^d . Llamaremos, a su vez, $\Psi^{-\infty}$ al conjunto de operadores definido análogamente por funciones $\xi(x, p) \in S^{-\infty}$.

Aunque la definición IV.1.5 asigna a cada función $\xi(x, p) \in S^d$ un operador pseudodiferencial P que actúa sobre las funciones de \mathcal{S} , es posible extender el dominio de definición de P a los espacios de Sobolev.

Para extender la acción del operador P a las funciones de $\mathbf{H}_n(\mathbb{R})$, con $n \in \mathbb{R}$, enunciaremos sin demostración la siguiente propiedad [66]. Si $f \in \mathcal{S}$, entonces, se verifica $\|Pf(x)\|_{n-d} < C \|f\|_n$ (véase la ecuación (212)), donde C es una constante independiente de f . Por consiguiente, si una sucesión de funciones en \mathcal{S} converge a una función en la norma $\|\cdot\|_n$, entonces sus imágenes por P convergen en la norma $\|\cdot\|_{n-d}$. De esta manera, la acción de P puede extenderse a las funciones de $\mathbf{H}_n(\mathbb{R})$.

Por otra parte, se verifica [66],

$$P \in \Psi^d \Rightarrow P : \mathbf{H}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbf{H}_{n-d}(\mathbb{R}). \quad (218)$$

Esta propiedad es bien conocida en el caso de operadores diferenciales cuando $n > d$. Los operadores diferenciales de orden d actúan sobre funciones que admiten n derivadas generalizadas y sus imágenes son funciones que admiten $n - d$ derivadas. Esta propiedad se extiende al caso de operadores pseudodiferenciales definidos sobre espacios de Sobolev.

Cabe destacar que, de acuerdo con (218), los operadores pseudodiferenciales de orden negativo hacen más “suaves” a las funciones. Veremos, por ejemplo, que $\Psi^{-\infty}$ contiene a los operadores integrales de núcleo infinitamente derivable y puede probarse sin dificultad que la imagen de una función por uno de tales operadores admite a su vez infinitas derivadas.

El conjunto de operadores pseudodiferenciales contiene a los operadores diferenciales y a los integrales. En el presente capítulo deseamos estudiar algunas propiedades del operador integral resolvente $(A - \lambda)^{-1}$ correspondiente a un operador diferencial A . La teoría de los operadores pseudodiferenciales nos permite obtener una aproximación del símbolo del operador $(A - \lambda)^{-1}$ en términos del símbolo del operador A . Para ello necesitamos una manera de obtener el símbolo de la composición de dos operadores pseudodiferenciales. Una vez más, comenzaremos por estudiar el símbolo de la composición de dos operadores diferenciales.

Si P y Q son dos operadores diferenciales de orden d y e , respectivamente,

$$P = \sum_{n=0}^d P_n(x)(-i\partial_x)^n, \quad (219)$$

$$Q = \sum_{n=0}^e Q_n(x)(-i\partial_x)^n, \quad (220)$$

sus símbolos están dados por,

$$\sigma\{P\}(x, p) = \sum_{n=0}^d P_n(x)p^n, \quad (221)$$

$$\sigma\{Q\}(x, p) = \sum_{n=0}^e Q_n(x)p^n. \quad (222)$$

De acuerdo con la regla de Leibnitz,

$$(-i\partial_x)^n(f(x)g(x)) = \sum_{m=0}^n \binom{n}{m} (-i\partial_x)^m f(x)(-i\partial_x)^{n-m} g(x). \quad (223)$$

Por lo tanto, la composición PQ es un operador diferencial de orden $e + d$ cuyo símbolo $\sigma\{PQ\}$ está dado por,

$$\begin{aligned} \sigma\{PQ\} &= \sigma \left\{ \sum_{n=0}^d \sum_{m=0}^e P_n(x)(-i\partial_x)^n (Q_m(x)(-i\partial_x)^m) \right\} = \\ &= \sum_{n=0}^d \sum_{m=0}^e P_n(x) \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-i\partial_x)^k (Q_m(x)) p^{m+n-k} = \\ &= \sum_{n=0}^d \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} P_n(x) \frac{(n-k)!}{n!} \partial_p^k p^n (-i\partial_x)^k (\sigma\{Q\}) = \\ &= \sum_{k=0}^d \sum_{n=k}^d \frac{1}{k!} P_n(x) \partial_p^k p^n (-i\partial_x)^k (\sigma\{Q\}) = \\ &= \sum_{k=0}^d \frac{1}{k!} \partial_p^k (\sigma\{P\}) \cdot (-i\partial_x)^k (\sigma\{Q\}). \end{aligned} \quad (224)$$

Cabe preguntarse si el símbolo de la composición de dos operadores pseudodiferenciales está dado por una ecuación similar a (224).

Puede probarse [66] que los símbolos de los operadores pseudodiferenciales satisfacen la siguiente relación,

$$\sigma\{PQ\} \sim \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \partial_p^k (\sigma\{P\}) \cdot (-i\partial_x)^k (\sigma\{Q\}) , \quad (225)$$

en la que \sim significa que para todo N , no importa cuán grande, existe un $K(N)$ suficientemente grande tal que la diferencia,

$$\sigma\{PQ\} - \sum_{k=0}^{K(N)} \frac{1}{k!} \partial_p^k (\sigma\{P\}) \cdot (-i\partial_x)^k (\sigma\{Q\}) \in S^{-N} . \quad (226)$$

En otros términos, la relación (225) significa que la diferencia entre el operador PQ y el operador pseudodiferencial cuyo símbolo está dado por un número finito de términos de la suma del miembro derecho de (225) pertenece a la clase Ψ^{-N} , para N arbitrariamente grande, si se consideran un número suficiente de términos de la suma. La ecuación (225) no implica la convergencia de la serie sino que provee un desarrollo asintótico del símbolo de la composición de dos operadores pseudodiferenciales; esto será suficiente para nuestro propósito de estudiar el desarrollo asintótico del núcleo del operador integral $(A - \lambda)^{-1}$ para grandes valores de $|\lambda|$.

IV.1.1. Operadores integrales

Antes de definir las funciones espectrales de un operador diferencial A , entre las que se cuenta la resolvente $(A - \lambda)^{-1}$, presentaremos a los operadores integrales desde la perspectiva de los operadores pseudodiferenciales.

La acción de un operador integral P sobre una función $f(x)$ de su dominio está dada por,

$$Pf(x) = \int_{\mathbb{R}} K(x, x') f(x') dx' . \quad (227)$$

La función $K(x, y)$ es el **núcleo** del operador P . Como los operadores integrales pertenecen al conjunto de operadores pseudodiferenciales, cabe preguntarse qué relación existe entre el núcleo $K(x, y)$ del operador P y su símbolo $\sigma\{P\}(x, p)$.

Esta relación se obtiene fácilmente a partir de las siguientes expresiones,

$$\begin{aligned} Pf(x) &= \int_{\mathbb{R}} e^{-ipx} \sigma\{P\}(x, p) \cdot \mathcal{F}\{f\}(p) \frac{dp}{\sqrt{2\pi}} = \\ &= \int_{\mathbb{R}} e^{-ipx} \sigma\{P\}(x, p) \int_{\mathbb{R}} e^{ipx'} f(x') \frac{dx'}{\sqrt{2\pi}} \frac{dp}{\sqrt{2\pi}} = \\ &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} e^{-ip(x-x')} \sigma\{P\}(x, p) \frac{dp}{2\pi} f(x') dx' . \end{aligned} \quad (228)$$

Comparando las ecuaciones (228) y (227) deducimos que la relación entre el núcleo y el símbolo del operador P está dada por,

$$K(x, x') = \int_{\mathbb{R}} e^{-ip(x-x')} \sigma\{P\}(x, p) \frac{dp}{2\pi}. \quad (229)$$

De acuerdo con esta expresión, el valor del núcleo $K(x, x')$ en la diagonal, esto es, para $x = x'$, se escribe,

$$K(x, x) = \int_{\mathbb{R}} \sigma\{P\}(x, p) \frac{dp}{2\pi}. \quad (230)$$

Debe observarse que estas ecuaciones son válidas en tanto exista la posibilidad de intercambiar el orden de integración en la ecuación (228). De acuerdo con el Teorema de Fubini, esto es posible si el integrando converge absolutamente, esto es, si $d < -1$.

En consecuencia, como hemos mencionado, los operadores pseudodiferenciales de orden $d < -1$ en una dimensión son operadores integrales. La relación entre el núcleo y el símbolo del operador está dada por la ecuación (229) en la cual la integral es convergente.

IV.2. Funciones espectrales

Consideremos, sobre una variedad de base M de dimensión m con borde, un operador diferencial autoadjunto A de orden d que admite un conjunto de autovalores reales $\{\lambda_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ correspondientes a autovectores $\{\phi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ que forman una base ortonormal y completa del espacio de Hilbert \mathcal{H} . El dominio $\mathcal{D}(A)$ del operador está caracterizado por condiciones de contorno que aseguran que A sea autoadjunto.

Definiremos tres funciones espectrales de nuestro interés asociadas al operador A . Todas ellas corresponden a la traza de sendos operadores integrales: $(A - \lambda)^{-1}$, e^{-tA} , A^{-s} ; siendo $\lambda \in \mathbb{C} - \{\lambda_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, $t \in \mathbb{R}^+$ y $s \in \mathbb{C}$ con $\Re(s)$ suficientemente grande. Estos operadores están caracterizados por sus respectivos núcleos: $G(x, x', \lambda)$, $K(x, x', t)$, $\zeta_A(x, x', s)$. El operador $(A - \lambda)^{-1}$ es la **resolvente**, $K(x, x', t)$ es el **heat-kernel** y $\zeta_A(s) := \text{Tr } A^{-s}$ es la **función- ζ** del operador diferencial A .

Enunciamos a continuación algunas propiedades de estos operadores integrales:

- Dada una función $f(x) \in \mathcal{H}$, el operador $(A - \lambda)^{-1}$ permite resolver la ecuación diferencial:

$$(A - \lambda)\phi(x) = f(x), \quad (231)$$

en la que $\phi(x)$ satisface las condiciones de contorno sobre el borde ∂M que definen el dominio del operador A . La solución de este problema está dada por,

$$\phi(x) = (A - \lambda)^{-1}f(x), \quad (232)$$

siendo $(A - \lambda)^{-1}$ un operador integral cuyo núcleo es,

$$G(x, x', \lambda) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{\phi_n(x) \phi_n^*(x')}{\lambda_n - \lambda}. \quad (233)$$

En consecuencia, la traza de la resolvente está dada por,

$$\text{Tr}(A - \lambda)^{-1} = \int_M G(x, x, \lambda) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{\lambda_n - \lambda}. \quad (234)$$

La convergencia de la serie en la ecuación (234) está condicionada por el comportamiento asintótico de los autovalores de A que, como veremos en esta misma sección, se rige por la estructura de singularidades de la función $\zeta_A(s)$.

En el caso de operadores regulares sobre variedades compactas, las singularidades de la función $\zeta_A(s)$ están dadas por la ecuación (1) que, como mostraremos, implican un comportamiento asintótico de los autovalores de la forma $\lambda_n \sim n^{d/m}$. En consecuencia, la serie de la ecuación (234) converge, para operadores regulares, si el orden d del operador diferencial es mayor que la dimensión m de la variedad de base²¹.

Si el operador diferencial A está definido sobre funciones del intervalo $[0, 1] \subset \mathbb{R}$, existe otra manera de expresar la traza de la resolvente que será, en lo sucesivo, de mayor utilidad. El núcleo $G(x, x', \lambda)$ del operador $(A - \lambda)^{-1}$, denominado también **función de Green** del operador $A - \lambda$, satisface, en virtud de la ecuación (233),

$$(A - \lambda)G(x, x', \lambda) = \delta(x - x'). \quad (235)$$

Esta ecuación define, junto con las condiciones de contorno apropiadas en $x = 0$ y $x = 1$, la función $G(x, x', \lambda)$.

La solución de la ecuación (235) está dada por,

$$G(x, x', \lambda) = -\frac{\theta(x' - x)L(x, \lambda)R(x', \lambda) + \theta(x - x')L(x', \lambda)R(x, \lambda)}{W[L, R](\lambda)}. \quad (236)$$

Las funciones $L(x, \lambda)$, $R(x, \lambda)$ pertenecen al núcleo del operador diferencial $A - \lambda$ pero no al dominio de A , pues no satisfacen las condiciones de contorno que caracterizan a $\mathcal{D}(A)$. En efecto, $L(x, \lambda)$ satisface la condición de contorno apropiada en $x = 0$ pero no en $x = 1$ en tanto que $R(x, \lambda)$ satisface la condición de contorno

²¹En la sección X.1 del Apéndice, mostraremos que si la variedad de base no es compacta, el comportamiento asintótico de los autovalores se rige por el comportamiento de los coeficientes del operador diferencial en el infinito.

en $x = 1$ pero no lo hace en $x = 0$. La función $\theta(\cdot)$ es la función Heaviside y $W[L(x, \lambda), R(x, \lambda)]$ es el wronskiano,

$$W[L, R](\lambda) = L(x, \lambda)\partial_x R(x, \lambda) - \partial_x L(x, \lambda)R(x, \lambda), \quad (237)$$

que es no nulo si λ no pertenece al espectro de A y, para los operadores dados por las expresiones (2) y (3), no depende de x .

De acuerdo con la ecuación (236), la traza de la resolvente resulta,

$$\text{Tr}(A - \lambda)^{-1} = -\frac{1}{W[L, R(\lambda)]} \int_0^1 L(x, \lambda)R(x, \lambda) dx. \quad (238)$$

- Si A es un operador diferencial positivo definido, podemos resolver el sistema:

$$(\partial_t + A)\phi(x, t) = 0, \quad (239)$$

$$\phi(x, t = 0) = f(x),$$

donde $x \in M$, $t \in \mathbb{R}^+$ y $\phi(x, t)$ satisface las condiciones de contorno apropiadas sobre ∂M . El problema planteado por las expresiones (239) puede invertirse de la siguiente manera,

$$\phi(x, t) = e^{-tA}f(x), \quad (240)$$

donde e^{-tA} es un operador integral cuyo núcleo está dado por,

$$K(x, x', t) = \sum_{n \in \mathbb{N}} e^{-t\lambda_n} \phi_n(x)\phi_n^*(x'), \quad (241)$$

y su traza por,

$$\text{Tr} e^{-tA} = \int_M K(x, x, t) dx = \sum_{n \in \mathbb{N}} e^{-t\lambda_n}. \quad (242)$$

- En [112], R.T. Seeley definió las potencias A^{-s} de un operador diferencial A y demostró que si $\mathcal{R}(s)$ es suficientemente grande, A^{-s} tiene un núcleo continuo $\zeta_A(x, x', s)$. Además, si $x \neq x'$ el núcleo $\zeta_A(x, x', s)$ es una función entera de s , en tanto que $\zeta_A(x, x, s)$ admite una extensión meromorfa al plano complejo s con polos simples dados por la ecuación (1).

La traza del operador A^{-s} está dada por,

$$\zeta_A(s) := \text{Tr} A^{-s} = \int_M \zeta_A(x, x, s) dx = \sum_{n \in \mathbb{N}} \lambda_n^{-s}. \quad (243)$$

- En [6] se define, en conexión con el Teorema del índice para variedades con borde, la función $\eta(s)$ de un operador A cuyo espectro está dado por los autovalores $\{\lambda_n\}_{n \in \mathbb{N}}$. Si $\mathcal{R}(s)$ es suficientemente grande, la función $\eta(s)$ está dada por,

$$\eta(s) = \sum_{\lambda_n > 0} \lambda_n^{-s} - \sum_{\lambda_n < 0} |\lambda_n|^{-s}. \quad (244)$$

IV.2.1. Relación entre la distintas funciones espectrales

En la sección anterior hemos definido las trazas $\text{Tr} (A - \lambda)^{-1}$, $\text{Tr} e^{-tA}$ y $\text{Tr} A^{-s}$, que son funciones de los parámetros λ, t, s y están determinadas por el espectro del operador diferencial A . Cabe, entonces, esperar que existan relaciones entre estas funciones espectrales; veremos, en particular, que los desarrollos asintóticos de $\text{Tr} (A - \lambda)^{-1}$ y $\text{Tr} e^{-tA}$ para grandes valores de $|\lambda|$ y pequeños valores de t , respectivamente, están determinados por las singularidades de la función $\zeta_A(s)$.

Señalamos, en primer lugar, que las funciones espectrales correspondientes a un operador diferencial positivo definido A satisfacen las siguientes relaciones:

$$\text{Tr} (A - \lambda)^{-1} = \int_0^\infty e^{t\lambda} \text{Tr} e^{-tA} dt, \quad (245)$$

$$\text{Tr} A^{-s} = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty t^{s-1} \text{Tr} e^{-tA} dt, \quad (246)$$

si $\Re(\lambda)$ es menor que todos los autovalores de A y $\Re(s) > m/d$, respectivamente. De acuerdo con estas expresiones la transformada de Laplace de la traza del heat-kernel es la traza de la resolvente y su transformada de Mellin es la función $\zeta_A(s)$. Estas relaciones pueden demostrarse estableciendo relaciones similares entre cada uno de los términos de la series (242), (234 y (243).

Mediante una integración por partes en la ecuación (246) y utilizando el desarrollo asintótico (9) se puede probar,

$$\zeta(0) = c_m(A). \quad (247)$$

Cabe señalar que para un operador diferencial autoadjunto A que no sea positivo definido, para el cual no existe un operador e^{-tA} asociado, se pueden, sin embargo, definir los operadores integrales A^{-s} y $(A - \lambda)^{-1}$, cuyas trazas están relacionadas por,

$$\text{Tr} A^{-s} = -\frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathcal{C}} \lambda^{-s} \text{Tr} (A - \lambda)^{-1} d\lambda, \quad (248)$$

donde \mathcal{C} es una curva que encierra a los autovalores de A en sentido antihorario. La relación (248) puede demostrarse en forma inmediata a partir de la ecuación (234), que indica que la traza de la resolvente tiene polos simples en los autovalores de A con residuos igual a 1.

Supongamos ahora que la traza del heat-kernel admite un desarrollo asintótico para valores pequeños de t de la forma,

$$\text{Tr} e^{-tA} \sim \sum_{n=0}^{\infty} c_n(A) \cdot t^{j_n}. \quad (249)$$

Reemplazando este desarrollo asintótico en la expresión (245) obtenemos el siguiente desarrollo asintótico para la traza de la resolvente,

$$\mathrm{Tr} (A - \lambda)^{-1} \sim \sum_{n=0}^{\infty} \Gamma(j_n + 1) c_n(A) \cdot \lambda^{-j_n-1}. \quad (250)$$

El desarrollo asintótico de la traza del heat-kernel describe también las singularidades de la función $\zeta_A(s)$. En efecto, las ecuaciones (249) y (246) indican que los polos de la función $\zeta_A(s)$ están ubicados en los puntos s_n ,

$$s_n = -j_n, \quad (251)$$

y los residuos correspondientes están dados por,

$$\mathrm{Res}\{\zeta_A(s)\}_{s=s_n} = \frac{c_n(A)}{\Gamma(-j_n)}. \quad (252)$$

En consecuencia, el desarrollo asintótico de la traza del heat-kernel para pequeños valores de t , el desarrollo asintótico de la traza de la resolvente para grandes valores de $|\lambda|$ y las singularidades de la función $\zeta_A(s)$ están relacionados en virtud de las ecuaciones (245) y (246). En particular, si la traza del heat-kernel admite un desarrollo en potencias de t (véase la ecuación (249)) entonces la traza de la resolvente admite un desarrollo en potencias de λ cuyos exponentes y coeficientes se pueden expresar en términos de los exponentes y coeficientes del primero. La función $\zeta_A(s)$, por su parte, presenta polos simples en puntos del eje real que están determinados por los exponentes de t y sus residuos están, a su vez, determinados por los coeficientes de las potencias de t .

Por consiguiente, de acuerdo con el resultado (1), válido para operadores diferenciales A con coeficientes regulares, definidos por condiciones de contorno locales sobre el borde de una variedad compacta, las potencias j_n de t en los desarrollos (249) y (250) son,

$$j_n = \frac{n - m}{d}, \quad (253)$$

siendo d el orden del operador A y m la dimensión de la variedad de base M (véase, *e.g.*, la ecuación (9).) El resultado (1) indica que los exponentes de las potencias de λ y de t en los desarrollos asintóticos de las trazas de la resolvente y del heat-kernel correspondientes a operadores regulares están determinados por el orden del operador diferencial y la dimensión de la variedad.

Antes de finalizar esta sección haremos un par de observaciones con respecto a la relación entre las distintas funciones espectrales. Las ecuaciones (245) y (246) permiten relacionar las singularidades de la función $\zeta_A(s)$ con los desarrollos asintóticos de las trazas de la resolvente y del heat-kernel aún cuando estos desarrollos contengan logaritmos de $|\lambda|$ y de t , respectivamente. En ese caso, puede verse que la función $\zeta_A(s)$ presenta polos de multiplicidad mayor.

Es interesante notar que los desarrollos asintóticos de las funciones espectrales o las singularidades de la función $\zeta_A(s)$ guardan relación, a su vez, con el desarrollo asintótico de los autovalores λ_n del operador diferencial A para grandes valores de n . Para ilustrar esta relación mostraremos que los grandes autovalores de un operador diferencial suave con condiciones de contorno locales sobre el borde de una variedad compacta están dados, a orden dominante, por,

$$\lambda_n \sim \left[\frac{m\Gamma(m/d)}{d c_0(A)} \right]^{d/m} n^{d/m}, \quad (254)$$

donde $c_0(A)$ es el primer coeficiente del desarrollo asintótico (249). En efecto, supongamos que,

$$\lambda_n \sim \beta n^\alpha + \dots \quad (255)$$

donde α y β son constantes a determinar. Reemplazando este Ansatz en la ecuación (243) obtenemos,

$$\begin{aligned} \zeta_A(s) &= \sum_{n=0}^{\infty} (\beta n^\alpha + \dots)^{-s} = \beta^{-s} \sum_{n=0}^{\infty} n^{-\alpha s} (1 + \dots)^{-s} = \\ &= \beta^{-s} \sum_{n=0}^{\infty} n^{-\alpha s} + \dots = \beta^{-s} \zeta_R(\alpha s) + \dots \end{aligned} \quad (256)$$

donde $\zeta_R(z)$ es la función- ζ de Riemann, que tiene un único polo simple en $z = 1$ con residuo 1. Por lo tanto, la función $\zeta_A(s)$ tiene un polo en $s = \alpha^{-1}$ con residuo $\alpha^{-1}\beta^{-1/\alpha}$. Esto determina, en conjunto con las ecuaciones (251) y (253), los valores $\alpha = d/m$ y $\beta = (m\Gamma(m/d)/a_0d)^{d/m}$, de acuerdo con lo expresado en (254).

En esta Tesis estudiaremos algunos operadores diferenciales con coeficientes singulares cuyas funciones- ζ presentan polos que no obedecen al resultado (1). Mostraremos que las trazas de la resolvente y del heat-kernel correspondientes a estos operadores presentan desarrollos asintóticos cuyas potencias no están determinadas, consecuentemente, por el orden del operador diferencial y la dimensión de la variedad de base. En efecto, veremos que los exponentes de estas potencias dependen, en general, del coeficiente que caracteriza la intensidad de la singularidad del operador diferencial.

IV.3. Desarrollos asintóticos

El desarrollo asintótico de la traza de la resolvente $(A - \lambda)^{-1}$ para grandes valores de $|\lambda|$ ha sido estudiado para operadores diferenciales con coeficientes regulares definidos sobre variedades suaves de dimensión arbitraria [112, 113, 114].

Sin embargo, será suficiente para nuestros propósitos considerar un operador diferencial A de orden d que actúa sobre elementos de $\mathbf{H}_d(\mathbb{R}^+) \otimes \mathbb{C}^k$, *i.e.*, funciones de \mathbb{R}^+ con

valores en un espacio vectorial de dimensión k que admiten d derivadas,

$$A = \sum_{n=0}^d A_n(x)(-i\partial_x)^n. \quad (257)$$

Los coeficientes $A_n(x)$ son funciones en $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ con valores en el espacio de matrices $\mathbb{C}^{k \times k}$.

Consideremos también $kd/2$ operadores de borde B_j ,

$$B_j = \sum_{k=1}^d B_{jk}(-i\partial_x)^{d-k}, \quad (258)$$

con $j = 1, \dots, kd/2$ y B_{jk} un conjunto de matrices $1 \times k$.

Definición IV.3.1 *El operador diferencial A es un operador elíptico si,*

$$\det(A_d(x)) \neq 0. \quad (259)$$

Definición IV.3.2 *El operador diferencial A satisface la condición de Agmon sobre el rayo $R_\theta := \{\arg(\lambda) = \theta\}$ si,*

$$\det(A_d(x)p^d - \lambda) \neq 0, \quad (260)$$

$\forall \lambda \in R_\theta, p \neq 0$.

Definición IV.3.3 *El sistema $\{A, B_1, \dots, B_{kd/2}\}$ satisface la condición de Agmon sobre el rayo $R_\theta := \{\arg(\lambda) = \theta\}$ si A satisface la condición de Agmon sobre el rayo $R_\theta := \{\arg(\lambda) = \theta\}$ y si para todo $\lambda \in R_\theta$ y todo elemento $(g_1, \dots, g_{kd/2})$ de $\mathbb{C}^{kd/2}$ existe una única función $f(x)$ con valores en \mathbb{C}^k que satisface,*

$$[A_d(0)(-i\partial_x)^d - \lambda] f(x) = 0, \quad (261)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0, \quad (262)$$

$$B_j f(x)|_{x=0} = g_j. \quad (263)$$

Consideremos entonces un sistema elíptico de operadores $\{A, B_1, \dots, B_{kd/2}\}$ que satisface la condición de Agmon sobre el rayo R_θ . Los operadores de borde B_j caracterizan las condiciones de contorno locales que satisfacen las funciones pertenecientes al dominio $\mathcal{D}(A)$ de A ,

$$\mathcal{D}(A) = \{\phi(x) \in \mathbf{H}_d(\mathbb{R}^+) \otimes \mathbb{C}^k : B_j \phi(x)|_{x=0} = 0\}. \quad (264)$$

IV.3 DESARROLLOS ASINTÓTICOS

Se puede verificar por inducción que los coeficientes $c_{-d-n}(x, p, \lambda)$, dados por (271), son homogéneos de grado $-d - n$ en las variables $(p, \lambda^{1/d})$, tal como lo expresa la relación (266).

Asimismo, puede también verificarse que se satisface,

$$\sigma\{A - \lambda\} \left(\sum_{n=0}^J c_{-d-n}(x, p, \lambda) \right) - 1 \in S^{-J-1}. \quad (272)$$

Se puede demostrar, además, que el operador pseudodiferencial asociado al símbolo (265) satisface asintóticamente la ecuación (267). Sin embargo, no hemos garantizado que la imagen de este operador satisfaga la condición de contorno (264). Para esto, es necesario agregar nuevos términos a la expresión (265) de modo que el símbolo de la resolvente satisfaga la condición de contorno (264) sin modificar la relación (267).

Proponemos entonces para el símbolo de la resolvente una aproximación asintótica de la forma,

$$\sigma\{(A - \lambda)^{-1}\} \sim \sum_{n=0}^{\infty} c_{-d-n}(x, p, \lambda) - \sum_{n=0}^{\infty} d_{-d-n}(x, p, \lambda), \quad (273)$$

en la que los coeficientes $d_{-d-n}(x, p, \lambda)$ quedan definidos por las condiciones,

$$(A - \lambda) \cdot \sum_{n=0}^{\infty} d_{-d-n}(x, p, \lambda) = 0, \quad (274)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} d_{-d-n}(x, p, \lambda) = 0, \quad (275)$$

$$B_j d_{-d-n}(x, p, \lambda)|_{x=0} = \sigma\{B_j\} c_{-d-n}(x, p, \lambda)|_{x=0}. \quad (276)$$

La ecuación (274) representa un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias para las cantidades $d_{-d-n}(x, p, \lambda)$ como funciones de x con condiciones de contorno en $x \rightarrow \infty$ dadas por (275) y en el origen por (276). La resolución de estas ecuaciones diferenciales, de manera recurrente, permite probar que los coeficientes $d_{-d-n}(x, p, \lambda)$ son homogéneos de grado $-d - n - 1$ en las variables $(p, \lambda^{1/d})$.

A partir del desarrollo (273) y de la homogeneidad de los coeficientes $c_{-d-n}(x, p, \lambda)$ y $d_{-d-n}(x, p, \lambda)$ en las variables $(p, \lambda^{1/d})$ podemos deducir el desarrollo asintótico del núcleo de la resolvente en la diagonal $G(x, x, \lambda)$. Reemplazamos, para ello, el desarrollo (273) en la ecuación (230).

La integral del miembro derecho de (230) para el término correspondiente a

$c_{-d-n}(x, p, \lambda)$ resulta,

$$\begin{aligned}
 & \int_{\mathbb{R}} c_{-d-n}(x, p, \lambda) \frac{dp}{2\pi} = \\
 &= \int_{\mathbb{R}} c_{-d-n}(x, \lambda^{-1/d} p, 1) \lambda^{-1-n/d} \frac{dp}{2\pi} = \\
 &= \int_{\mathbb{R}} c_{-d-n}(x, p, 1) \lambda^{-1-n/d+1/d} \frac{dp}{2\pi} = \\
 &=: \gamma_n(A, x) \cdot \lambda^{\frac{1-n}{d}-1}. \tag{277}
 \end{aligned}$$

Para arribar a la segunda ecuación hemos utilizado la propiedad de homogeneidad de los coeficientes $c_{-d-n}(x, p, \lambda)$, en tanto que la ecuación siguiente se obtuvo mediante una redefinición de la variable de integración.

Si calculamos la integral dada por la ecuación (230) correspondiente al término de borde dado por $d_{-d-n}(x, p, \lambda)$ obtenemos,

$$\int_{\mathbb{R}} d_{-d-n}(x, p, \lambda) \frac{dp}{2\pi} := -\delta_n(A, x) \cdot \lambda^{-\frac{n}{d}-1}. \tag{278}$$

Finalmente, concluimos que el núcleo de la resolvente en la diagonal $G(x, x, \lambda)$ admite un desarrollo asintótico para grandes valores de λ dado por,

$$G(x, x, \lambda) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n(A, x) \cdot \lambda^{\frac{1-n}{d}-1} + \sum_{n=0}^{\infty} \delta_n(A, x) \cdot \lambda^{-\frac{n}{d}-1}. \tag{279}$$

Los coeficientes locales $\gamma_n(A, x)$ y $\delta_n(A, x)$ están dados por las integrales de $c_{-d-n}(x, p, 1)$ y $d_{-d-n}(x, p, 1)$, respectivamente (véanse las ecuaciones (277) y (278).) Nótese que las potencias de λ en el desarrollo asintótico de $G(x, x, \lambda)$ sólo dependen del orden del operador diferencial.

Como estudiaremos la validez de este resultado en referencia a operadores diferenciales sobre variedades de base unidimensionales, nos hemos limitado a describir el comportamiento asintótico de la resolvente de un operador A definido sobre funciones de \mathbb{R}^+ . Sin embargo, como hemos mencionado, el mismo análisis puede repetirse para operadores diferenciales regulares sobre variedades de base de dimensión mayor²².

Si el operador diferencial regular está definido sobre una variedad de base de dimensión m el núcleo de la resolvente en la diagonal admite un desarrollo asintótico en potencias de λ de la forma,

$$\lambda^{\frac{m-n}{d}-1}. \tag{280}$$

²²En el Apéndice X.3 estudiamos el desarrollo asintótico del heat-kernel para un operador de segundo orden en una variedad de dimensión arbitraria.

Es importante observar que el resultado (279) representa un desarrollo asintótico local puesto que corresponde a una cantidad que depende de la coordenada $x \in \mathbb{R}^+$. Sin embargo, como el operador diferencial A está definido sobre una variedad de base no compacta, la expresión (279) no implica que la traza de la resolvente, si existiera, admita un desarrollo asintótico dado por la integral término a término de su miembro derecho.

De todas maneras, en el caso de un operador diferencial regular A definido sobre una variedad de base M compacta, el desarrollo asintótico (279) permite demostrar, mediante una parametrización local de la variedad, que la traza de la resolvente admite un desarrollo asintótico dado por,

$$\begin{aligned} \text{Tr}(A - \lambda)^{-1} &= \int_M G(x, x, \lambda) dx \sim \\ &\sim \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n(A) \cdot \lambda^{\frac{1-n}{d}-1} + \sum_{n=0}^{\infty} \delta_n(A) \cdot \lambda^{-\frac{n}{d}-1}, \end{aligned} \quad (281)$$

donde los coeficientes $\gamma_n(A)$ y $\delta_n(A)$ son las integrales de los coeficientes locales $\gamma_n(A, x)$ y $\delta_n(A, x)$ sobre M y ∂M , respectivamente.

El desarrollo asintótico (281), junto con las relaciones (249), (250) y (252), permiten probar la validez de los resultados (1) y (9).

Insistimos en que las potencias del desarrollo asintótico de la traza de la resolvente dependen sólo del orden del operador diferencial y de la dimensión de la variedad de base. La variación de cualquier otro parámetro del problema relacionado con los coeficientes del operador diferencial o con las condiciones de contorno, se manifiesta en los coeficientes γ_n, δ_n sin afectar las potencias del desarrollo asintótico.

Parte V

Operadores Singulares

*If only I had the theorems!
Then I should find the proofs easily enough.
(G.F. Bernhard Riemann.)*

V.1. Introducción

En el capítulo anterior hemos presentado algunas de las propiedades que son conocidas acerca de los desarrollos asintóticos de las funciones espectrales correspondientes a operadores diferenciales con coeficientes regulares. Para ello hemos utilizado resultados de la teoría de los operadores pseudodiferenciales.

No obstante, la derivación del desarrollo asintótico dado por (281) que hemos presentado no es válida si el operador diferencial posee coeficientes singulares y, a nuestro saber, no existen referencias a un resultado equivalente para este caso.

En el presente capítulo consideraremos operadores diferenciales que poseen un coeficiente con un tipo especial de singularidad, por lo que sus funciones espectrales presentan desarrollos asintóticos distintos del resultado (281). En efecto, veremos que la traza de la resolvente de estos operadores admite un desarrollo asintótico en potencias de λ cuyos exponentes dependen de las características de la singularidad.

El primer paso en la obtención de estos desarrollos asintóticos consiste en reconocer la existencia de una familia de extensiones autoadjuntas. Este punto es esencial pues, como se verá, la validez del resultado (281), aún en presencia de una singularidad, depende de las condiciones de contorno del problema. En efecto, para algunas condiciones de contorno el resultado (281) es válido, en tanto que existe un conjunto infinito de condiciones de contorno para las que los exponentes de las potencias del desarrollo asintótico de la traza de la resolvente no están determinados por el orden del operador y la dimensión de la variedad de base.

En general, la diversidad de condiciones de contorno que admite un operador diferencial simétrico está caracterizada por sus extensiones autoadjuntas. En virtud de la relevancia de las distintas extensiones autoadjuntas para estudiar el desarrollo asintótico de la traza de la resolvente, hemos construido una relación entre las resolventes correspondientes a distintas extensiones autoadjuntas. Esta relación es conocida para el caso de operadores regulares: entre 1944 y 1946 M.G. Krein [84, 85] demostró una manera de obtener la resolvente de cualquier extensión autoadjunta si se conoce la resolvente de

una extensión autoadjunta particular. En la sección V.3 extenderemos este resultado al caso de los operadores diferenciales con coeficientes singulares que hemos considerado. Posteriormente, en la sección V.4, utilizaremos esta extensión de la fórmula de Krein para encontrar aquellas condiciones de contorno para las que el desarrollo asintótico de la traza de la resolvente posee potencias cuyos exponentes dependen de las características de la singularidad.

V.2. Fórmula de Krein para operadores regulares

Describiremos en esta sección la fórmula de Krein [84, 85] (véase también [4]), que relaciona las resolventes de las distintas extensiones autoadjuntas de un operador regular. Aunque esta relación no ha sido necesaria para estudiar el desarrollo asintótico de la resolvente, será de gran utilidad construir una relación equivalente para el caso de operadores con coeficientes singulares.

Para caracterizar las extensiones autoadjuntas del operador será útil el siguiente Teorema [70], que enunciamos sin demostración.

Teorema V.2.1 *Sea A un operador simétrico definido sobre un dominio denso de un espacio de Hilbert \mathcal{H} , para el cual los índices de deficiencia sean iguales, $n_+ = n_- = n < \infty$. Entonces:*

- *Existen dos mapeos suryectivos $K_1, K_2 : \mathcal{D}(A^\dagger) \rightarrow \mathbb{C}^n$ que satisfacen, para todo par de funciones $\phi, \psi \in \mathcal{D}(A^\dagger)$,*

$$(\phi, A^\dagger \psi) - (A^\dagger \phi, \psi) = (K_1 \phi, K_2 \psi) - (K_2 \phi, K_1 \psi), \quad (282)$$

donde (\cdot, \cdot) representa el producto usual en \mathcal{H} y en \mathbb{C}^n , respectivamente²³.

- *Las extensiones autoadjuntas $A^{(M,N)}$ de A están caracterizadas por las matrices $M, N \in \mathbb{C}^{n \times n}$ para las que $M \cdot N^\dagger$ es hermítica y $(M|N) \in \mathbb{C}^{n \times 2n}$ tiene rango n . Consecuentemente, el dominio de $A^{(M,N)}$ está determinado por,*

$$\mathcal{D}(A^{(M,N)}) = \{\phi \in \mathcal{D}(A^\dagger) : MK_1 \phi = NK_2 \phi\}. \quad (283)$$

Nótese que el conjunto de matrices (M, N) que definen las extensiones autoadjuntas de A está caracterizado por $n^2 = \dim U(n)$ parámetros, en acuerdo con la teoría de von Neumann de los índices de deficiencia.

Para enunciar la fórmula de Krein necesitamos aún un par de definiciones. Como se puede probar que las restricciones de K_1, K_2 al subespacio $\text{Ker}(A^\dagger - \lambda)$ son invertibles, definimos entonces,

²³Véase por ejemplo el Teorema II.3.2 en el cual $K_1 \phi$ y $K_2 \phi$ están dados por los valores de borde.

Definición V.2.2

$$K_1^{-1}(\lambda) := (K_1|_{\text{Ker}(A^\dagger - \lambda)})^{-1}, \quad (284)$$

$$K(\lambda) := -K_2 \cdot K_1^{-1}(\lambda). \quad (285)$$

La fórmula de Krein permite escribir la resolvente de una extensión autoadjunta $A^{(M,N)}$ en términos de la resolvente de la extensión autoadjunta caracterizada por $M = \mathbf{1}$ y $N = \mathbf{0}$.

Teorema V.2.3

$$(A^{(M,N)} - \lambda)^{-1} = (A^{(\mathbf{1},\mathbf{0})} - \lambda)^{-1} + K_1^{-1}(\lambda) \cdot \frac{N}{(M + N K(\lambda))} \cdot (K_1^{-1}(\lambda^*))^\dagger. \quad (286)$$

A modo de ilustración, aplicaremos la fórmula de Krein a un operador diferencial regular de la forma,

$$A = -\partial_x^2 + U(x), \quad (287)$$

definido sobre un subespacio de $L_2(\mathbb{R}^+)$ para el cual los índices de deficiencia de A sean $n_\pm = 1$. En primer lugar, definimos los operadores K_1, K_2 referidos en el primer enunciado del Teorema V.2.1,

$$K_1\phi(x) := \phi(0), \quad (288)$$

$$K_2\phi(x) := \phi'(0). \quad (289)$$

De acuerdo con el segundo enunciado del Teorema V.2.1, el dominio $\mathcal{D}(A^\theta)$ de las extensiones autoadjuntas está caracterizado por un parámetro real θ ,

$$\mathcal{D}(A^\theta) = \{\phi \in \mathcal{D}(A^\dagger) : \phi'(0) - \theta \phi(0) = 0\}. \quad (290)$$

La condición de contorno de Robin de la ecuación (290) se obtiene observando, en primer lugar, que las matrices M, N del Teorema V.2.1 son números reales y definiendo, luego, en la expresión (283) el parámetro $\theta := M^{-1}N$. La extensión $M = 0$, que corresponde a condiciones de contorno tipo Dirichlet, está caracterizada por $\theta = \infty$.

La fórmula de Krein puede escribirse, en este caso, de la siguiente manera,

$$(A^\theta - \lambda)^{-1} - (A^\infty - \lambda)^{-1} = \frac{(A^0 - \lambda)^{-1} - (A^\infty - \lambda)^{-1}}{1 + \theta K(\lambda)}. \quad (291)$$

Determinemos ahora el factor $K(\lambda)$ de acuerdo con la definición V.2.2.

Como los índices de deficiencia del operador A son $n_\pm = 1$, el subespacio de deficiencia $\text{Ker}(A^\dagger - \lambda)$ está generado por una función normalizada que denotamos por ϕ_λ . Esto es,

$$(A^\dagger - \lambda)\phi_\lambda = 0. \quad (292)$$

En consecuencia, de acuerdo con la definición V.2.2,

$$K_1^{-1}(\lambda) : \mathbb{C} \rightarrow \text{Ker}(A^\dagger - \lambda), \quad (293)$$

$$K_1^{-1}(\lambda) \cdot c = c \cdot \phi_\lambda(x)/\phi_\lambda(0); \quad (294)$$

Por lo tanto, el operador $K(\lambda)$ está dado por,

$$K(\lambda) \cdot c = -c \cdot \phi'_\lambda(0)/\phi_\lambda(0), \quad (295)$$

esto es,

$$K(\lambda) = -\frac{\phi'_\lambda(0)}{\phi_\lambda(0)}. \quad (296)$$

En la sección siguiente determinaremos una fórmula análoga a la de Krein que relaciona las resolventes de las distintas extensiones autoadjuntas del operador (287) en el caso en el que el potencial $U(x)$ posee una singularidad en el origen. Obtendremos una ecuación similar a (291) (véase la ecuación (339)) en la que el factor $K(\lambda)$ no corresponde al valor dado por (296) pero está también relacionado con el comportamiento de las funciones de $\mathcal{D}(A^\dagger)$ en el origen.

En los ejemplos que trataremos en el capítulo VI, veremos que en el límite en el que el término singular del operador tiende a cero, el factor $K(\lambda)$ que obtendremos en la sección siguiente se reduce al dado por la ecuación (296).

V.3. Fórmula de Krein para operadores singulares

En esta sección comenzamos nuestro estudio de los operadores diferenciales con coeficientes singulares. Algunos de los resultados que aquí presentamos fueron obtenidos en base a la técnica utilizada por E.A. Mooers [93] en su estudio del heat-kernel del laplaciano sobre variedades con singularidades cónicas.

Consideraremos, en particular, un operador diferencial A en una dimensión dado por (2) cuyo potencial $U_\nu(x)$ tiene un comportamiento singular en el origen dado por la expresión (18).

En primer lugar, caracterizaremos las extensiones autoadjuntas del operador diferencial A . Posteriormente, determinaremos una relación entre las resolventes $(A - \lambda)^{-1}$ correspondientes a distintas extensiones autoadjuntas.

Veremos que si el operador se define sobre la variedad de base compacta $[0, 1] \subset \mathbb{R}$ y se imponen condiciones de contorno locales, las extensiones autoadjuntas de A resultan caracterizadas por dos parámetros reales; uno de ellos describe el comportamiento de las funciones en $x = 0$, el otro en $x = 1$. Sin embargo, debemos señalar que los cálculos de esta sección pueden repetirse, análogamente, si el operador se define sobre la variedad de

base no compacta \mathbb{R}^+ . En este caso, las extensiones autoadjuntas están caracterizadas por un único parámetro real que describe la condición de contorno en $x = 0$.

Consecuentemente, utilizaremos los resultados de las Secciones V.3.1 y V.3.2 cuando estudiemos el operador A sobre la variedad de base no compacta \mathbb{R}^+ .

V.3.1. Extensiones autoadjuntas

Consideremos el operador,

$$A = -\partial_x^2 + \frac{\nu^2 - 1/4}{x^2} + V(x), \quad (297)$$

definido sobre el subespacio denso $\mathcal{C}_0^\infty((0, 1)) \subset \mathbf{L}_2([0, 1])$.

Supondremos que $\nu \in (0, 1)$ y que $V(x)$ es una función analítica en el intervalo $[0, 1] \subset \mathbb{R}$. El siguiente Teorema describe el comportamiento de las funciones de $\mathcal{D}(A^\dagger)$ en las proximidades de la singularidad.

Teorema V.3.1 *Si $\psi \in \mathcal{D}(A^\dagger)$ entonces existe una constante $\theta_\psi \in \mathbb{R}$ tal que el comportamiento de ψ en las proximidades de $x = 0$ está dado por,*

$$\psi(x) = C[\psi] \left(x^{-\nu+1/2} + \theta_\psi x^{\nu+1/2} \right) + O(x^{3/2}), \quad C[\psi] \in \mathbb{C}. \quad (298)$$

Demostración: Por el Lema de representación de Riesz [102],

$$\psi \in \mathcal{D}(A^\dagger) \rightarrow \exists \tilde{\psi} \in \mathbf{L}_2([0, 1]) : (\psi, A\phi) = (\tilde{\psi}, \phi) \quad \forall \phi \in \mathcal{D}(A). \quad (299)$$

Además,

$$A^\dagger \psi := \tilde{\psi}. \quad (300)$$

Esta expresión puede escribirse en términos de $\chi := x^{-\nu-1/2}\psi$ de la siguiente manera,

$$\partial_x(x^{2\nu+1}\partial_x\chi) = -x^{\nu+1/2}(\tilde{\psi} - V(x)\psi) \in \mathbf{L}_1([0, 1]). \quad (301)$$

En consecuencia, existe una constante $C_1 \in \mathbb{R}$ tal que,

$$\partial_x\chi = C_1 x^{-1-2\nu} - x^{-1-2\nu} \int_0^x y^{\nu+1/2} \left(-\partial_y^2 + \frac{\nu^2 - 1/4}{y^2} \right) \psi dy. \quad (302)$$

Por medio de la desigualdad de Cauchy-Schwartz se puede demostrar que,

$$\left| x^{-1-2\nu} \int_0^x y^{\nu+1/2} \left(-\partial_y^2 + \frac{\nu^2 - 1/4}{y^2} \right) \psi dy \right| \leq C_2 \left\| \left[-\partial_y^2 + \frac{\nu^2 - 1/4}{y^2} \right] \psi \right\|_{(0,x)} x^{-\nu}, \quad (303)$$

para alguna constante $C_2 \in \mathbb{R}$. Por consiguiente,

$$\left| \int^x z^{-1-2\nu} \int_0^z y^{\nu+1/2} \left(-\partial_x^2 + \frac{\nu^2 - 1/4}{x^2} \right) \psi dy dz \right| \leq C_3 + C_4 x^{1-\nu}, \quad (304)$$

donde $C_3, C_4 \in \mathbb{R}$. Se verifica entonces que, para algunas constantes $C_5, C_6 \in \mathbb{R}$, el comportamiento de ψ en el origen está dado por,

$$\psi = C_5 x^{-\nu+1/2} + C_6 x^{\nu+1/2} + O(x^{3/2}). \quad (305)$$

De esta última expresión obtenemos el resultado del Teorema. □

Corolario V.3.2

$$\phi, \psi \in \mathcal{D}(A^\dagger) \rightarrow (\phi, A^\dagger \psi) - (A^\dagger \phi, \psi) = C[\phi^*]C[\psi] (\theta_\phi - \theta_\psi) + (\partial_x \phi^* \psi - \phi^* \partial_x \psi) |_{x=1}. \quad (306)$$

Demostración: La expresión (306) se obtiene directamente mediante una integración por partes y utilizando el Teorema V.3.1. Nótese que este Corolario verifica el primer enunciado del Teorema V.2.1. □

Como consecuencia del Corolario V.3.2, el operador A admite una familia de extensiones autoadjuntas \mathcal{M} isomorfa a $U(2)$. Como estamos interesados en condiciones de contorno locales, el conjunto de extensiones autoadjuntas se reduce a una subvariedad isomorfa a $U(1) \otimes U(1)$.

Cada extensión $A_\beta^\theta \in \mathcal{M}$, caracterizada por los parámetros reales θ, β , está definida sobre el conjunto,

$$\mathcal{D}(A_\beta^\theta) = \{ \phi \in \mathbf{L}_2([0, 1]) : \theta_\phi = \theta, (\partial_x \phi - \beta \phi) |_{x=1} = 0 \}. \quad (307)$$

La cantidad θ_ϕ está definida de acuerdo con el Teorema V.3.1. Por lo tanto, los parámetros θ, β determinan las condiciones de contorno.

Existe además una extensión autoadjunta, que denotaremos por A_β^∞ , cuyo dominio es el conjunto,

$$\mathcal{D}(A_\beta^\infty) = \{ \phi \in \mathbf{L}_2([0, 1]) : \phi(x) = C[\phi] x^{\nu+1/2} + O(x^{3/2}), \text{ con } C[\phi] \in \mathbb{C}, (\partial_x \phi - \beta \phi) |_{x=1} = 0 \}. \quad (308)$$

Nótese que, en el límite regular $\nu \rightarrow 1/2$, el parámetro θ que caracteriza el comportamiento en el origen de las funciones del dominio de la extensión autoadjunta A_β^θ

coincide con el parámetro θ que caracteriza las condiciones de contorno Robin dadas por (290) para un operador regular en el origen.

Análogamente, se puede probar que el operador A (véase la ecuación (297)) definido sobre $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^+)$ satisface el Teorema V.3.1 y admite una familia de extensiones autoadjuntas A^θ , caracterizadas por un parámetro real θ , cuyos dominios de definición están dados por,

$$\mathcal{D}(A^\theta) = \{ \phi \in \mathbf{L}_2(\mathbb{R}^+) : \theta_\phi = \theta \} . \quad (309)$$

Existe además una otra extensión autoadjunta, que denotaremos por A^∞ , cuyo dominio es el conjunto,

$$\mathcal{D}(A^\infty) = \{ \phi \in \mathbf{L}_2(\mathbb{R}^+) : \phi(x) = C[\phi] x^{\nu+1/2} + O(x^{3/2}), \text{ con } C[\phi] \in \mathbb{C} \} . \quad (310)$$

V.3.2. Relación entre las distintas resolventes.

De acuerdo con la sección anterior, el operador diferencial A dado por la ecuación (297) definido sobre $\mathcal{C}_0^\infty((0, 1))$ admite una familia de extensiones autoadjuntas caracterizadas por dos parámetros θ, β . El parámetro θ describe el comportamiento de las funciones en las proximidades del punto $x = 0$ en tanto que β define condiciones de contorno tipo Robin en $x = 1$.

El objetivo de esta sección es establecer una relación entre las resolventes de las extensiones autoadjuntas A_β^θ correspondientes a distintos valores de θ y a un mismo valor de β . Por consiguiente, omitiremos, en adelante, el subíndice β .

En este sentido, obtendremos una fórmula similar a la de Krein presentada en la sección V.2 (véase la ecuación (291).) En la sección siguiente mostraremos que el desarrollo asintótico de la traza de la resolvente del operador con coeficientes singulares A no responde, en general, al comportamiento indicado por (281) sino que presenta potencias de λ dependientes de ν .

No obstante, la presencia de estas potencias depende fuertemente de la variedad de condiciones de contorno admisibles en la singularidad. En efecto, la resolvente de la extensión de Friedrichs ($\theta = \infty$), que es una de las condiciones de contorno invariantes de escala, sí verifica el comportamiento (281). Por este motivo, será útil obtener una expresión para la resolvente de una extensión autoadjunta general en términos de la resolvente correspondiente a $\theta = \infty$. De esta manera, podremos identificar el origen de la dependencia de los exponentes de λ con el parámetro ν en el desarrollo asintótico de la resolvente.

Comenzamos por establecer, sin demostración, la existencia y unicidad de la resolvente de una extensión autoadjunta.

Teorema V.3.3 Para toda función $f(x) \in \mathbf{L}_2([0, 1])$ y λ no perteneciente al espectro de A^θ existe una única $\phi^\theta(x, \lambda) \in \mathcal{D}(A^\theta)$ tal que,

$$(A^\theta - \lambda)\phi^\theta(x, \lambda) = f(x). \quad (311)$$

Además,

$$\phi^\theta(x, \lambda) = \int_0^1 G_\theta(x, x', \lambda) f(x') dx', \quad (312)$$

siendo $G_\theta(x, x', \lambda)$ el núcleo de la resolvente $(A^\theta - \lambda)^{-1}$.

El núcleo $G_\theta(x, x', \lambda)$ de la resolvente admite una expresión dada por la ecuación (236). El comportamiento en el origen de la función $L(x, \lambda)$ que figura en esta expresión está dado por,

$$L(x, \lambda) = x^{\nu+1/2} + O(x^{3/2}), \quad (313)$$

para el caso $\theta = \infty$ (véase la ecuación (308)), y por,

$$L(x, \lambda) = x^{-\nu+1/2} + O(x^{3/2}), \quad (314)$$

para el caso $\theta = 0$ (véase la ecuación (307).) Tiene sentido entonces, establecer la siguiente definición:

Definición V.3.4

$$G_\infty(x', \lambda) := \lim_{x \rightarrow 0} x^{-\nu-1/2} G_\infty(x, x', \lambda), \quad (315)$$

$$G_0(x', \lambda) := \lim_{x \rightarrow 0} x^{\nu-1/2} G_0(x, x', \lambda). \quad (316)$$

Los núcleos $G_\infty(x, \lambda), G_0(x, \lambda)$ permiten obtener el comportamiento en el origen, para los casos $\theta = \infty, 0$, respectivamente, de las soluciones del problema (311) en términos de la inhomogeneidad $f(x)$. En efecto, no es difícil probar que,

$$\phi^\infty(x, \lambda) = \int_0^1 G_\infty(x, x', \lambda) f(x') dx' = \phi^\infty(\lambda) x^{\nu+1/2} + O(x^{3/2}), \quad (317)$$

$$\phi^0(x, \lambda) = \int_0^1 G_0(x, x', \lambda) f(x') dx' = \phi^0(\lambda) x^{-\nu+1/2} + O(x^{3/2}), \quad (318)$$

donde,

$$\phi^\infty(\lambda) := \int_0^1 G_\infty(x', \lambda) f(x') dx', \quad (319)$$

$$\phi^0(\lambda) := \int_0^1 G_0(x', \lambda) f(x') dx'. \quad (320)$$

Los lemas V.3.5 y V.3.6, que presentamos a continuación, establecen una primera relación entre dos soluciones al problema (311) con la misma inhomogeneidad $f(x)$ pero pertenecientes al dominio de las extensiones $\theta = \infty$ y $\theta = 0$.

Lema V.3.5 Sea $\varphi_0(x) \in \mathcal{D}(A^0)$ tal que $\varphi_0(x) = x^{-\nu+1/2} + O(x^{3/2})$ cuando $x \rightarrow 0^+$. Entonces las funciones (317) y (318) satisfacen,

$$\phi^\infty(x, \lambda) = \phi^0(x, \lambda) - \phi^0(\lambda) \left[\varphi_0(x) - \int_0^1 G_\infty(x, x', \lambda)(A^0 - \lambda)\varphi_0(x') dx' \right]. \quad (321)$$

Demostración: Por un lado,

$$(A^\dagger - \lambda) \phi^\infty(x, \lambda) = f(x). \quad (322)$$

Asimismo,

$$\begin{aligned} (A^\dagger - \lambda) \left\{ \phi^0(x, \lambda) - \phi^0(\lambda) \left[\varphi_0(x) - \int_0^1 G_\infty(x, x', \lambda)(A^0 - \lambda)\varphi_0(x') dx' \right] \right\} = \\ = f(x) - \phi^0(\lambda) [(A^0 - \lambda)\varphi_0(x) - (A^0 - \lambda)\varphi_0(x)] = f(x). \end{aligned} \quad (323)$$

Por otra parte, para $x \rightarrow 0^+$,

$$\phi^\infty(x, \lambda) = \phi^\infty(\lambda) x^{\nu+1/2} + O(x^{3/2}), \quad (324)$$

en tanto que,

$$\begin{aligned} \left\{ \phi^0(x, \lambda) - \phi^0(\lambda) \left[\varphi_0(x) - \int_0^1 G_\infty(x, x', \lambda)(A^0 - \lambda)\varphi_0(x') dx' \right] \right\} = \\ = \phi^0(\lambda) x^{-\nu+1/2} - \phi^0(\lambda) \left[x^{-\nu+1/2} - x^{\nu+1/2} \int_0^1 G_\infty(x', \lambda)(A^0 - \lambda)\varphi_0(x') dx' \right] + \\ + O(x^{3/2}) = \phi^0(\lambda) \left[\int_0^1 G_\infty(x', \lambda)(A^0 - \lambda)\varphi_0(x') dx' \right] \cdot x^{\nu+1/2} + O(x^{3/2}). \end{aligned} \quad (325)$$

En consecuencia, ambos miembros de la expresión (321) pertenecen a $\mathcal{D}(A^\infty)$ y satisfacen la ecuación (311) para $\theta = \infty$. La igualdad (321) queda entonces demostrada en virtud de la unicidad establecida en el Teorema V.3.3.

□

Lema V.3.6

$$\varphi_0(x) - \int_0^1 G_\infty(x, x', \lambda)(A^0 - \lambda)\varphi_0(x') dx' = 2\nu G_\infty(x, \lambda). \quad (326)$$

Demostración: Como los núcleos de las resolventes $G_\infty(x, x', \lambda)$, $G_0(x, x', \lambda)$ son simétricos (véase la ecuación (236)) se verifica,

$$A^\dagger [G_0(x, x', \lambda) - G_\infty(x, x', \lambda)] = 0, \quad (327)$$

tanto si el operador A^\dagger actúa sobre la variable x como sobre x' . En consecuencia,

$$\begin{aligned} \varphi_0(x) - \int_0^1 G_\infty(x, x', \lambda)(A^0 - \lambda)\varphi_0(x') dx' &= \\ = \int_0^1 [G_0(x, x', \lambda) - G_\infty(x, x', \lambda)](A^0 - \lambda)\varphi_0(x') dx' &= \\ = \lim_{x \rightarrow 0^+} \{ [G_0(x, x', \lambda) - G_\infty(x, x', \lambda)] \cdot \varphi_0'(x) - & \\ - \partial_{x'} [G_0(x, x', \lambda) - G_\infty(x, x', \lambda)] \cdot \varphi_0'(x) \} = & \\ = [x^{-\nu+1/2} G_0(x, \lambda) - x^{\nu+1/2} G_\infty(x, \lambda)] \cdot (-\nu + 1/2) x^{-\nu-1/2} - & \\ - [(-\nu + 1/2) x^{-\nu-1/2} G_0(x, \lambda) - (\nu + 1/2) x^{\nu-1/2} G_\infty(x, \lambda)] \cdot x^{-\nu+1/2} = & \\ = 2\nu G_\infty(x, \lambda). & \end{aligned} \quad (328)$$

□

Los lemas V.3.5 y V.3.6 conducen al siguiente resultado.

Lema V.3.7

$$\phi^0(x, \lambda) = \phi^\infty(x, \lambda) + 2\nu G_\infty(x, \lambda)\phi^0(\lambda). \quad (329)$$

Analizando el comportamiento en las proximidades del origen de los términos de la ecuación (329) se puede obtener el comportamiento de $G_\infty(x, \lambda)$ cuando $x \rightarrow 0^+$,

$$G_\infty(x, \lambda) = \frac{1}{2\nu} (x^{-\nu+1/2} - K(\lambda)^{-1}x^{\nu+1/2}) + O(x^{3/2}), \quad (330)$$

donde

$$K(\lambda) := \frac{\phi^0(\lambda)}{\phi^\infty(\lambda)}. \quad (331)$$

Las ecuaciones (330) y (331) son de gran utilidad para nuestro objetivo. El factor $K(\lambda)$ definido en (331) relaciona información relativa a las dos extensiones autoadjuntas correspondientes a $\theta = \infty$ y $\theta = 0$ (compárese con el factor $K(\lambda)$ definido en (296) para el caso regular.) La ecuación (330) permite calcular el factor $K(\lambda)$ a partir del comportamiento en el origen del núcleo de la resolvente de la extensión $\theta = \infty$.

De este modo, a partir del Lema V.3.7 podemos expresar cantidades correspondientes a la extensión $\theta = 0$ en términos de cantidades obtenidas para la extensión $\theta = \infty$,

$$\phi^0(x, \lambda) = \phi^\infty(x, \lambda) + 2\nu K(\lambda) G_\infty(x, \lambda)\phi^\infty(\lambda). \quad (332)$$

Como esta ecuación es válida para cualquier inhomogeneidad $f(x)$, utilizando las ecuaciones (317), (318) y (319), obtenemos uno de los resultados más importante de esta sección:

Teorema V.3.8

$$G_0(x, x', \lambda) = G_\infty(x, x', \lambda) + 2\nu K(\lambda) G_\infty(x, \lambda) G_\infty(x', \lambda). \quad (333)$$

El Teorema V.3.8 expresa el núcleo de la resolvente correspondiente a la extensión autoadjunta $\theta = 0$ en términos del núcleo de la resolvente de la extensión $\theta = \infty$.

Resta entonces escribir una relación similar que permita calcular el núcleo de la resolvente para una extensión autoadjunta general en función del núcleo de la resolvente de la extensión $\theta = \infty$. Una extensión conveniente de la ecuación (332) conduce al siguiente Lema.

Lema V.3.9

$$\phi^\theta(x, \lambda) = \phi^\infty(x, \lambda) + 2\nu (K(\lambda)^{-1} + \theta)^{-1} G_\infty(x, \lambda) \phi^\infty(\lambda). \quad (334)$$

Demostración: La ecuación (329) permite probar que la diferencia entre ambos miembros de la expresión (334) pertenece a $\text{Ker}(A^\dagger - \lambda)$.

Por otra parte, ambos miembros de la expresión (334) pertenecen a $\mathcal{D}(A^\theta)$ puesto que el comportamiento para $x \rightarrow 0^+$ del segundo miembro está dado por (véanse las ecuaciones (317), (330) y (331)),

$$\frac{\phi^0(\lambda) \phi^\infty(\lambda)}{\phi^\infty(\lambda) + \theta \phi^0(\lambda)} \left(x^{-\nu+1/2+\theta x^{\nu+1/2}} \right) + O(x^{3/2}). \quad (335)$$

Una vez más, la unicidad establecida en el Teorema V.3.3 nos conduce a la igualdad (334). □

El Lema V.3.9, junto con las ecuaciones (312), (317) y (319), permiten demostrar el siguiente Teorema que expresa el núcleo de la resolvente de una extensión autoadjunta general en términos del núcleo de la extensión $\theta = \infty$.

Teorema V.3.10

$$G_\theta(x, x', \lambda) = G_\infty(x, x', \lambda) + 2\nu (K(\lambda)^{-1} + \theta)^{-1} G_\infty(x, \lambda) G_\infty(x', \lambda). \quad (336)$$

Será conveniente resumir el resultado de las ecuaciones (333) y (336) en la siguiente expresión,

$$G_\theta(x, x', \lambda) - G_\infty(x, x', \lambda) = \frac{G_\theta(x, x', \lambda) - G_\infty(x, x', \lambda)}{1 + \theta K(\lambda)}, \quad (337)$$

que puede escribirse en términos de los correspondientes operadores,

$$(A^\theta - \lambda)^{-1} - (A^\infty - \lambda)^{-1} = \frac{(A^0 - \lambda)^{-1} - (A^\infty - \lambda)^{-1}}{1 + \theta K(\lambda)}. \quad (338)$$

Esta expresión coincide formalmente con la fórmula de Krein (291) válida para operadores regulares, pero el factor $K(\lambda)$ en ambas expresiones es distinto. Para el caso regular está dado por la ecuación (296) en tanto que para el caso singular está dado por la ecuación (331).

Establecemos finalmente el siguiente Teorema que permitirá estudiar el desarrollo asintótico de la traza de la resolvente de una extensión autoadjunta general.

Teorema V.3.11

$$\text{Tr} \{ (A^\theta - \lambda)^{-1} - (A^\infty - \lambda)^{-1} \} = \frac{\text{Tr} \{ (A^0 - \lambda)^{-1} - (A^\infty - \lambda)^{-1} \}}{1 + \theta K(\lambda)}.$$

(339)

Esta ecuación permitirá demostrar que el desarrollo asintótico para grandes valores de $|\lambda|$ de la traza $\text{Tr} \{ (A^\theta - \lambda)^{-1} \}$ presenta potencias de λ cuyos exponentes dependen del parámetro ν . En efecto, mostraremos, en primer lugar, que las trazas de los operadores pseudodiferenciales $(A^0 - \lambda)^{-1}$ y $(A^\infty - \lambda)^{-1}$, correspondientes a condiciones de contorno sobre la singularidad invariantes de escala, admiten un desarrollo asintótico en potencias semienteras negativas de λ . Veremos luego que, por el contrario, el desarrollo asintótico del factor $K(\lambda)$ presenta potencias de λ dependientes del parámetro ν .

Señalemos finalmente que el Teorema V.3.11 puede demostrarse análogamente para el operador dado por la ecuación (297) pero definido sobre la variedad de base no compacta \mathbb{R}^+ . En ese caso las extensiones están caracterizadas por un único parámetro θ .

V.4. Desarrollo asintótico de la resolvente

En las Secciones V.4.1 y V.4.2 estudiaremos el desarrollo asintótico para grandes valores de $|\lambda|$ de las cantidades involucradas en la expresión (339) para una variedad de base no compacta y compacta, respectivamente.

V.4.1. Caso no compacto

Aplicaremos ahora los resultados de la sección anterior para obtener un desarrollo asintótico de la traza de la resolvente del operador,

$$A = -\partial_x^2 + \frac{\nu^2 - 1/4}{x^2} + V(x), \tag{340}$$

donde $x \in \mathbb{R}^+$ y el potencial $V(x)$ es analítico en x e inferiormente acotado. Como la variedad de base es, en este caso, no compacta, es conveniente estudiar la resolvente para

valores de λ en el semieje real negativo del plano complejo. Consideraremos entonces las soluciones ψ de la ecuación,

$$(A + z)\psi = 0, \quad (341)$$

mediante un desarrollo de ψ para grandes valores de $z \in \mathbb{R}^+$. De acuerdo con el Teorema V.3.11 será suficiente con encontrar una solución que satisfaga las condiciones de contorno correspondientes a $\theta = \infty$.

En virtud de la similitud ante transformaciones de escala de los dos primeros términos del operador (340) es conveniente definir una nueva variable $y := \sqrt{z}x \in \mathbb{R}^+$. De este modo, la solución de la ecuación (341) puede escribirse,

$$\psi = \psi(\sqrt{z}x, z), \quad (342)$$

siendo $\psi(\sqrt{z}x, z)$ una solución de,

$$\left(-\partial_y^2 + \frac{\nu^2 - 1/4}{y^2} + 1 + \frac{1}{z} V(y/\sqrt{z}) \right) \psi(y, z) = 0. \quad (343)$$

Nuestra técnica consiste en proponer un desarrollo asintótico para grandes valores de z para la solución de (343),

$$\psi(y, z) = \phi(y) + \sum_{n=0}^{\infty} \phi_n(y) z^{-1-n/2}, \quad (344)$$

consistente con el desarrollo en serie de potencias para el potencial,

$$V(x) = \sum_{n=0}^{\infty} V_n x^n, \quad (345)$$

siendo $V_n := V^{(n)}(0)/n!$.

Si reemplazamos estos desarrollos en la ecuación (343) obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales,

$$\left(-\partial_y^2 + \frac{\kappa}{y^2} + 1 \right) \phi(y) = 0, \quad (346)$$

$$\left(-\partial_y^2 + \frac{\kappa}{y^2} + 1 \right) \phi_0(y) = -V_0 \phi(y), \quad (347)$$

$$\left(-\partial_y^2 + \frac{\kappa}{y^2} + 1 \right) \phi_1(y) = -V_1 y \phi(y), \quad (348)$$

$$\left(-\partial_y^2 + \frac{\kappa}{y^2} + 1 \right) \phi_2(y) = -V_2 y^2 \phi(y) - V_0 \phi_0(y), \quad (349)$$

$$\left(-\partial_y^2 + \frac{\kappa}{y^2} + 1 \right) \phi_n(y) = -V_n y^n \phi(y) - \sum_{h+k+2=n} V_h y^h \phi_k(y). \quad (350)$$

La solución $\phi(y)$ de la primera de estas ecuaciones es una combinación lineal de las funciones de Bessel $\sqrt{y}I_\nu(y)$ y $\sqrt{y}K_\nu(y)$, de modo que la solución de la ecuación (343) de cuadrado integrable en $y \rightarrow \infty$ está dada por,

$$R(y, z) = \sqrt{y}K_\nu(y) + \sum_{n=0}^{\infty} \phi_n(y)z^{-1-n/2}. \quad (351)$$

Por su parte, las soluciones de las ecuaciones de la forma (350) pueden escribirse como,

$$\phi_n(y) = \int_0^\infty G_\infty^{V=0}(y, y', 1) \left[-V_n y'^n \phi(y') - \sum_{h+k+2=n} V_h y'^h \phi_k(y') \right] dy', \quad (352)$$

siendo,

$$G_\infty^{V=0}(y, y', 1) = \sqrt{yy'} [\theta(y' - y)I_\nu(y)K_\nu(y') + \theta(y - y')I_\nu(y')K_\nu(y)], \quad (353)$$

la función de Green del operador de la ecuación (346) (véase la ecuación (236).) Reemplazando (353) en (352) obtenemos una fórmula de recurrencia para $\phi_n(y)$,

$$\begin{aligned} \phi_n(y) = & -y^{1/2}K_\nu(y) \int_0^y \left[V_n y'^{(n+1/2)} K_\nu(y') + \sum_{l+m=n-2} V_l y'^l \phi_m(y') \right] \sqrt{y'} I_\nu(y') dy' - \\ & -y^{1/2}I_\nu(y) \int_y^\infty \left[V_n y'^{(n+1/2)} K_\nu(y') + \sum_{l+m=n-2} V_l y'^l \phi_m(y') \right] \sqrt{y'} K_\nu(y') dy'. \end{aligned} \quad (354)$$

A partir de esta ecuación podemos obtener el comportamiento de $\phi_n(y)$ para $y \rightarrow 0^+$,

$$\begin{aligned} \phi_n(y \sim 0) = & -\frac{y^{\nu+1/2}}{2^\nu \Gamma(\nu+1)} \times \\ & \times \int_0^\infty \left[V_n y'^{(n+1/2)} K_\nu(y') + \sum_{l+m=n-2} V_l y'^l \phi_m(y') \right] \sqrt{y'} K_\nu(y') dy' + \dots \end{aligned} \quad (355)$$

Podemos calcular entonces el comportamiento en $y \rightarrow 0^+$ de la solución $R(y, z)$ dada por la ecuación (351),

$$R(y, z) = \frac{\Gamma(\nu)}{2^{1-\nu}} y^{-\nu+1/2} + \frac{\Gamma(-\nu)}{2^{1+\nu}} H(z) \cdot y^{\nu+1/2} + \dots \quad (356)$$

siendo,

$$H(z) := 1 + \frac{2 \sin(\pi\nu)}{\pi} \times \sum_{n=0}^{\infty} z^{-1-n/2} \int_0^{\infty} \left[V_n y^{n+1/2} K_\nu(y) + \sum_{l+m=n-2} V_l y^l \phi_m(y) \right] \sqrt{y} K_\nu(y) dy. \quad (357)$$

Es importante observar que el desarrollo de la función $H(z)$ para grandes valores de z sólo presenta potencias semienteras de z . Mostraremos a continuación que el factor $K(z)$ en la ecuación (339) puede expresarse en términos de la función $H(z)$.

Para ello, primeramente advertimos que el núcleo de la resolvente $G_\infty(x, x', z)$, para $x < x'$, está dado por (véase la ecuación (236)),

$$G_\infty(x, x', z) = -\frac{z^{-1/2}}{W[L, R](z)} L(y, z) R(y', z) \Big|_{y=\sqrt{zx}, y'=\sqrt{zx'}}, \quad (358)$$

siendo $L(y, z)$ una solución de la ecuación (343) cuyo comportamiento en el origen es proporcional a $y^{\nu+1/2}$. $W[L, R](z)$ es el wronskiano de $L(y, z)$ y $R(y, z)$. En consecuencia, en virtud de la definición (315),

$$G_\infty(x', z) = -\frac{z^{-1/2} y^{-\nu-1/2}}{W[L, R](z)} L(y, z) R(y', z) \Big|_{y=0, y'=\sqrt{zx'}}. \quad (359)$$

Reemplazando (356) en esta última ecuación obtenemos el comportamiento de $G_\infty(x, z)$ para $x \rightarrow 0^+$,

$$G_\infty(x \sim 0, z) = -\frac{z^{-1/2} y^{-\nu-1/2} L(y, z) \Big|_{y=0}}{W[L, R](z)} \times \left[\frac{\Gamma(\nu)}{2^{1-\nu}} (\sqrt{zx})^{-\nu+1/2} + \frac{\Gamma(-\nu)}{2^{1+\nu}} H(z) \cdot (\sqrt{zx})^{\nu+1/2} \right] + \dots \quad (360)$$

Comparando las ecuaciones (330) y (360) obtenemos la relación entre el factor $K(z)$ y la función $H(z)$,

$$K(z) = 4^\nu \frac{\Gamma(1+\nu)}{\Gamma(1-\nu)} z^{-\nu} H(z)^{-1}. \quad (361)$$

Como $H(z)$ admite un desarrollo asintótico en potencias semienteras de z , vemos que $K(z)$ admite un desarrollo asintótico que presenta potencias de z dependientes del parámetro ν . Estas potencias están presentes también en el desarrollo asintótico de la traza de

la resolvente en virtud de la ecuación (339), que toma la forma,

$$\text{Tr} \{(A^\theta + z)^{-1} - (A^\infty + z)^{-1}\} = \frac{\text{Tr} \{(A^0 + z)^{-1} - (A^\infty + z)^{-1}\}}{1 + 4^\nu \frac{\Gamma(1 + \nu)}{\Gamma(1 - \nu)} \theta z^{-\nu} H(z)^{-1}}.$$

(362)

La traza del miembro derecho de la ecuación (362), que relaciona las resolventes de las extensiones correspondientes a $\theta = 0$ y $\theta = \infty$, puede obtenerse a partir de la ecuación (333),

$$\text{Tr} \{(A^0 + z)^{-1} - (A^\infty + z)^{-1}\} = 2\nu K(z) \int_0^\infty G_\infty^2(x, z) dx. \quad (363)$$

Comparando las ecuaciones (330) y (360) obtenemos,

$$-\frac{z^{-1/2} y^{-\nu-1/2} L(y, z)|_{y=0}}{W[L, R](z)} = \frac{1}{2^\nu \nu \Gamma(\nu)} \sqrt{z}^{\nu-1/2}. \quad (364)$$

De modo que la ecuación (359) resulta,

$$G_\infty(x', z) = \frac{1}{2^\nu \nu \Gamma(\nu)} \sqrt{z}^{\nu-1/2} R(\sqrt{z}x', z). \quad (365)$$

Reemplazando esta ecuación, junto con (361), en la ecuación (363) obtenemos,

$$\text{Tr} \{(A^0 + z)^{-1} - (A^\infty + z)^{-1}\} = \frac{2H(z)^{-1} z^{-1/2}}{\Gamma(\nu)\Gamma(1-\nu)} \int_0^\infty R(\sqrt{z}x, z)^2 dx. \quad (366)$$

De esta última ecuación puede verse que $\text{Tr} \{(A^0 + z)^{-1} - (A^\infty + z)^{-1}\}$ admite un desarrollo asintótico en potencias semienteras de z .

Resumimos estos cálculos en uno de los resultados centrales de esta Tesis:

Teorema V.4.1 *El desarrollo asintótico de la traza de la diferencia entre las resolventes $(A^\theta - \lambda)^{-1}$ y $(A^\infty - \lambda)^{-1}$ tiene la forma,*

$$\begin{aligned} \text{Tr} \{(A^\theta - \lambda)^{-1} - (A^\infty - \lambda)^{-1}\} &\sim \sum_{n=2}^{\infty} \alpha_n(\nu, V) \lambda^{-\frac{n}{2}} + \\ &+ \sum_{N,n=1}^{\infty} \beta_{N,n}(\nu, V) \theta^N \lambda^{-\nu N - \frac{n}{2} - \frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (367)$$

Los coeficientes $\alpha_n(\nu, V), \beta_n(\nu, V)$ dependen del coeficiente ν de la singularidad y están determinados por los coeficientes V_n que provienen del potencial suave $V(x)$ mediante las ecuaciones (362), (366), (351), (354) y (357) con $z = e^{i\pi} \lambda$.

□

La ecuación (367), junto con las ecuaciones (250) y (251), implica que las singularidades de la diferencia $\zeta_A^\theta(s) - \zeta_A^\infty(s)$ de las funciones- ζ correspondientes a las extensiones autoadjuntas A^θ y A^∞ del operador A consisten en polos simples en los puntos s_n y $s_{N,n}$ cuyas posiciones y residuos están dadas por,

$$s_n = \frac{1}{2} - n \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (368)$$

$$\text{Res}\{\zeta_A^\theta(s) - \zeta_A^\infty(s)\}|_{s=s_n} = \frac{(-1)^n}{\pi} \alpha_{2n+1}(\nu, V); \quad (369)$$

$$s_{N,n} = -\nu N - \frac{n}{2} + \frac{1}{2} \quad N, n = 1, 2, \dots \quad (370)$$

$$\text{Res}\{\zeta_A^\theta(s) - \zeta_A^\infty(s)\}|_{s=s_{N,n}} = \frac{\cos[\pi(\nu N + n/2)]}{\pi} \theta^N \beta_{N,n}(\nu, V). \quad (371)$$

Ejemplo: $V(x) = x^2$

Consideremos, a continuación, la estructura de polos de la función $\zeta_A^\theta(s) - \zeta_A^\infty(s)$ dada por las ecuaciones (368) y (370) para el caso $V(x) = x^2$. El resultado que obtendremos será verificado luego, en la sección VI.1, utilizando otras técnicas.

Nótese, en primer lugar, que si $V(x) = x^2$ entonces sólo uno de los coeficientes V_n definidos en (345) es distinto de cero,

$$V_n = \delta_{n,2}. \quad (372)$$

En consecuencia, las únicas funciones $\phi_n(y)$, definidas en (354), que no se anulan trivialmente corresponden a los valores $n = 2 + 4k$ con $k = 0, 1, \dots$

De acuerdo con las ecuaciones (357) y (351),

$$H(z)^{-1} \sim 1 + \sum_{k=1}^{\infty} C_k(\nu) z^{-2k}, \quad (373)$$

$$R(y, z) \sim \sqrt{y} K_\nu(y) + \sum_{k=1}^{\infty} C'_k(\nu, y) z^{-2k}. \quad (374)$$

No determinaremos la forma de los coeficientes $C_k(\nu)$, $C'_k(\nu, y)$. Reemplazando estas ecuaciones en (366) obtenemos,

$$\text{Tr}\{(A^0 + z)^{-1} - (A^\infty + z)^{-1}\} \sim \nu z^{-1} + \sum_{k=0}^{\infty} C''_k(\nu) z^{-3-2k}, \quad (375)$$

donde el coeficiente $C_k''(\nu)$ puede expresarse en términos de $C_k(\nu), C_k'(\nu, y)$.

Substituyendo, finalmente, las ecuaciones (375) y (373) en (362) obtenemos las potencias de z en el desarrollo asintótico de la traza de las diferencias entre las resolventes $(A^\theta + z)^{-1}$ y $(A^\infty + z)^{-1}$,

$$\begin{aligned} & \text{Tr} \{ (A^\theta + z)^{-1} - (A^\infty + z)^{-1} \} \sim \\ & \sim \left[\nu z^{-1} + \sum_{k=0}^{\infty} C_k''(\nu) z^{-3-2k} \right] \times \\ & \times \sum_{N=0}^{\infty} (-1)^N 4^{N\nu} \left[\frac{\Gamma(1+\nu)}{\Gamma(1-\nu)} \right]^N \theta^N z^{-N\nu} \left[1 + \sum_{k=1}^{\infty} C_k(\nu) z^{-2k} \right]^N. \end{aligned} \quad (376)$$

Comparando las ecuaciones (367) y (376) se observa que,

$$\alpha_{2n+1}(\nu, V) = 0. \quad (377)$$

Concluimos entonces que los polos de la función $\zeta_A^\theta(s) - \zeta_A^\infty(s)$ indicados en la expresión (368) no están presentes para el potencial $V(x) = x^2$.

Sin embargo, el desarrollo asintótico (376) presenta también potencias de la forma,

$$z^{-N\nu-1-2n}, \quad (378)$$

con $n = 0, 1, \dots$. En consecuencia, en virtud de la ecuación (370), la función $\zeta_A^\theta(s) - \zeta_A^\infty(s)$ presenta polos simples en los puntos $s_{N,n}$ del plano complejo dados por,

$$s_{N,n} = -N\nu - 2n, \quad (379)$$

con $N = 1, 2, \dots$ y $n = 0, 1, \dots$. En particular, de acuerdo con el término dominante en (376) y con la expresión (371), existe un polo simple en el punto,

$$s_{1,0} = -\nu, \quad (380)$$

cuyo residuo está dado por,

$$\frac{4^\nu}{\Gamma^2(-\nu)} \theta. \quad (381)$$

Este resultado será verificado luego en la sección VI.1.

V.4.2. Caso compacto

Finalizamos este capítulo aplicando los resultados de la sección V.3 para estudiar el desarrollo asintótico de la traza de la resolvente del operador,

$$A = -\partial_x^2 + \frac{\nu^2 - 1/4}{x^2} + V(x), \quad (382)$$

donde $x \in [0, 1] \in \mathbb{R}$ y el potencial es analítico en x .

Los cálculos que presentaremos a continuación son similares a los desarrollados para el caso del operador diferencial (340) definido sobre la variedad de base no compacta \mathbb{R}^+ en la sección V.4.1. Sin embargo, no obtendremos explícitamente el desarrollo asintótico de la resolvente, tal como está expresado en la ecuación (367), sino que calcularemos una expresión similar a (362) que verificaremos luego, en la sección VI.2, para el caso particular $V(x) = 0$.

De acuerdo con la ecuación (307), las extensiones autoadjuntas del operador correspondientes a condiciones de contorno locales están caracterizadas por dos parámetros reales θ, β que describen el comportamiento de las funciones $\phi(x)$ pertenecientes al dominio $\mathcal{D}(A)$ en los extremos de $[0, 1]$.

Nuestro propósito es obtener el factor $K(\lambda)$ a partir del comportamiento en el origen de la función $G_\infty(x, \lambda)$ (véase la ecuación (330).) Por su parte, esta función está definida, por medio de la ecuación (315), en términos de la resolvente correspondiente a la extensión $\theta = \infty$.

Si utilizamos la expresión (236) para el núcleo de la resolvente $G_\infty(x', \lambda)$,

$$\begin{aligned} G_\infty(x', \lambda) &:= \lim_{x \rightarrow 0} x^{-\nu-1/2} G_\infty(x, x', \lambda) = \\ &= -\frac{\lim_{x \rightarrow 0} x^{-\nu-1/2} L(x, \lambda)}{W[L, R](\lambda)} R(x', \lambda). \end{aligned} \quad (383)$$

En consecuencia, el factor $K(\lambda)$ está determinado por el comportamiento de $R(x', \lambda)$ en el origen. En efecto,

$$R(x \sim 0, \lambda) \sim x^{-\nu+1/2} - K(\lambda)^{-1}(\lambda)x^{\nu+1/2} + \dots \quad (384)$$

El resto de esta sección está dedicado a calcular el factor $K(\lambda)$ a partir del comportamiento en el origen de la autofunción $R(x, \lambda)$ del operador (382) que satisface la condición de contorno determinada por β en el extremo $x = 1$ del intervalo $[0, 1] \subset \mathbb{R}$.

Consideremos entonces la solución $R(x, \lambda = \mu^2)$ al siguiente problema,

$$\left(-\partial_x^2 + \frac{\nu^2 - 1/4}{x^2} + V(x) - \mu^2 \right) R(x, \mu^2) = 0, \quad (385)$$

$$[\partial_x R(x, \mu^2) - \beta R(x, \mu^2)]|_{x=1} = 0. \quad (386)$$

Derivaremos una solución asintótica de la ecuación (385), para grandes valores de μ .

Al igual que en la sección anterior, es conveniente definir una transformación de escala $y := \mu x$, de modo que la ecuación (385) tome la forma,

$$\left(-\partial_y^2 + \frac{\nu^2 - 1/4}{y^2} - 1 \right) R(y/\mu, \mu^2) = -V(y/\mu)R(y/\mu, \mu^2). \quad (387)$$

Calcularemos la ecuación integral asociada a la igualdad (387). Para ello, debemos encontrar la función de Green $G_0(y, y')$ del operador diferencial del miembro izquierdo de (387). Definimos entonces las funciones,

$$l(y) := \sqrt{y} J_\nu(y), \quad (388)$$

$$r(y) := \sqrt{y} \left(\gamma J_\nu(y) - \frac{\pi}{2\gamma} N_\nu(y) \right), \quad (389)$$

donde,

$$\gamma := \frac{\pi (1/2 - \beta) N_\nu(\mu) + \mu N'_\nu(\mu)}{2 (1/2 - \beta) J_\nu(\mu) + \mu J'_\nu(\mu)}. \quad (390)$$

Las funciones $l(y), r(y)$ pertenecen al núcleo del operador diferencial del miembro izquierdo de (387). Por otra parte, $r(\mu, x)$ satisface la condición de contorno (386).

De acuerdo con la ecuación (236), la función de Green $G^{(V=0)}(y, y')$ que buscamos está dada por,

$$G^{(V=0)}(y, y') = - \frac{\theta(y' - y)l(y)r(y') + \theta(y - y')l(y')r(y)}{W[l, r]}, \quad (391)$$

donde $W[l, r]$ es el wronskiano,

$$W[l, r] = l(y)r'(y) - l'(y)r(y) = -1. \quad (392)$$

En consecuencia, la solución $R(y/\mu, \mu^2)$ de la ecuación (387) está dada por,

$$\begin{aligned} R(x, \mu^2) &= - \frac{1}{\mu^2} \int_0^\mu G^{(V=0)}(\mu x, y') V(y'/\mu) dy' = \\ &= r(\mu x) + \frac{1}{\mu} \int_0^1 K(x, x') R(x', \mu^2) dx'; \end{aligned} \quad (393)$$

siendo,

$$K(x, x') := \theta(x' - x) \cdot \{\mu x, \mu x'\} \cdot V(x'), \quad (394)$$

$$\{x, x'\} := -l(x)r(x') + l(x')r(x). \quad (395)$$

La función $R(x, \mu^2)$ cuyo comportamiento en el origen determina el factor $K(\lambda)$ satisface, entonces, una ecuación integral de Volterra cuyo núcleo $K(x, x')$ es continuo en $(0, 1) \times (0, 1)$ e integrable en $[0, 1] \times [0, 1]$.

Si designamos por $*$ la convolución de funciones, la ecuación (393) puede escribirse,

$$R - \frac{1}{\mu} K * R = r, \quad (396)$$

cuya solución está dada por,

$$R = \sum_{n=0}^{\infty} K_n * r \cdot \mu^{-n}, \quad (397)$$

siendo,

$$K_0 := 1, \quad (398)$$

$$K_1 := K, \quad (399)$$

$$K_{n+1} := K * K_n. \quad (400)$$

La serie (397) converge uniformemente para μ suficientemente grande (véase, *e.g.*, [39]) por lo que provee un desarrollo asintótico para el comportamiento en el origen de $R(x, \mu^2)$ y, en consecuencia, para $K(\lambda)$.

Examinando el comportamiento en el origen de los distintos términos de la serie en (397) podemos obtener los coeficientes correspondientes a las potencias $x^{-\nu+1/2}$ y $x^{\nu+1/2}$ cuyo cociente determina, de acuerdo con la ecuación (384), el factor $K(\lambda)$. De esta manera obtenemos el desarrollo asintótico,

$$K(\mu^2) \sim 4^\nu \frac{\Gamma(1+\nu)}{\Gamma(1-\nu)} e^{i\epsilon\pi\nu} \mu^{-2\nu} \left\{ 1 + \frac{\delta \sum_{n=1}^{\infty} \mu^{-2n} S_r^n(\mu)}{1 + \sum_{n=1}^{\infty} \mu^{-2n} (S_l^n(\mu) - \delta S_r^n(\mu))} \right\}, \quad (401)$$

siendo,

$$\delta := \left(\gamma - \frac{\pi}{2} \cot \pi\nu \right)^{-1} \sim -\frac{2}{\pi} \sin(\pi\nu) e^{-i\epsilon\pi\nu}, \quad (402)$$

y,

$$S_r^n(\mu) := \int_0^\mu dx_1 \int_{x_1}^\mu dx_2 \dots \int_{x_{n-1}}^\mu dx_n r(x_1) r(x_2) \dots r(x_n) \times \\ \times V(x_1/\mu) \dots V(x_n/\mu) \cdot \{x_1, x_2\} \dots \{x_{n-1}, x_n\} \quad (403)$$

$$S_l^n(\mu) := \int_0^\mu dx_1 \int_{x_1}^\mu dx_2 \dots \int_{x_{n-1}}^\mu dx_n l(x_1) r(x_2) \dots r(x_n) \times \\ \times V(x_1/\mu) \dots V(x_n/\mu) \cdot \{x_1, x_2\} \dots \{x_{n-1}, x_n\}. \quad (404)$$

El factor ϵ es ± 1 si λ está en el semiplano complejo superior o inferior, respectivamente.

La expresión (401) muestra que el factor $K(\lambda)$ admite un desarrollo asintótico en potencias de λ cuyos exponentes dependen del parámetro ν . En la sección VI.2 consideraremos el caso particular $V(x) := 0$ y obtendremos, con otras técnicas, el factor $K(\lambda)$.

De acuerdo con (401), si $V(x) := 0$ entonces $S_r^n(\mu) = S_l^n(\mu) = 0$ y resulta,

$$K(\lambda) \sim 4^\nu \frac{\Gamma(1+\nu)}{\Gamma(1-\nu)} e^{i\epsilon\pi\nu} \lambda^{-\nu}. \quad (405)$$

Esta expresión será verificada con los cálculos desarrollados en la sección VI.2.

A partir de las ecuaciones (339) y (401) se puede ver que el desarrollo asintótico de la traza de la resolvente $\text{Tr}(A - \lambda)^{-1}$ presenta potencias enteras de $\lambda^{-\nu}$. En consecuencia, la posición de los polos de la función- ζ del operador dado por la expresión (382) depende del parámetro ν . Esto difiere del resultado (1) en el que se establece que la función- ζ correspondiente a un operador diferencial regular de segundo orden A definido sobre funciones del intervalo $[0, 1]$ tiene polos en los semienteros. El motivo de esta discrepancia consiste en la presencia del término singular $(\nu^2 - 1/4)/x^2$ en el operador (382).

Parte VI

Ejemplos: Operadores de Schrödinger

*The art of doing mathematics consists in finding
that special case which contains
all the germs of generality.
(David Hilbert.)*

En este capítulo resolveremos dos ejemplos particulares de operadores de Schrödinger con coeficientes singulares. Primeramente, reproduciremos en la sección VI.1 el trabajo desarrollado en [58], en el que se estudia el operador de Schrödinger dado por la ecuación (297) para el caso $V(x) = x^2$ definido sobre la variedad de base unidimensional no compacta \mathbb{R}^+ . Los resultados de esta sección deben compararse con los de la sección V.4.1.

En la sección VI.2 consideraremos el mismo operador de Schrödinger correspondiente al caso $V(x) = 0$ pero definido sobre una variedad de base unidimensional compacta $[0, 1] \subset \mathbb{R}$. Este problema ha sido resuelto en [56] y confirma los resultados de la sección V.4.2.

En ambos ejemplos encontraremos la resolución espectral del operador, obteniendo una ecuación trascendente para los autovalores y una forma explícita para las autofunciones. Esta resolución permitirá calcular el desarrollo asintótico de la resolvente o, equivalentemente, las singularidades de la función- ζ .

Mostraremos que los polos de las funciones- ζ no están determinados por el orden del operador y la dimensión de la variedad de base, como en el caso de los operadores con coeficientes regulares, sino que pueden depender de los parámetros que caracterizan la singularidad. Señalamos, asimismo, que este resultado está relacionado con la presencia de un conjunto infinito de extensiones autoadjuntas.

VI.1. Un operador de Schrödinger en una variedad de base no compacta

VI.1.1. El operador y su adjunto

En esta sección consideraremos el operador,

$$A = -\partial_x^2 + \frac{\nu^2 - 1/4}{x^2} + x^2, \quad (406)$$

siendo $x \in \mathbb{R}^+$, como un caso particular de (340), con el fin de verificar la expresión (362).

VI.1 UN OPERADOR DE SCHRÖDINGER EN UNA VARIEDAD DE BASE NO COMPACTA

En primer lugar definimos A sobre el conjunto denso $\mathcal{D}(A) := \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^+)$ de funciones con derivadas continuas de todo orden cuyo soporte es compacto y no contiene al origen. Es fácil ver que en este dominio de definición el operador A es simétrico. Sin embargo, A no es autoadjunto.

Para construir sus extensiones autoadjuntas debemos calcular el operador adjunto A^\dagger y determinar los subespacios de deficiencia \mathcal{K}_\pm . Pero, dado que A no es cerrado en $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^+)$, calcularemos primeramente su clausura \overline{A} , esto es, extenderemos el dominio de A a partir del estudio de la clausura de su gráfica. Determinaremos, luego, el comportamiento en el origen de las funciones que pertenecen al dominio de \overline{A} .

Clausura del operador

Mostraremos ahora que si $\phi \in \mathcal{D}(\overline{A})$ entonces,

$$\phi(x) = o(x^{\nu+1/2}) \quad \text{y} \quad \phi'(x) = o(x^{\nu-1/2}), \quad (407)$$

para $\nu \rightarrow 0^+$ y $\nu < 1$.

Para determinar la clausura de la gráfica del operador A , consideramos aquellas sucesiones de Cauchy $\{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ contenidas en $\mathcal{D}(A) = \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^+)$ tales que $\{A\varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ sean también sucesiones de Cauchy. Nótese que, puesto que los coeficientes de A son reales, podemos considerar solamente funciones reales.

Sea $\varphi := \varphi_n - \varphi_m$, con $n, m \in \mathbb{N}$. Entonces $\varphi \rightarrow 0$ y $A\varphi \rightarrow 0$ para $n, m \rightarrow \infty$. Consideremos ahora el producto interno,

$$\begin{aligned} (\varphi, A\varphi) &= \int_0^\infty \varphi \left(-\varphi'' + \frac{\nu^2 - 1/4}{x^2} \varphi + x^2 \varphi \right) dx = \\ &= \int_0^\infty \left(\varphi'^2 + \frac{\nu^2 - 1/4}{x^2} \varphi^2 + x^2 \varphi^2 \right) dx \leq \|\varphi\| \cdot \|A\varphi\| \rightarrow 0, \end{aligned} \quad (408)$$

para $n, m \rightarrow \infty$. Por lo tanto, para $\nu > 1/2$,

$$\{\varphi'_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}}, \quad \left\{ \frac{\varphi_n(x)}{x} \right\}_{n \in \mathbb{N}} \quad \text{y} \quad \{x \varphi_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}}, \quad (409)$$

son también sucesiones de Cauchy.

Lema VI.1.1 *Sea $\{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en $\mathcal{D}(A) = \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^+)$ tal que, para $\nu > 1/2$, $1 \leq a < 2$ y $\nu \neq a$,*

$$\{A\varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}}, \quad \left\{ \frac{\varphi_n(x)}{x^a} \right\}_{n \in \mathbb{N}} \quad \text{y} \quad \left\{ \frac{\varphi'_n(x)}{x^{a-1}} \right\}_{n \in \mathbb{N}}, \quad (410)$$

VI.1 UN OPERADOR DE SCHRÖDINGER EN UNA VARIEDAD DE BASE
NO COMPACTA

sean a su vez sucesiones de Cauchy. Entonces,

$$\left\{ \frac{\varphi_n(x)}{x^{1+a/2}} \right\}_{n \in \mathbb{N}} \quad \text{y} \quad \left\{ \frac{\varphi'_n(x)}{x^{a/2}} \right\}_{n \in \mathbb{N}}, \quad (411)$$

son también sucesiones de Cauchy.

Demostración: Sea $\varphi := \varphi_n - \varphi_m$. Nótese que, para $1 \leq a < 2$,

$$\begin{aligned} \int_0^\infty (x^{1-a/2} \varphi(x))^2 dx &\leq \int_0^1 (\varphi(x))^2 dx + \int_1^\infty (x \varphi(x))^2 dx \leq \\ &\leq \|\varphi(x)\|^2 + \|x \varphi(x)\|^2. \end{aligned} \quad (412)$$

Entonces, de (409), vemos que $\{x^{1-a/2} \varphi_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}}$ es también una sucesión de Cauchy.

Un cálculo sencillo muestra que,

$$\begin{aligned} \left(\frac{\varphi(x)}{x^a}, A\varphi(x) \right) &= \int_0^\infty \left\{ \left(\frac{\varphi'(x)}{x^{a/2}} \right)^2 + \right. \\ &\left. + \left[\nu^2 - \frac{1}{4} - \frac{a(a+1)}{2} \right] \left(\frac{\varphi(x)}{x^{1+a/2}} \right)^2 + (x^{1-a/2} \varphi(x))^2 \right\} dx, \end{aligned} \quad (413)$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\varphi'(x)}{x^{a-1}}, A\varphi(x) \right) &= \int_0^\infty \left\{ - \left(\frac{a-1}{2} \right) \left(\frac{\varphi'(x)}{x^{a/2}} \right)^2 + \right. \\ &\left. + \left(\nu^2 - \frac{1}{4} \right) \left(\frac{a+1}{2} \right) \left(\frac{\varphi(x)}{x^{1+a/2}} \right)^2 + \left(\frac{a-3}{2} \right) (x^{1-a/2} \varphi(x))^2 \right\} dx. \end{aligned} \quad (414)$$

Teniendo en cuenta que la suma de dos sucesiones de Cauchy es también una sucesión de Cauchy, se verifica, para cualquier par de números reales C y C' ,

$$\left(C \frac{\varphi(x)}{x^a} + C' \frac{\varphi'(x)}{x^{a-1}}, A\varphi(x) \right) \rightarrow 0, \quad (415)$$

si $n, m \rightarrow \infty$.

Reemplazando las ecuaciones (413) y (414) en (415), los coeficientes de $\left(\frac{\varphi'(x)}{x^{a/2}} \right)^2$ y $\left(\frac{\varphi(x)}{x^{1+a/2}} \right)^2$ resultan,

$$C - C' \left(\frac{a-1}{2} \right) \quad \text{y} \quad C \left(\nu^2 - \frac{1}{4} - \frac{a(a+1)}{2} \right) + C' \left(\nu^2 - \frac{1}{4} \right) \left(\frac{a+1}{2} \right), \quad (416)$$

respectivamente. Puede verse que, si $\nu \neq a$, estos coeficientes sólo se anulan simultáneamente para $C = C' = 0$. Eligiendo entonces C, C' adecuadamente se prueba el enunciado del lema.

VI.1 UN OPERADOR DE SCHRÖDINGER EN UNA VARIEDAD DE BASE NO COMPACTA

□

Teniendo en cuenta (409), el Lema VI.1.1, para $a = 1$, implica que,

$$\left\{ \frac{\varphi_n(x)}{x^{3/2}} \right\}_{n \in \mathbb{N}} \quad \text{y} \quad \left\{ \frac{\varphi'_n(x)}{x^{1/2}} \right\}_{n \in \mathbb{N}}, \quad (417)$$

son sucesiones de Cauchy. En consecuencia, si ν es un número irracional, aplicando entonces iterativamente el Lema VI.1.1 puede probarse que, para cualquier entero positivo k ,

$$\left\{ \frac{\varphi_n(x)}{x^{2[1-(1/2)^k]}} \right\}_{n \in \mathbb{N}}, \quad \text{y} \quad \left\{ \frac{\varphi'_n(x)}{x^{2[1-(1/2)^k]-1}} \right\}_{n \in \mathbb{N}}, \quad (418)$$

son sucesiones de Cauchy.

Como, en general, para cualquier $\varepsilon > 0$ existen enteros k_1 y k_2 tales que $(1/2)^{k_1} \leq \varepsilon \leq (1/2)^{k_2}$, teniendo en cuenta que,

$$\frac{1}{x^{2-\varepsilon}} \leq \frac{1}{x^{2[1-(1/2)^{k_1}]}} \quad \text{para } 0 < x \leq 1, \quad (419)$$

$$\frac{1}{x^{2-\varepsilon}} \leq \frac{1}{x^{2[1-(1/2)^{k_2}]}} \quad \text{para } x \geq 1,$$

se concluye inmediatamente que,

$$\left\{ \frac{\varphi_n(x)}{x^{2-\varepsilon}} \right\}_{n \in \mathbb{N}}, \quad (420)$$

es una sucesión de Cauchy. La misma conclusión se obtiene análogamente para la sucesión,

$$\left\{ \frac{\varphi'_n(x)}{x^{1-\varepsilon}} \right\}_{n \in \mathbb{N}}. \quad (421)$$

Si ν es un número racional, entonces, a partir de (409) y (417), se ve que existe un irracional $a \in (1, 3/2)$ para el cual el Lema VI.1.1 pueda aplicarse iterativamente para demostrar que las sucesiones (420) y (421) son sucesiones de Cauchy.

Determinaremos ahora el comportamiento de las funciones en $\mathcal{D}(\overline{A})$ cerca del origen. Para cualquier $\varepsilon > 0$, podemos escribir,

$$\begin{aligned} x^{-\nu-1/2} \varphi(x) &= \int_0^x (y^{-\nu-1/2} \varphi(y))' dy = \\ &= \int_0^x y^{-\nu-1/2+1-\varepsilon} \left\{ -\nu - 1/2 \frac{\varphi(y)}{y^{2-\varepsilon}} + \frac{\varphi'(y)}{y^{1-\varepsilon}} \right\} dy. \end{aligned} \quad (422)$$

VI.1 UN OPERADOR DE SCHRÖDINGER EN UNA VARIEDAD DE BASE
NO COMPACTA

Por lo tanto, para $x \leq 1$, $\nu < 1$ y ε suficientemente pequeño, se verifica,

$$|x^{-\nu-1/2} \varphi(x)| \leq \left(\int_0^1 y^{2(-\nu-1/2+1-\varepsilon)} dy \right)^{1/2} \times \quad (423)$$

$$\times |\nu + 1/2| \left\| \frac{\varphi(y)}{y^{2-\varepsilon}} \right\| \cdot \left\| \frac{\varphi'(y)}{y^{1-\varepsilon}} \right\| \rightarrow_{n,m \rightarrow \infty} 0.$$

Por consiguiente, la sucesión $\{x^{-\nu-1/2} \varphi_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}}$, con $\nu < 1$, es uniformemente convergente en $[0, 1]$ y su límite es una función continua que se anula en el origen,

$$x^{-\nu-1/2} \phi(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} (x^{-\nu-1/2} \varphi_n(x)) , \quad (424)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (x^{-\nu-1/2} \phi(x)) = 0 . \quad (425)$$

En particular, para $\nu = -1/2$ tenemos el límite uniforme

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(x) = \phi(x), \quad (426)$$

que coincide con el límite de esta sucesión en $\mathbf{L}_2(\mathbb{R}^+)$.

Por otra parte, también podemos escribir,

$$\int_0^x y^{-\nu+1/2} A\varphi(y) dy = -x^{-\nu+1/2} \varphi'(x) + \quad (427)$$

$$+ \int_0^x y^{-\nu+1/2-\varepsilon} \left\{ (-\nu + 1/2) \frac{\varphi'(y)}{y^{1-\varepsilon}} + \kappa \frac{\varphi(y)}{y^{2-\varepsilon}} \right\} dy +$$

$$+ \int_0^x y^{-\alpha+2} y \varphi(y) dy .$$

Por lo tanto, para $x \leq 1$, $\nu < 1$ y ε suficientemente pequeño, se verifica,

$$|x^{-\nu+1/2} \varphi'(x)| \leq \left(\int_0^1 y^{-2\nu+1} dy \right)^{1/2} \|A\varphi(y)\| + \quad (428)$$

$$\left(\int_0^1 y^{-2\nu+1-2\varepsilon} dy \right)^{1/2} \left\{ |\nu + 1/2| \left\| \frac{\varphi'(y)}{y^{1-\varepsilon}} \right\| + \kappa \left\| \frac{\varphi(y)}{y^{2-\varepsilon}} \right\| \right\} +$$

$$+ \left(\int_0^1 y^{-2\nu+1} dy \right)^{1/2} \|y \varphi(y)\| \rightarrow_{n,m \rightarrow \infty} 0.$$

Consecuentemente, la sucesión $\{x^{-\nu+1/2} \varphi'_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}}$, con $\nu < 1$, es uniformemente convergente en $[0, 1]$ y su límite es una función continua que se anula en el origen,

$$x^{-\nu+1/2} \chi(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} (x^{-\nu+1/2} \varphi'_n(x)) , \quad (429)$$

VI.1 UN OPERADOR DE SCHRÖDINGER EN UNA VARIEDAD DE BASE NO COMPACTA

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (x^{-\nu+1/2} \chi(x)) = 0. \quad (430)$$

En particular, para $\nu = 1/2$, obtenemos el límite uniforme,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi'_n(x) = \chi(x), \quad (431)$$

que coincide con el límite de esta sucesión en $\mathbf{L}_2(\mathbb{R}^+)$ (ver (409)).

Probemos ahora que $\chi(x) = \phi'(x)$. En efecto, para $x \leq 1$, tenemos,

$$\begin{aligned} & \left| \phi(x) - \int_0^x \chi(y) dy \right| \leq \\ & \leq |\phi(x) - \varphi_n(x)| + \left| \int_0^x (\chi(y) - \varphi'_n(y)) dy \right| \leq \\ & \leq |\phi(x) - \varphi_n(x)| + \|\chi - \varphi'_n\| \rightarrow_{n \rightarrow \infty} 0. \end{aligned} \quad (432)$$

Entonces, $\phi(x)$ es una función diferenciable cuya primera derivada es $\chi(x)$.

Finalmente, las ecuaciones (425) y (430) implican que, dado $\varepsilon_1 > 0$ y $\nu < 1$,

$$|\phi(x)| < \varepsilon_1 x^\nu \quad \text{and} \quad |\phi'(x)| < \varepsilon_1 x^{\nu+1/2} \quad (433)$$

si $x < \delta$, para algún $\delta > 0$ suficientemente pequeño. Esto prueba las expresiones (407).

El operador adjunto

Calcularemos ahora el dominio, la forma y las autofunciones del operador adjunto A^\dagger con el fin de determinar los subespacios de deficiencia \mathcal{K}_\pm .

El operador A^\dagger está definido en el subespacio de funciones $\psi(x) \in \mathbf{L}_2(\mathbb{R}^+)$ para las cuales $(\psi, A\varphi)$ es una funcional continua de $\varphi \in \mathcal{D}(A)$. Esto implica la existencia de una función $\tilde{\psi}(x) \in \mathbf{L}_2(\mathbb{R}^+)$ tal que $(\psi, A\varphi) = (\tilde{\psi}, \varphi), \forall \varphi \in \mathcal{D}(A)$.

La función $\tilde{\psi}$ está unívocamente definida pues $\mathcal{D}(A)$ es un subespacio denso de $\mathbf{L}_2(\mathbb{R}^+)$. Definimos entonces $A^\dagger \psi := \tilde{\psi}$.

Por otra parte, si $\psi \in \mathcal{D}(A^\dagger)$ se satisface, $\forall \varphi \in \mathcal{D}(A)$,

$$\begin{aligned} (\psi, A\varphi) &= \int_0^\infty \psi(x)^* \left(-\varphi''(x) + \left[\frac{\nu^2 - 1/4}{x^2} + x^2 \right] \varphi(x) \right) dx = \\ &= \left(-\psi'' + \left[\frac{\nu^2 - 1/4}{x^2} + x^2 \right] \psi, \varphi \right) = (\tilde{\psi}, \varphi), \end{aligned} \quad (434)$$

donde las derivadas de ψ corresponden a la derivada generalizada en $\mathbf{L}_2(\mathbb{R}^+)$ o derivada en el sentido de distribuciones.

La ecuación (434) implica que $\psi''(x)$ es localmente integrable. Por consiguiente, su primitiva $\psi'(x)$ es absolutamente continua para $x > 0$. En consecuencia, el dominio de A^\dagger es el espacio de funciones $\psi(x)$ de cuadrado integrable con una derivada absolutamente continua y que satisfacen [105],

$$A^\dagger \psi(x) = -\psi''(x) + \left(\frac{\nu^2 - 1/4}{x^2} + x^2 \right) \psi(x) \in \mathbf{L}_2(\mathbb{R}^+), \quad (435)$$

Nótese que esto no impone condición de contorno alguna sobre $\psi(x)$ en $x = 0$.

Estudiaremos ahora las autofunciones de A^\dagger con el propósito de determinar los subespacios de deficiencia $\mathcal{K}_\pm = \text{Ker}(A^\dagger \mp i)$ de A .

Subespacios de deficiencia

Para calcular los subespacios de deficiencia debemos resolver el problema de autovalores,

$$A^\dagger \phi_\lambda = -\phi_\lambda''(x) + \left(\frac{\nu^2 - 1/4}{x^2} + x^2 \right) \phi_\lambda(x) = \lambda \phi_\lambda, \quad (436)$$

para $\phi_\lambda \in \mathcal{D}(A^\dagger)$ y $\lambda \in \mathbb{C}$, con su parte imaginaria $\Im(\lambda) \neq 0$.

Mediante el siguiente Ansatz (sugerido por el comportamiento de la soluciones de (436) para $x \rightarrow 0^+$ y $x \rightarrow \infty$),

$$\phi = x^{\nu+1/2} e^{-\frac{x^2}{2}} F(x^2), \quad (437)$$

la ecuación (436) toma la forma de la ecuación de Kummer para $F(z)$,

$$zF''(z) + (b - z)F'(z) - aF(z) = 0, \quad (438)$$

donde $a = (2\nu + 2 - \lambda)/4$ y $b = \nu + 1$.

Como ν es real, la única solución de la ecuación (438) que conduce a una solución de (436) de cuadrado integrable en el infinito está dada por la función de Kummer $U(a; b; z)$ (véase la ecuación (149).) Por lo tanto, las autofunciones de A^\dagger correspondientes al autovalor λ son proporcionales a,

$$\phi_\lambda(x) = x^{\nu+1/2} e^{-\frac{x^2}{2}} U\left(\frac{2\nu + 2 - \lambda}{4}; \nu + 1; x^2\right). \quad (439)$$

Debemos ahora estudiar el comportamiento de ϕ_λ cerca del origen [1]. Para ello consideraremos por separado los siguientes casos, de acuerdo con el valor del parámetro ν :

VI.1 UN OPERADOR DE SCHRÖDINGER EN UNA VARIEDAD DE BASE NO COMPACTA

- Si $\nu \geq 1$, $\phi_\lambda \in L_2(\mathbb{R}^+)$ $\Leftrightarrow a = (2\nu + 2 - \lambda)/4 = -n$, con $n \in \mathbb{N}$. En consecuencia, si $\lambda \notin \mathbb{R}$ entonces $\phi_\lambda \notin L_2(\mathbb{R}^+)$ y los subespacios de deficiencia son triviales.

Esto implica que si $\nu \geq 1$ el operador A es esencialmente autoadjunto, esto es, admite una única extensión autoadjunta que coincide con su clausura \overline{A} . Su espectro está dado por la condición $-a \in \mathbb{N}$, *i.e.*,

$$\lambda_n = 4n + 2\nu + 2, \quad (440)$$

con $n = 0, 1, 2, \dots$. Las autofunciones correspondientes son,

$$\phi_n = (-1)^n n! x^{\nu+1/2} e^{-\frac{x^2}{2}} L_n^{(\nu)}(x^2). \quad (441)$$

- Por su parte, si $0 \leq \nu < 1$ se puede ver que $\phi_\lambda \in L_2(\mathbb{R}^+)$, $\forall \lambda \in \mathbb{C}$ [1]. Los subespacios de deficiencia \mathcal{K}_\pm son, entonces, unidimensionales ($n_\pm = 1$) y el operador A admite una familia de extensiones autoadjuntas caracterizada por un parámetro real ²⁴.

VI.1.2. Extensiones autoadjuntas

Puesto que, para $0 \leq \nu < 1$, los índices de deficiencia satisfacen $n_\pm = 1$, existe una familia de extensiones autoadjuntas de A en correspondencia biunívoca con el conjunto de isometrías de \mathcal{K}_+ en \mathcal{K}_- que está, por lo tanto, caracterizada por un parámetro real.

En efecto, los subespacios de deficiencia \mathcal{K}_+ y \mathcal{K}_- están generados por las funciones $\phi_+ := \phi_{\lambda=i}$ y $\phi_- := \phi_{\lambda=-i} = \phi_+^*$, respectivamente. Por lo tanto, cada isometría $\mathcal{U}_\gamma : \mathcal{K}_+ \rightarrow \mathcal{K}_-$ puede identificarse con el parámetro $\gamma \in [0, \pi)$ definido por,

$$\mathcal{U}_\gamma \phi_+ = e^{-2i\gamma} \phi_-. \quad (442)$$

El operador autoadjunto correspondiente A_γ está definido en el subespacio denso,

$$\mathcal{D}(A_\gamma) \subset \mathcal{D}(A^\dagger) = \mathcal{D}(\overline{A}) \oplus \mathcal{K}_+ \oplus \mathcal{K}_-, \quad (443)$$

²⁴Esto responde al criterio de Weyl [101] según el cual, para un potencial $V(x)$ continuo, el operador $A = -\partial_x^2 + V(x)$ es esencialmente autoadjunto si y sólo si está en el caso de punto límite tanto en el origen como en infinito.

Si $V(x) \geq M > 0$, para x suficientemente grande, entonces A está en el caso punto límite en infinito. Por lo tanto, en nuestro ejemplo, A es esencialmente autoadjunto si y sólo si está en el caso punto límite en el origen.

En particular, para $V(x)$ positivo, si $V(x) \geq 3/4 x^{-2}$ para x suficientemente cerca del origen entonces A está en el caso de punto límite en el origen. Por el contrario, si $V(x) \leq (3/4 - \varepsilon) x^{-2}$, para algún $\varepsilon > 0$, entonces H está en el caso círculo límite en el origen.

Esto confirma nuestro resultado con respecto a las extensiones autoadjuntas del operador A en función de los valores del parámetro ν .

VI.1 UN OPERADOR DE SCHRÖDINGER EN UNA VARIEDAD DE BASE
NO COMPACTA

constituido por las funciones $\phi \in \mathcal{D}(A^\dagger)$ que tiene la forma,

$$\phi = \phi_0 + C (\phi_+ + e^{-2i\gamma} \phi_+^*), \quad (444)$$

con $\phi_0 \in \mathcal{D}(\bar{A})$ y C una constante en \mathbb{C} . Como A_γ es una restricción de A^\dagger se verifica,

$$A_\gamma \phi = A^\dagger \phi = \bar{A} \phi_0 + iC (\phi_+ - e^{-2i\gamma} \phi_+^*). \quad (445)$$

Mostraremos ahora que la condición (444) determina el comportamiento de $\phi \in \mathcal{D}(A_\gamma)$ cerca del origen. Esto permitirá determinar luego el espectro de cada extensión autoadjunta. En adelante consideraremos el caso $1/2 \leq \nu < 1$

De acuerdo con la ecuación (444), la derivada logarítmica de ϕ está dada por,

$$\frac{\phi'}{\phi} = \frac{e^{i\gamma} \phi_0' + 2A \Re(e^{i\gamma} \phi_+')} {e^{i\gamma} \phi_0 + 2A \Re(e^{i\gamma} \phi_+)}. \quad (446)$$

El límite para $x \rightarrow 0^+$ de la ecuación (446) determina la condición de contorno que define el dominio de la extensión autoadjunta caracterizada por el parámetro γ . En virtud de las expresiones (407), el término dominante para $x \sim 0$ está dado por la función ϕ_+ . Por consiguiente, teniendo en cuenta el comportamiento en el origen de la autofunción (439) para $\lambda = i$ [1], obtenemos de la ecuación (446),

$$\left. \frac{\phi'(x)}{\phi(x)} \right|_{x \sim 0} = \frac{1/2 - \nu}{x} + 2\nu \frac{\Gamma(-\nu) \cos(\gamma - \gamma_1)}{\Gamma(\nu) \cos(\gamma - \gamma_2)} \cdot x^{2\nu-1} + o(x^{2\nu-1}), \quad (447)$$

donde $\gamma_1 = \arg \{\Gamma[(-2\nu + 2 - i)/4]\}$ y $\gamma_2 = \arg \{\Gamma[(2\nu + 2 - i)/4]\}$.

La condición de contorno (447) caracteriza la extensión autoadjunta correspondiente a un dado valor del parámetro γ . Como es usual, esta condición de contorno permite determinar el espectro del operador A_γ . Como distintos valores de γ corresponden a distintas condiciones de contorno, o equivalentemente, a distintas extensiones autoadjuntas, es de esperar que exista un espectro distinto asociado a cada valor del parámetro γ .

El espectro

Para determinar el espectro de una extensión autoadjunta A_γ debemos estudiar las soluciones ϕ_λ de la ecuación (436), dadas por (439) con $\lambda \in \mathbb{R}$, que satisfacen la condición de contorno (447). El comportamiento en el origen de las funciones (439) está dado por [1],

$$\left. \frac{\phi'_\lambda(x)}{\phi_\lambda(x)} \right|_{x \sim 0} = \frac{1/2 - \nu}{x} + 2\nu \frac{\Gamma(-\nu) \Gamma\left[\frac{2\nu+2-\lambda}{4}\right]}{\Gamma(\nu) \Gamma\left[\frac{-2\nu+2-\lambda}{4}\right]} \cdot x^{2\nu-1} + o(x^{2\nu-1}). \quad (448)$$

VI.1 UN OPERADOR DE SCHRÖDINGER EN UNA VARIEDAD DE BASE NO COMPACTA

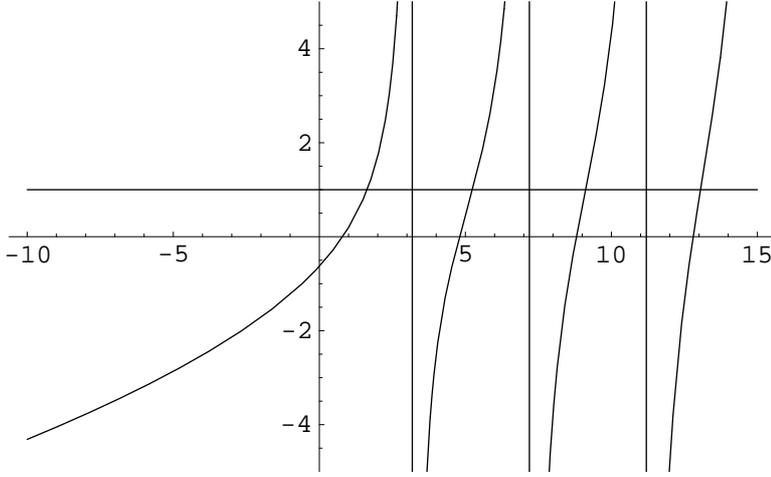


Figura 2: $F(\lambda) := \frac{\Gamma(-\nu)}{\Gamma(\nu)} \frac{\Gamma(\frac{\nu}{2} + \frac{1}{2} - \frac{\lambda}{4})}{\Gamma(-\frac{\nu}{2} + \frac{1}{2} - \frac{\lambda}{4})}$ como función de λ , para $\nu = 3/5$. Las soluciones de $F(\lambda) = \theta$ determinan el espectro de la extensión autoadjunta A^θ .

Comparando las ecuaciones (447) y (448) obtenemos,

$$\frac{\Gamma(\frac{\nu}{2} + \frac{1}{2} - \frac{\lambda}{4})}{\Gamma(-\frac{\nu}{2} + \frac{1}{2} - \frac{\lambda}{4})} = \frac{\Gamma(\nu)}{\Gamma(-\nu)} \theta, \quad (449)$$

donde hemos definido,

$$\theta := \frac{\Gamma(-\nu)}{\Gamma(\nu)} \frac{\cos(\gamma - \gamma_1)}{\cos(\gamma - \gamma_2)}. \quad (450)$$

Teniendo en cuenta que el comportamiento de las autofunciones (439) en el origen está dado por [1],

$$\phi_\lambda(x \sim 0) = \frac{\Gamma(\nu)}{\Gamma(\frac{\nu+1}{2} - \frac{\lambda}{4})} x^{-\nu+1/2} + \frac{\Gamma(-\nu)}{\Gamma(\frac{-\nu+1}{2} - \frac{\lambda}{4})} x^{\nu+1/2} + \dots, \quad (451)$$

puede verse que el parámetro θ que se define en (450) coincide con el parámetro θ definido en la ecuación (307).

El parámetro $\theta \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ determina, mediante la ecuación (449), un espectro discreto para cada extensión autoadjunta, que designaremos a partir de ahora por A^θ . En la Figura 2 se muestran ambos miembros de la ecuación (449) como función de λ , para $\nu = 3/5$ y $\theta = 1$. Las abscissas de las intersecciones de estas funciones representan el espectro de la extensión autoadjunta correspondiente.

De acuerdo con la definición (214), el símbolo del operador A^θ está dado por,

$$\sigma\{A^\theta\}(x, p) = p^2 + \frac{\nu^2 - 1/4}{x^2} + x^2. \quad (452)$$

Si el término dominante del símbolo de un operador autoadjunto, en nuestro caso p^2 , es positivo definido entonces el espectro del operador está acotado inferiormente [68]. En efecto, el espectro de cada uno de los operadores A^θ tiene, como puede apreciarse de la Figura 2, una cota inferior. Sin embargo, aquellas extensiones autoadjuntas A^θ para las cuales,

$$\theta < -\frac{\Gamma(1-\nu)\Gamma(\frac{1+\nu}{2})}{\Gamma(1+\nu)\Gamma(\frac{1-\nu}{2})}, \quad (453)$$

poseen un autovalor negativo, aún cuando el potencial $\frac{\nu^2-1/4}{x^2} + x^2$ es estrictamente positivo. Incluso, no existe un límite inferior uniforme, *i.e.*, común a todas las extensiones autoadjuntas; por el contrario, cualquier número negativo pertenece al espectro de alguna extensión autoadjunta.

Para cualquier valor de ν existen dos extensiones particulares cuyo espectro puede obtenerse explícitamente a partir de la ecuación (449):

- Si $\theta = 0$ el espectro está dado por

$$\lambda_n = 4(n + 1/2 - \nu/2), \quad (454)$$

con $n = 0, 1, 2, \dots$

- Si $\theta = \infty$ el espectro está dado por

$$\lambda_n = 4(n + 1/2 + \nu/2), \quad (455)$$

con $n = 0, 1, 2, \dots$

Nótese que, en general, para cualquier valor de θ los autovalores crecen linealmente con n ,

$$4(n - 1/2 + \nu/2) \leq \lambda_n \leq 4(n + 1/2 + \nu/2). \quad (456)$$

Límite regular

Es interesante considerar el caso particularmente simple del oscilador armónico en la semirecta, en el que el potencial no es singular. En primer lugar, para $\nu = 1/2$, la condición de contorno (ecuación (447)) toma la forma,

$$\frac{\phi'(x)}{\phi(x)} = \theta + O(x), \quad (457)$$

o equivalentemente,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \{ \phi'(x) - \theta \phi(x) \} = 0, \quad (458)$$

que corresponde a las condiciones de contorno Robin en el origen. Las condiciones de contorno Dirichlet y Neumann corresponden a $\theta = \infty$ y $\theta = 0$, respectivamente.

Consideremos ahora, a partir de la condición de contorno (458), las autofunciones y autovalores de las extensiones autoadjuntas de A^θ correspondientes a distintos valores de θ .

VI.1 UN OPERADOR DE SCHRÖDINGER EN UNA VARIEDAD DE BASE NO COMPACTA

- Si $\theta = \infty$ las condiciones de contorno son del tipo Dirichlet y los autovalores (véase la ecuación (455)) están dados por,

$$\lambda_n = 4n + 3, \quad (459)$$

con $n = 0, 1, 2, \dots$. Como el operador (406) corresponde, para $\nu = 1/2$, al hamiltoniano de un oscilador armónico de masa $m = 1/2$ y frecuencia $\omega = 2$, los autovalores pueden escribirse $\lambda_n = \omega[(2n + 1) + 1/2]$, que representa la parte del espectro asociada a los autovectores impares del oscilador armónico en \mathbb{R} . En efecto, las autofunciones (439) están dadas por [1],

$$\phi_n = 2^{-2n-1} e^{-\frac{x^2}{2}} H_{2n+1}(x). \quad (460)$$

- Si $\theta = 0$ las condiciones de contorno son del tipo Neumann y los autovalores (véase (454)) están dados por,

$$\lambda_n = 4n + 1, \quad (461)$$

donde $n = 0, 1, 2, \dots$. Estos autovalores pueden escribirse como $\lambda_n = \omega(2n + 1/2)$, que corresponde a los autovalores del sector de autofunciones pares del oscilador armónico en \mathbb{R} . Las autofunciones (439) están dadas por,

$$\phi_n = 2^{-2n} e^{-\frac{x^2}{2}} H_{2n}(x). \quad (462)$$

- Si $\theta \neq 0, \infty$ las condiciones de contorno son del tipo Robin y los autovalores están determinados por la ecuación trascendental,

$$-2 \frac{\Gamma\left(\frac{3-\lambda}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{1-\lambda}{4}\right)} = \theta. \quad (463)$$

Las correspondientes autofunciones (439) están dadas por,

$$\phi_\lambda = x e^{-\frac{x^2}{2}} U\left(\frac{3-\lambda}{4}; \frac{3}{2}; x^2\right). \quad (464)$$

Cabe observar que, para condiciones de contorno Robin y $\theta < -2\Gamma(\frac{3}{4})/\Gamma(\frac{1}{4})$, la energía del estado fundamental es negativa y, por lo tanto, menor que el mínimo del potencial.

De acuerdo con lo presentado en la sección (II.3), la subvariedad de Cayley \mathcal{C}_- está identificada con la condición de contorno Dirichlet. Si consideramos una familia de extensiones autoadjuntas A^θ con $\theta \rightarrow -\infty$, obtenemos la condición de contorno y el espectro correspondientes a \mathcal{C}_- . De acuerdo con el Teorema (II.3), el autovalor del estado fundamental tiende a $-\infty$ junto con θ y la autofunción se concentra en el borde de la variedad. La Figura 3 representa los estados fundamentales correspondientes a cuatro extensiones A^θ y muestra que estos estados tienden a un “estado de borde” a medida que la extensión correspondiente se acerca a \mathcal{C}_- , o equivalentemente, que el autovalor del estado fundamental tiende a $-\infty$.

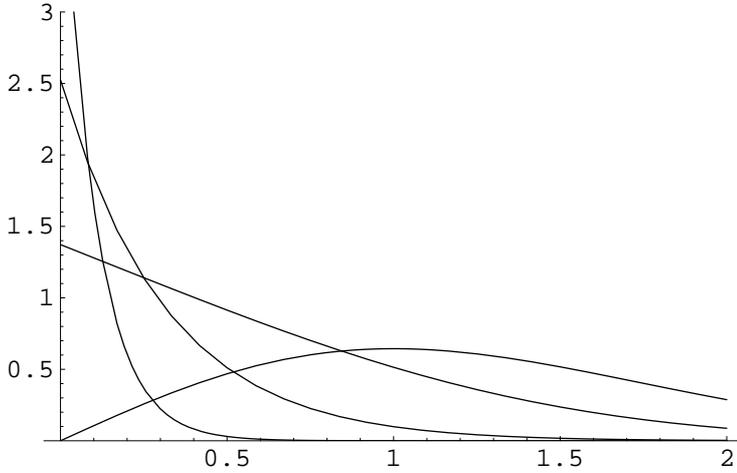


Figura 3: Autofunciones de los estados fundamentales, de acuerdo con (464) de cuatro distintas extensiones autoadjuntas del operador A , dado por (406) para el caso $\nu = 1/2$. Puede observarse que a medida que el autovalor tiende a $-\infty$, o que la condición de contorno tiende a la subvariedad de Cayley, \mathcal{C}_- las autofunciones se concentran en el borde de la variedad. Los autovalores correspondientes a los estados graficados son $\lambda_0 = 3, 0, -10, -100$.

VI.1.3. Estructura de polos de la función- ζ

Representación integral de la función- ζ .

El espectro de cada extensión autoadjunta A^θ del operador dado por la expresión (406), está determinado por la ecuación (449), para cualquier $\theta \in (-\infty, \infty]$. En esta sección, estudiaremos la estructura de polos de la función $\zeta_A^\theta(s)$ asociada al operador A^θ ,

$$\zeta_A^\theta(s) := \text{Tr} \left\{ (A^\theta)^{-s} \right\} = \sum_n \lambda_n^{-s}. \quad (465)$$

Nótese que, como la ecuación (456) indica que los autovalores crecen linealmente con n , la función $\zeta_A^\theta(s)$ es analítica en el semiplano $\Re(s) > 1$.

Es conveniente definir la función entera,

$$f(\lambda) = \frac{1}{\Gamma\left(-\frac{\nu}{2} + \frac{1}{2} - \frac{\lambda}{4}\right)} - \frac{\Gamma(\nu)}{\Gamma(-\nu)} \frac{\theta}{\Gamma\left(\frac{\nu}{2} + \frac{1}{2} - \frac{\lambda}{4}\right)}, \quad (466)$$

con $\frac{1}{2} \leq \nu < 1$. Los autovalores del operador autoadjunto A^θ corresponden a los ceros de $f(\lambda)$ que son, por consiguiente, reales. Estos ceros son también positivos a excepción, eventualmente, del primero de ellos.

Asimismo, los ceros de $f(\lambda)$ son simples. Supongamos que esto no sea cierto, *i.e.*,

VI.1 UN OPERADOR DE SCHRÖDINGER EN UNA VARIEDAD DE BASE NO COMPACTA

que existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $f(\lambda) = f'(\lambda) = 0$. Teniendo en cuenta que,

$$\begin{aligned} f'(\lambda) &= \frac{\psi\left(-\frac{\nu}{2} + \frac{1}{2} - \frac{\lambda}{4}\right)}{4\Gamma\left(-\frac{\nu}{2} + \frac{1}{2} - \frac{\lambda}{4}\right)} - \theta \frac{\Gamma(\nu)}{\Gamma(-\nu)} \frac{\psi\left(\frac{\nu}{2} + \frac{1}{2} - \frac{\lambda}{4}\right)}{4\Gamma\left(\frac{\nu}{2} + \frac{1}{2} - \frac{\lambda}{4}\right)} = \\ &= \frac{1}{4} \left\{ \frac{[\psi\left(-\frac{\nu}{2} + \frac{1}{2} - \frac{\lambda}{4}\right) - \psi\left(\frac{\nu}{2} + \frac{1}{2} - \frac{\lambda}{4}\right)]}{\Gamma\left(-\frac{\nu}{2} + \frac{1}{2} - \frac{\lambda}{4}\right)} + \psi\left(\frac{\nu}{2} + \frac{1}{2} - \lambda/4\right) f(\lambda) \right\}, \end{aligned} \quad (467)$$

siendo $\psi(z)$ la función poligamma, vemos, por consiguiente, que,

$$\psi\left(-\frac{\nu}{2} + \frac{1}{2} - \lambda/4\right) = \psi\left(\frac{\nu}{2} + \frac{1}{2} - \lambda/4\right). \quad (468)$$

Pero esto no se cumple para ningún $\lambda \in \mathbb{R}$, si $\frac{1}{2} \leq \nu < 1$. Nótese que todos los residuos de la función $f'(\lambda)/f(\lambda)$ valen 1, de modo que su estructura de singularidades coincide con la de la traza de la resolvente $\text{Tr}(A^\theta - \lambda)^{-1}$.

En consecuencia, la función ζ_A^θ admite una representación integral de la forma,

$$\zeta_A^\theta(s) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathcal{C}} \lambda^{-s} \frac{f'(\lambda)}{f(\lambda)} + \theta(-\lambda_0) \lambda_0^{-s}, \quad (469)$$

donde \mathcal{C} es una curva que encierra los ceros positivos de $f(\lambda)$ en sentido antihorario y $\theta(\cdot)$ es la función de Heaviside.

Consideremos ahora el comportamiento asintótico dominante del cociente,

$$\frac{f'(\lambda)}{f(\lambda)} = \frac{[\psi\left(-\frac{\nu}{2} + \frac{1}{2} - \frac{\lambda}{4}\right) - \psi\left(\frac{\nu}{2} + \frac{1}{2} - \frac{\lambda}{4}\right)]}{4 \left(1 - \theta \frac{\Gamma(\nu)}{\Gamma(-\nu)} \frac{\Gamma\left(-\frac{\nu}{2} + \frac{1}{2} - \frac{\lambda}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu}{2} + \frac{1}{2} - \frac{\lambda}{4}\right)}\right)} + \frac{1}{4} \psi\left(\frac{\nu}{2} + \frac{1}{2} - \lambda/4\right). \quad (470)$$

Para $|\arg(-\lambda)| < \pi$ y $|\lambda| \rightarrow \infty$,

$$\psi\left(\frac{\nu}{2} + \frac{1}{2} - \lambda/4\right) = \log(-\lambda) + O(1), \quad (471)$$

$$\psi\left(-\frac{\nu}{2} + \frac{1}{2} - \lambda/4\right) - \psi\left(\frac{\nu}{2} + \frac{1}{2} - \lambda/4\right) = O(\lambda^{-1}), \quad (472)$$

$$\frac{\Gamma\left(-\frac{\nu}{2} + \frac{1}{2} - \frac{\lambda}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu}{2} + \frac{1}{2} - \frac{\lambda}{4}\right)} = O(\lambda^{-\nu}). \quad (473)$$

En consecuencia, si $\Re(s) > 1$, el camino de integración en la expresión (469) puede hacerse coincidir con el eje imaginario,

$$\zeta_A^\theta(s) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty+0}^{i\infty+0} \lambda^{-s} \frac{f'(\lambda)}{f(\lambda)} d\lambda + h(s), \quad (474)$$

donde $h(s)$ es una función entera proveniente de la contribución de un eventual autovalor negativo.

Polos de la función- ζ

La integral en (474), que es una función analítica en el semiplano $\Re(s) > 1$ que admite una extensión meromorfa a todo el plano complejo s , puede expresarse como,

$$\begin{aligned} \zeta_A^\theta(s) &= -\frac{1}{2\pi i} \int_i^{i\infty} \frac{f'(\lambda)}{f(\lambda)} \lambda^{-s} d\lambda - \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{-i} \frac{f'(\lambda)}{f(\lambda)} \lambda^{-s} d\lambda + h_1(s) = \\ &= -\frac{e^{-is\pi/2}}{2\pi} \int_1^\infty \frac{f'(i\mu)}{f(i\mu)} \mu^{-s} d\mu - \frac{e^{is\pi/2}}{2\pi} \int_1^\infty \frac{f'(-i\mu)}{f(-i\mu)} \mu^{-s} d\mu + h_1(s), \end{aligned} \quad (475)$$

donde $h_1(s)$ es una función entera.

El desarrollo asintótico de $f'(\lambda)/f(\lambda)$ (véase el Apéndice (X.4)) está dado por,

$$\begin{aligned} \frac{f'(\lambda)}{f(\lambda)} &\sim \frac{1}{4} \log(-\lambda) + \frac{1}{4} \sum_{k=0}^{\infty} c_k(\nu) (-\lambda)^{-k} + \\ &+ \sum_{N=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} C_{N,n}(\nu, \theta) (-\lambda)^{-N\nu-2n-1}, \end{aligned} \quad (476)$$

donde los coeficientes $c_k(\nu)$ son polinomios en ν cuya forma explícita no presentamos, en tanto que los coeficientes $C_{N,n}(\nu, \theta)$ están dados por,

$$C_{N,n}(\nu, \theta) = - \left(4^\nu \frac{\Gamma(\nu)}{\Gamma(-\nu)} \theta \right)^N \left(\nu + \frac{2n}{N} \right) b_n(\nu, N). \quad (477)$$

Los coeficientes $b_n(\nu, N)$ se definen en la ecuación (827).

Como puede verse de la ecuación (476), el desarrollo asintótico de $f'(\lambda)/f(\lambda)$ contiene el término logarítmico $\frac{1}{4} \log(-\lambda)$ y una serie de potencias enteras negativas de λ relacionadas con la función poligamma del último término del miembro derecho de la ecuación (470). Existe también una serie de potencias de λ que dependen de ν provenientes del primer término del miembro derecho de (470).

Reemplazando el término logarítmico dominante del desarrollo (476) en la ecuación (475) obtenemos,

$$\begin{aligned} &-\frac{1}{8\pi} \int_1^\infty \left[e^{-i\frac{\pi s}{2}} \log(e^{-i\frac{\pi}{2}} \mu) + e^{i\frac{\pi s}{2}} \log(e^{i\frac{\pi}{2}} \mu) \right] \mu^{-s} d\mu = \\ &= \frac{\sin(\frac{\pi s}{2})}{8(s-1)} - \frac{\cos(\frac{\pi s}{2})}{4\pi(s-1)^2} = \frac{1}{4(s-1)} + h_2(s), \end{aligned} \quad (478)$$

donde $h_2(s)$ es una función entera. En consecuencia, la extensión analítica de este término presenta un único polo simple en,

$$s = 1, \quad (479)$$

**VI.1 UN OPERADOR DE SCHRÖDINGER EN UNA VARIEDAD DE BASE
NO COMPACTA**

con un residuo igual a $1/4$.

Los términos restantes en la expresión asintótica de $f'(\lambda)/f(\lambda)$ tienen la forma $A_j (-\lambda)^{-j}$, para algún $j \geq 0$ (ver (476).) Reemplazando estas potencias en la ecuación (475) obtenemos,

$$\begin{aligned} & -\frac{A_j}{2\pi} \int_1^\infty [e^{-i\frac{\pi}{2}(s-j)} + e^{i\frac{\pi}{2}(s-j)}] \mu^{-s-j} d\mu = \\ & = -\frac{A_j}{\pi} \cos\left(\frac{\pi}{2}(s-j)\right) \frac{1}{s-(1-j)} = \\ & = -\frac{A_j \sin(\pi j)}{\pi} \frac{1}{s-(1-j)} + h_3(s), \end{aligned} \tag{480}$$

donde $h_3(s)$ es una función entera. Por lo tanto, cada potencia en el desarrollo asintótico $f'(\lambda)/f(\lambda)$ de la forma $A_j (-\lambda)^{-j}$ contribuye con un polo simple en $s = 1 - j$, con residuo $-(A_j/\pi) \sin(\pi j)$, al conjunto de singularidades de la función $\zeta_A^\theta(s)$.

Debe observarse que este residuo se anula para valores enteros de j . Esto sucede para las contribuciones provenientes del desarrollo asintótico de $\psi(\frac{\nu}{2} + \frac{1}{2} - \lambda/4)$ en el último término del miembro derecho de la ecuación (470), con excepción del término logarítmico. De hecho, la contribución de este término origina la única singularidad presente en los casos $\theta = \infty$ y $\theta = 0$ (ver (470).)

No obstante, para una extensión autoadjunta general, existen también, para $\frac{1}{2} \leq \nu < 1$, polos en posiciones dependientes de ν provenientes de las potencias de la serie del último término del miembro derecho (476).

En conclusión, aparte del polo en $s = 1$ con residuo $1/4$, la función $\zeta_A^\theta(s)$ de la extensión autoadjunta A^θ presenta, para cada par de enteros,

$$(N, n) \quad \text{con } N = 1, 2, 3, \dots \text{ y } n = 0, 1, 2, \dots \tag{481}$$

un polo simple en,

$$s_{N,n} = -N\nu - 2n \in (-N - 2n, -N/2 - 2n], \tag{482}$$

con residuo,

$$\text{Res} \{ \zeta_A^\theta(s) \} \Big|_{s=-N\nu-2n} = C_{N,n}(\nu, \theta) \frac{\sin(\pi N\nu)}{\pi}, \tag{483}$$

Nótese que el residuo en el polo $s_{N,n}$ es proporcional a θ^N (ver (477).)

En rigor, si ν es un número racional, existe un número finito de pares (N, n) que contribuyen al mismo polo y el residuo debe obtenerse sumando las contribuciones correspondientes a cada uno de estos pares. Por el contrario, si ν es irracional, los polos

correspondientes a distintos pares (N, n) no coinciden y el residuo está dado por la expresión (483).

Los polos dados por (482) están distribuidos en sucesiones caracterizadas por un entero $N = 1, 2, \dots$. En cada sucesión, polos contiguos difieren en -2 . Por ejemplo, los polos $s_{1,n}$ correspondientes a los pares $(N = 1, n)$, con $n = 0, 1, 2, \dots$, están ubicados, de acuerdo con (482), en los puntos del plano complejo,

$$-1 - 2n < s_{1,n} = -\nu - 2n \leq -\frac{1}{2} - 2n, \quad (484)$$

y tienen residuos,

$$\text{Res}(\cdot)|_{s=-\nu-2n} = \frac{C_{1,n}(\nu, \theta)}{\pi} \sin(\pi\nu). \quad (485)$$

Para $n = 0$, *e.g.*, obtenemos un polo en $s = -\nu$ con residuo,

$$\text{Res}(\cdot)|_{s=-\nu} = \frac{C_{1,0}(\nu, \theta)}{\pi} \sin(\pi\nu) = \frac{4^\nu}{\Gamma^2(-\nu)} \theta, \quad (486)$$

que coincide con el valor calculado en (381). Se confirman entonces, para el caso del potencial $V(x) = x^2$, los resultados de la sección V.4.1; véase, en particular la ecuación (379).

Este resultado ilustra la idea central de esta Tesis: la función- ζ correspondiente a las extensiones autoadjuntas de A posee polos simples en posiciones dependientes de ν , que, en general, no son enteros negativos. Los residuos dependen, por su parte, de la extensión autoadjunta considerada.

Destacamos, finalmente, que un polo de $\zeta_A^\theta(s)$ en un valor no entero $s = -N\nu - 2n$ implica que el desarrollo asintótico a pequeños valores de t de la traza del heat-kernel $\text{Tr} \{e^{-tA(\beta)}\}$ presenta un término de la forma,

$$b_{N,5n}(A) \theta^N t^{\nu N+2n}, \quad (487)$$

cuyo coeficiente está dado por,

$$b_{N,5n}(A) \theta^N = \Gamma(-N\nu - 2n) \text{Res}\{\zeta_A^\theta(s)\}|_{s=-N\nu-2n}. \quad (488)$$

Esto está de acuerdo con el desarrollo asintótico (19).

VI.1.4. Comportamiento asintótico de los autovalores

La singular estructura de polos de la función $\zeta_A^\theta(s)$ dada por la ecuación (482) puede obtenerse también determinando, a partir de (449), el desarrollo asintótico de los autovalores λ_n para $n \gg 1$. En efecto, dado el Ansatz,

$$\frac{\lambda_n}{4} = \frac{1}{2} - \frac{\nu}{2} + n + \varepsilon, \quad (489)$$

**VI.1 UN OPERADOR DE SCHRÖDINGER EN UNA VARIEDAD DE BASE
NO COMPACTA**

podemos determinar ε mediante sucesivas correcciones. Los primeros términos resultan,

$$\begin{aligned} \frac{\lambda_n}{4} &\sim \frac{1}{2} - \frac{\nu}{2} + n - \frac{\Gamma(\nu)}{\Gamma(-\nu)} \frac{\theta}{\pi} \sin(\pi\nu) n^{-\nu} - \\ &\quad - \frac{\Gamma(\nu)}{\Gamma(-\nu)} \frac{\theta}{2\pi} \nu(\nu-1) \sin(\pi\nu) n^{-\nu-1} - \\ &\quad - \frac{\Gamma^2(\nu)}{\Gamma^2(-\nu)} \frac{\theta^2}{2\pi} \sin(2\pi\nu) n^{-2\nu} + O(n^{-2}). \end{aligned} \quad (490)$$

Esto permite escribir la función $\zeta_A^\theta(s)$ de la forma,

$$\begin{aligned} \zeta_A^\theta(s) &\sim 4^{-s} \zeta_R(s) + s 4^{-s} \left(\frac{\nu}{2} - \frac{1}{2} \right) \zeta_R(s+1) + \\ &\quad + s(s+1) 4^{-s} \frac{\left(\frac{\nu}{2} - \frac{1}{2} \right)^2}{2} \zeta_R(s+2) + \\ &\quad + s 4^{-s} \frac{\Gamma(\nu)}{\Gamma(-\nu)} \frac{\theta}{\pi} \sin(\pi\nu) \zeta_R(s+\nu+1) + \\ &\quad + s(s+\nu+1) 4^{-s} \frac{\Gamma(\nu)}{\Gamma(-\nu)} \frac{\theta}{\pi} \left(\frac{\nu}{2} - \frac{1}{2} \right) \sin(\pi\nu) \zeta_R(2+s+\nu) + \\ &\quad + s 4^{-s} \frac{\Gamma^2(\nu)}{\Gamma^2(-\nu)} \frac{\theta^2}{2\pi} \sin(2\pi\nu) \zeta_R(s+1+2\nu) + \dots \end{aligned} \quad (491)$$

donde $\zeta_R(z)$ es la función- ζ de Riemann, que posee un único polo simple en $z = 1$, con residuo igual a 1. Los polos que se derivan de la expresión (491) coinciden con los primeros polos dados por las ecuaciones (479) y (482).

VI.1.5. Casos particulares

En esta sección mostraremos que para las extensiones autoadjuntas cuyos dominios son invariantes de escala, caracterizadas por $\theta = 0$ y $\theta = \infty$, la función- ζ presenta un único polo simple. Veremos luego que nuestros resultados se reducen a los usuales para el caso $\nu = 0$, en el que el potencial no es singular.

Las extensiones autoadjuntas invariantes de escala

La funciones ζ_A^0 y ζ_A^∞ pueden calcularse en forma exacta pues conocemos sus espectros explícitamente (véanse las ecuaciones (454) y (455)),

$$\zeta_A^0(s) = 4^{-s} \sum_{n=0}^{\infty} \left(n + \frac{1}{2} - \frac{\nu}{2}\right)^{-s} = 4^{-s} \zeta_H(s, (1 - \nu)/2),$$

(492)

$$\zeta_A^\infty(s) = 4^{-s} \sum_{n=0}^{\infty} \left(n + \frac{1}{2} + \frac{\nu}{2}\right)^{-s} = 4^{-s} \zeta_H(s, (1 + \nu)/2),$$

donde $\zeta_H(z, q)$ es a función- ζ de Hurwitz cuya extensión analítica tiene un único polo simple en $z = 1$, con residuo $\text{Res } \zeta(z, q)|_{z=1} = 1$. Esto implica que tanto ζ_A^0 como ζ_A^∞ presentan un único polo simple en $s = 1$, con residuo $1/4$, en coincidencia con la ecuación (479).

Efectivamente, a partir de las ecuaciones (483) y (477) es evidente que todos los residuos correspondientes a los polos negativos se anulan para $\theta = 0$. Por otro lado, si $\theta = \infty$, $f'(\lambda)/f(\lambda)$ se reduce a $1/4 \psi(\nu/2 + 1/2 - \lambda/4)$ (véase la ecuación (470)) por lo que el único término que contribuye a las singularidades de la función- ζ es el logaritmo del desarrollo asintótico (476), que conduce a un polo en $s = 1$ con residuo $1/4$ (véase la ecuación (479).)

El oscilador armónico en la semirrecta

Para el oscilador armónico en la semirrecta, correspondiente al caso $\nu = 1/2$, existe un polo simple en $s = 1$, con residuo $1/4$. Como ya hemos señalado, esta es la única singularidad presente si se imponen condiciones de contorno del tipo de Dirichlet o de Neumann.

Para condiciones de contorno del tipo de Robin las singularidades restantes se encuentran en los puntos (véase la ecuación (482)),

$$s = -\frac{N}{2} - 2n, \quad \text{con } N = 1, 2, 3, \dots \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (493)$$

con residuos dados por (véase la ecuación (483)),

$$\begin{aligned} \text{Res } (\cdot) |_{s=-\frac{N}{2}-2n} = \\ = \frac{(-1)^N}{\pi} C_{N,n}(\nu = 1/2, \beta) \sin\left(\frac{3\pi}{2}N\right), \end{aligned} \quad (494)$$

que se anulan para N par.

VI.2 UN OPERADOR DE SCHRÖDINGER EN UNA VARIEDAD DE BASE COMPACTA

Por lo tanto, los polos de la función- ζ , a excepción del primero, en $s = 1$, son semienteros negativos,

$$s = -k - 1/2, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (495)$$

en acuerdo con el resultado (1).

Por otra parte, para todos aquellos pares (N, n) que verifiquen $N + 4n = 2k + 1$, los polos correspondientes coinciden. Por consiguiente, el residuo de $\zeta_A^\theta(s)$ en $s = -k - 1/2$ es la suma de estas contribuciones, caracterizadas por $N = 2(k - 2n) + 1$, con $n = 0, 1, 2, \dots, [k/2]$. Obtenemos, entonces,

$$\text{Res}(\zeta_A^\theta(s))\big|_{s=-k-\frac{1}{2}} = \frac{(-1)^{k+1}}{\pi} \sum_{n=0}^{[k/2]} C_{[2(k-2n)+1],n}(1/2, \theta). \quad (496)$$

Existe, por ejemplo, un polo en $s = -1/2$ cuyo residuo está dado por,

$$\text{Res}(\zeta_A^\theta(s))\big|_{s=-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{\pi} C_{1,0}(1/2, \theta) = -\frac{\theta}{2\pi}, \quad (497)$$

en tanto que el residuo en $s = -3/2$ está dado por,

$$\text{Res}(\zeta_A^\theta(s))\big|_{s=-\frac{3}{2}} = \frac{1}{\pi} C_{3,0}(1/2, \theta) = \frac{\theta^3}{2\pi}. \quad (498)$$

VI.2. Un operador de Schrödinger en una variedad de base compacta

Estudiaremos a continuación el operador de Schrödinger dado por (297) correspondiente al caso $V(x) = 0$ sobre la variedad de base unidimensional y compacta $[0, 1] \in \mathbb{R}$. De acuerdo con los resultados de la sección V.3.1 el operador diferencial admite una familia de extensiones autoadjuntas caracterizada por dos parámetros θ y β ; el primero de ellos caracteriza la condición de contorno en la singularidad y el segundo está relacionado con condiciones de contorno del tipo Robin en $x = 1$. En la presente sección nos limitaremos, por simplicidad, al caso $\beta = \infty$, que define condiciones de contorno de Dirichlet en $x = 1$.

En primer lugar, verificaremos el Teorema V.3.11 dando una nueva interpretación del factor $K(\lambda)$ (véase la ecuación (339).) Como hemos ya demostrado, existen dos extensiones autoadjuntas definidas por condiciones de contorno sobre la singularidad invariantes de escala. Veremos además que cualquier extensión autoadjunta puede escribirse como una combinación lineal de estas dos extensiones particulares. El factor $K(\lambda)$ determina los coeficientes de esta combinación lineal. El valor de $K(\lambda)$ que obtendremos confirma el resultado (401), para el caso $V(x) = 0$ y $\beta = \infty$.

VI.2.1. El operador y sus extensiones autoadjuntas

Consideremos el operador,

$$A = -\partial_x^2 + \frac{\nu^2 - 1/4}{x^2}, \quad (499)$$

con $\nu \in \mathbb{R}$ definido sobre el conjunto $\mathcal{D}(A) = \mathcal{C}_0^\infty(0, 1)$, sobre el cual A es simétrico.

El operador adjunto A^\dagger , que es la extensión maximal de A , está definido sobre el conjunto $\mathcal{D}(A^\dagger)$ de funciones $\phi(x) \in \mathbf{L}_2(0, 1)$, que tienen una derivada segunda localmente sumable y tales que,

$$A^\dagger \phi(x) = -\phi''(x) + \frac{\nu^2 - 1/4}{x^2} \phi(x) = \tilde{\phi}(x) \in \mathbf{L}_2(0, 1). \quad (500)$$

El siguiente lema describe el comportamiento en el origen de las funciones pertenecientes a $\mathcal{D}(A^\dagger)$.

Lema VI.2.1 Si $\phi(x) \in \mathcal{D}(A^\dagger)$ y $0 < \nu < 1$, entonces²⁵ existen constantes $C_1[\phi]$ y $C_2[\phi]$ tales que,

$$\left| \phi(x) - \frac{C_1[\phi] x^{\nu+\frac{1}{2}} + C_2[\phi] x^{-\nu+\frac{1}{2}}}{\sqrt{2\nu}} \right| \leq \frac{\|A\phi(x)\|}{(1-\nu)\sqrt{2\nu+\frac{3}{2}}} x^{3/2}, \quad (501)$$

y

$$\left| \phi'(x) - \frac{(\nu + \frac{1}{2}) C_1[\phi] x^{\nu-\frac{1}{2}} + (-\nu + \frac{1}{2}) C_2[\phi] x^{-\nu-\frac{1}{2}}}{\sqrt{2\nu}} \right| \leq \frac{3/2 \|A\phi(x)\|}{(1-\nu)\sqrt{2\nu+2}} x^{1/2}, \quad (502)$$

donde $\|\cdot\|$ es la norma usual en $\mathbf{L}_2([0, 1])$.

Demostración: Definimos $u(x) := x^{-\nu-\frac{1}{2}}\phi(x)$. La ecuación (500) implica entonces,

$$u'(x) = K_2 x^{-2\nu-1} - x^{-2\nu-1} \int_0^x y^{\nu+\frac{1}{2}} \tilde{\phi}(y) dy, \quad (503)$$

$$u(x) = K_1 - \frac{K_2}{2\nu} x^{-2\nu} - \int_0^x y^{-2\nu-1} \int_0^y z^{\nu+\frac{1}{2}} \tilde{\phi}(z) dz dy,$$

para algunas constantes K_1 y K_2 . A partir de las desigualdades,

$$\left| \int_0^x y^{\nu+\frac{1}{2}} \tilde{\phi}(y) dy \right| \leq \frac{x^{\nu+1}}{\sqrt{2\nu+2}} \|\tilde{\phi}\|, \quad (504)$$

$$\left| \int_0^x y^{-2\nu-1} \int_0^y z^{\nu+\frac{1}{2}} \tilde{\phi}(z) dz dy \right| \leq \frac{x^{1-\nu}}{(1-\nu)\sqrt{2\nu+2}} \|\tilde{\phi}\|,$$

obtenemos las ecuaciones (501) y (502).

²⁵El caso $\nu = 0$ será considerado separadamente en la sección VI.2.4.

□

Corolario VI.2.2 Sean $\phi(x), \psi(x) \in \mathcal{D}(A^\dagger)$ y $0 < \nu < 1$. Entonces

$$\begin{aligned} & (A^\dagger\psi, \phi) - (\psi, A^\dagger\phi) = \\ & = \left\{ C_1[\psi]^* C_2[\phi] - C_2[\psi]^* C_1[\phi] \right\} + \left\{ \psi(1)^* \phi'(1) - \psi'(1)^* \phi(1) \right\}, \end{aligned} \quad (505)$$

donde las constantes $C_{1,2}[\cdot]$ son las definidas por el Lema (VI.2.1).

Demostración: Nótese que el producto antisimétrico del segundo miembro de la ecuación (505) define los mapeos K_1, K_2 referidos en el Teorema (V.2.1). La demostración de este corolario se obtiene utilizando el Lema VI.2.1 para evaluar los términos de borde en la expresión,

$$(A^\dagger\psi, \phi) - (\psi, A^\dagger\phi) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\varepsilon}^1 \partial_x \left\{ \psi(x)^* \phi'(x) - \psi'(x)^* \phi(x) \right\} dx. \quad (506)$$

□

De acuerdo con el Lema (VI.2.1), podemos definir el mapeo,

$$\begin{aligned} K : \mathcal{D}(A^\dagger) & \rightarrow \mathbb{C}^4, \\ \phi & \rightarrow (C_1[\phi], C_2[\phi], \phi(1), \phi'(1)). \end{aligned} \quad (507)$$

El dominio $\mathcal{D}(\bar{A})$ de la clausura $\bar{A} = (A^\dagger)^\dagger$ del operador A es el núcleo de K , en tanto que las extensiones simétricas de A están definidas sobre la preimagen de los subespacios de \mathbb{C}^4 bajo el mapeo K . Las extensiones autoadjuntas, por su parte, están identificadas con los subespacios lagrangianos $S \subset \mathbb{C}^4$, esto es, tales que $S = S^\perp$, donde el complemento ortogonal se define de acuerdo con la forma simpléctica del miembro derecho de la ecuación (505).

En adelante, estudiaremos las extensiones autoadjuntas que satisfagan la condición de contorno local,

$$\phi(1) = 0, \quad (508)$$

correspondiente a $\beta = \infty$ en la ecuación (308). Cada una de estas extensiones, que denotaremos por A_γ , está definida por una condición de la forma,

$$\cos \gamma \cdot C_1[\Phi] + \sin \gamma \cdot C_2[\Phi] = 0, \quad (509)$$

con $\gamma \in [0, \pi)$.

El espectro

Para determinar el espectro de las extensiones autoadjuntas A_γ , para el caso $0 < \nu < 1$, estudiaremos las soluciones de,

$$(A^\dagger - \lambda)\phi_\lambda(x) = 0, \quad (510)$$

que satisfagan las condiciones de contorno establecidas en las ecuaciones (508) y (509).

La solución general de la ecuación (510) para $\lambda = 0$ está dada por,

$$\phi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\nu}} \left(A x^{\nu+\frac{1}{2}} + B x^{-\nu+\frac{1}{2}} \right), \quad (511)$$

para dos constantes arbitrarias $A, B \in \mathbb{C}$. Sin embargo, las condiciones de contorno dadas por las ecuaciones (508) y (509) implican,

$$A + B = 0, \quad \cos \gamma \cdot A + \sin \gamma \cdot B = 0. \quad (512)$$

Consecuentemente, sólo existen modos cero para la extensión autoadjunta caracterizada por $\gamma = \pi/4$.

Por su parte, las soluciones de la ecuación (510) para $\lambda \neq 0$ tienen la forma,

$$\phi(x) = \frac{A}{\sqrt{2\nu}} \frac{\Gamma(1+\nu)}{2^{-\nu} \mu^\nu} \sqrt{x} J_\nu(\mu x) + \frac{B}{\sqrt{2\nu}} \frac{\Gamma(1-\nu)}{2^\nu \mu^{-\nu}} \sqrt{x} J_{-\nu}(\mu x), \quad (513)$$

donde $\mu = +\sqrt{\lambda}$. Las constantes $A, B \in \mathbb{C}$ están relacionadas en virtud de la condición de contorno en el origen. En efecto, teniendo en cuenta,

$$J_\nu(z) = z^\nu \left\{ \frac{1}{2^\nu \Gamma(1+\nu)} + O(z^2) \right\}, \quad (514)$$

obtenemos a partir de las ecuaciones (501) y (509),

$$\cos \gamma \cdot A + \sin \gamma \cdot B = 0. \quad (515)$$

La condición de contorno en $x = 1$, dada por la ecuación (508), se escribe,

$$\phi(1) = \frac{A}{\sqrt{2\nu}} \frac{\Gamma(1+\nu)}{2^{1-\nu} \mu^\nu} J_\nu(\mu) + \frac{B}{\sqrt{2\nu}} \frac{\Gamma(1-\nu)}{2^\nu \mu^{-\nu}} J_{-\nu}(\mu) = 0. \quad (516)$$

Esta expresión, junto con la ecuación (515), determina el espectro de la extensión A_γ , que describimos a continuación.

- Si $\gamma = \pi/2$, la ecuación (515) implica que $B = 0$. Por consiguiente, $\phi(1) = 0 \Rightarrow J_\nu(\mu) = 0$. En consecuencia, el espectro de la extensión autoadjunta $A_{\pi/2}$ es positivo y está dado por,

$$\lambda_n = j_{\nu,n}^2, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (517)$$

VI.2 UN OPERADOR DE SCHRÖDINGER EN UNA VARIEDAD DE BASE COMPACTA

donde $j_{\nu,n}$ es el n -ésimo cero positivo²⁶ de la función de Bessel $J_\nu(z)$.

- Si $\gamma = 0$, la ecuación (515) implica que $A = 0$. El espectro de A_0 es también positivo y está dado por,

$$\lambda_n = j_{-\nu,n}^2, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (519)$$

donde $j_{-\nu,n}^2$ son los ceros positivos de $J_{-\nu}(\mu)$.

- Para $\gamma \neq 0, \pi/2$ obtenemos, a partir de las ecuaciones (515) y (516), la siguiente ecuación trascendental para los autovalores de A_γ ,

$$F(\mu) := \mu^{2\nu} \frac{J_{-\nu}(\mu)}{J_\nu(\mu)} = 4^\nu \frac{\Gamma(\nu)}{\Gamma(-\nu)} \theta, \quad (520)$$

donde hemos definido,

$$\theta := -\tan \gamma. \quad (521)$$

De acuerdo con esta definición, designaremos en adelante a la extensión A_γ por A^θ ; nótese que el parámetro θ coincide con el definido en la expresión (307).

Para los autovalores positivos, $\lambda = \mu^2$, ambos miembros de la ecuación (520) han sido representados en la Figura 4 para valores particulares de θ y ν .

Con respecto a la presencia de autovalores negativos, se puede probar que si $\theta < -1$ entonces la extensión A^θ tiene un autovalor negativo λ_0 . En efecto, si $\lambda_0 = (i\mu_0)^2 < 0$, entonces,

$$F(i\mu_0) = \mu_0^{2\nu} \frac{I_{-\nu}(\mu_0)}{I_\nu(\mu_0)} = -4^\nu \frac{\Gamma(\nu)}{\Gamma(-\nu)} \left\{ 1 + \frac{\nu \mu_0^2}{2(1-\nu^2)} + O(\mu_0^4) \right\}, \quad (522)$$

donde $I_\nu(\mu)$ es la función de Bessel modificada²⁷. De modo que $F(i\mu_0)$ satisface la ecuación (520) si $\theta < -1$ (véase la Figura 5.)

Observemos, por último, que el espectro es siempre no degenerado, y que existe un autovalor positivo entre cada par de cuadrados de ceros consecutivos de $J_\nu(\lambda)$. Por consiguiente, a partir de la ecuación (518), obtenemos el siguiente comportamiento asintótico para los autovalores,

$$\lambda_n = \pi^2 n^2 + O(n). \quad (523)$$

²⁶ Recordemos que los ceros de $J_\nu(\lambda)$ admiten el desarrollo asintótico

$$j_{\nu,n} \simeq \gamma - \frac{4\nu^2 - 1}{8\gamma} + O\left(\frac{1}{\gamma}\right)^3, \quad (518)$$

con $\gamma = \left(n + \frac{\nu}{2} - \frac{1}{4}\right) \pi$.

²⁷Se puede probar que este autovalor negativo tiende a $-\infty$ a medida que $\theta \rightarrow -\infty$, en tanto que la correspondiente autofunción se concentra en la singularidad en $x = 0$, como los estados de borde estudiados en la sección (II.3.1).

VI.2 UN OPERADOR DE SCHRÖDINGER EN UNA VARIEDAD DE BASE COMPACTA

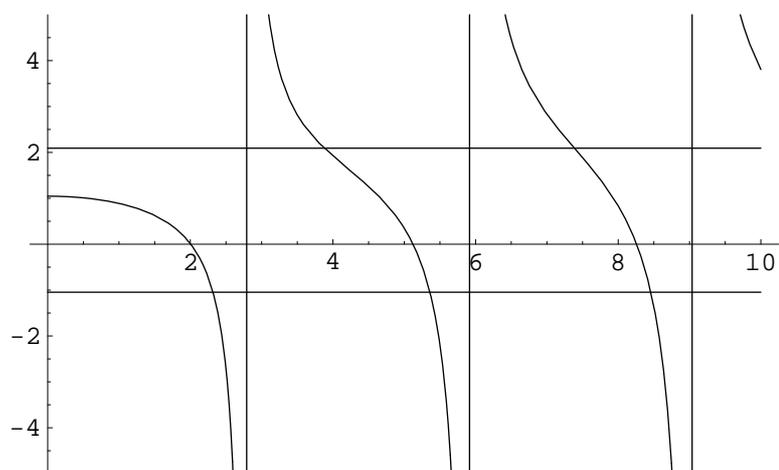


Figura 4: Gráfica de $F(\mu)$ para $\nu = 1/4$. Las intersecciones con las rectas horizontales representan los autovalores correspondientes a las extensiones dadas por $\theta = 1$ y $\theta = -2$.

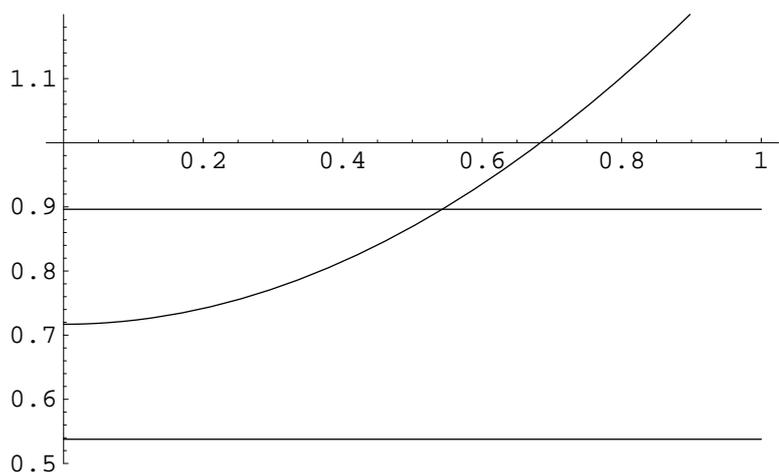


Figura 5: Gráfica de $F(i\mu_0)$ en función de μ_0 y del miembro derecho de la ecuación (520) para $\nu = 3/4$ y $\theta = 3/4, 5/4$. Esta ecuación no tiene solución para $\mu^2 \in \mathbb{R}^-$ en el caso $\theta = 3/4$ y admite una única solución si $\theta = 5/4$.

VI.2.2. La resolvente

En esta sección construiremos la resolvente $(A^\theta - \lambda)^{-1}$ correspondiente a las diferentes extensiones autoadjuntas A^θ de A , para el caso $0 < \nu < 1$. Primeramente, consideraremos las extensiones autoadjuntas definidas por condiciones de contorno invariantes de escala, caracterizadas por $\theta = \infty$ y $\theta = 0$. La resolvente para una extensión autoadjunta general será luego obtenida como combinación lineal de estos dos casos especiales.

Para determinar el núcleo $G(x, x'; \lambda = \mu^2)$ de la resolvente, que satisface la ecuación,

$$(A - \mu^2) G(x, x'; \mu^2) = \delta(x - x'), \quad (524)$$

con $-\pi/2 < \arg(\mu) \leq \pi/2$, necesitamos, de acuerdo con la expresión (236), dos soluciones particulares de la ecuación (510). Es conveniente entonces definir,

$$\begin{cases} L^\infty(x, \mu) = \sqrt{x} J_\nu(\mu x), \\ L^0(x, \mu) = \sqrt{x} J_{-\nu}(\mu x), \\ R(x, \mu) = \sqrt{x} (J_{-\nu}(\mu) J_\nu(\mu x) - J_\nu(\mu) J_{-\nu}(\mu x)). \end{cases} \quad (525)$$

Nótese que $L^\infty(x, \mu)$, $L^0(x, \mu)$ presentan el mismo comportamiento en el origen que las funciones de los dominios de A^∞ , A^0 , respectivamente; $R(1, \mu)$, por su parte, se anula en $x = 1$.

Definimos también los wronskianos,

$$\begin{aligned} W [L^\infty, R] (\mu) &:= L^\infty(x, \mu) \partial_x R(x, \mu) - \partial_x L^\infty(x, \mu) R(x, \mu) = \\ &= -\frac{2 \sin(\pi\nu)}{\pi} J_\nu(\mu), \end{aligned} \quad (526)$$

$$\begin{aligned} W [L^0, R] (\mu) &:= L^0(x, \mu) \partial_x R(x, \mu) - \partial_x L^0(x, \mu) R(x, \mu) = \\ &= -\frac{2 \sin(\pi\nu)}{\pi} J_{-\nu}(\mu). \end{aligned} \quad (527)$$

La resolvente para la extensión $\theta = \infty$

De acuerdo con la ecuación (236), el núcleo de la resolvente para el caso $\theta = \infty$ está dado por,

$$G_\infty(x, x'; \mu^2) = \frac{1}{W [L^\infty, R] (\mu)} \times \begin{cases} L^\infty(x, \mu) R(x', \mu), & \text{para } x \leq x', \\ R(x, \mu) L^\infty(x', \mu), & \text{para } x \geq x'. \end{cases} \quad (528)$$

Por lo tanto, la solución $\phi(x)$ de la ecuación $(A^\infty - \mu^2) \phi(x) = f(x)$, dada por,

$$\phi(x) = \int_0^1 G_\infty(x, x'; \mu^2) f(x') dx', \quad (529)$$

VI.2 UN OPERADOR DE SCHRÖDINGER EN UNA VARIEDAD DE BASE COMPACTA

satisface $\phi(1) = 0$ y $C_2[\phi] = 0$, para cualquier función $f(x) \in \mathbf{L}_2(0, 1)$. En efecto, de las ecuaciones (529), (528), (525) y (526), obtenemos,

$$\phi(x) = \frac{C_1^\infty[\phi]}{\sqrt{2\nu}} x^{\nu+\frac{1}{2}} + O(x^{3/2}), \quad (530)$$

con,

$$C_1^\infty[\phi] = -\frac{\pi \mu^\nu \sqrt{2\nu}}{2^{1+\nu} \sin(\pi\nu) J_\nu(\mu) \Gamma(1+\nu)} \int_0^1 R(x', \mu) f(x') dx', \quad (531)$$

siendo μ distinto de todo cero de $J_\nu(\mu)$. Nótese que $C_1^\infty[\phi] \neq 0$ si la integral en el miembro derecho de (531) no se anula.

La resolvente para la extensión $\theta = 0$

En este caso, el núcleo de la resolvente está dado, de acuerdo con (236), por,

$$G_0(x, x'; \mu^2) = \frac{1}{W[L^0, R](\mu)} \times \begin{cases} L^0(x, \mu) R(x', \mu), & \text{para } x \leq x', \\ R(x, \mu) L^0(x', \mu), & \text{para } x \geq x'. \end{cases} \quad (532)$$

La solución de la ecuación $(A^0 - \mu^2) \phi(x) = f(x)$ está entonces dada por la función,

$$\phi(x) = \int_0^1 G_0(x, x'; \mu^2) f(x') dx', \quad (533)$$

que en este caso satisface $\phi(1) = 0$ y $C_1[\phi] = 0$, para cualquier función $f(x) \in \mathbf{L}_2(0, 1)$. Efectivamente, a partir de (533), (532), (525) y (526), obtenemos,

$$\phi(x) = \frac{C_2^0[\phi]}{\sqrt{2\nu}} x^{-\nu+\frac{1}{2}} + O(x^{3/2}), \quad (534)$$

con,

$$C_2^0[\phi] = -\frac{\pi \mu^{-\nu} \sqrt{2\nu}}{2^{1-\nu} \sin(\pi\nu) J_{-\nu}(\mu) \Gamma(1-\nu)} \int_0^1 R(x', \mu) f(x') dx', \quad (535)$$

siendo μ distinto de todo cero de $J_{-\nu}(\mu)$. Por su parte, $C_2^0[\phi] \neq 0$ si la integral en el miembro derecho de la ecuación (535) (que coincide con la integral que figura en la ecuación (531), correspondiente a la extensión $\theta = \infty$), no se anula.

La resolvente para una extensión autoadjunta general A^θ

Para una extensión autoadjunta arbitraria, imponemos sobre las funciones,

$$\phi(x) = \int_0^1 G_\theta(x, x'; \lambda) f(x') dx', \quad (536)$$

las condiciones de contorno,

VI.2 UN OPERADOR DE SCHRÖDINGER EN UNA VARIEDAD DE BASE COMPACTA

$$\phi(1) = 0, \quad \cos \gamma C_1[\phi] + \sin \gamma C_2[\phi] = 0, \quad \gamma \neq 0, \pi/2. \quad (537)$$

La función $f(x)$ representa cualquier función de $\in L_2(0, 1)$. Para ello, podríamos repetir el procedimiento que utilizamos para los casos $\theta = \infty, 0$. En su lugar, consideraremos una combinación lineal de los núcleos de las resolventes de estos casos,

$$G_\theta(x, x'; \lambda) = [1 - \tau(\lambda)] G_\infty(x, x'; \lambda) + \tau(\lambda) G_0(x, x'; \lambda) \quad (538)$$

y determinaremos la función $\tau(\lambda)$. Nótese que, de acuerdo con la ecuación (337), $\tau(\lambda)$ está relacionado con el factor $K(\lambda)$,

$$\tau(\lambda) = [1 + \theta K(\lambda)]^{-1}. \quad (539)$$

La función $G_\theta(x, x'; \lambda)$ satisface la ecuación (524) pues, de acuerdo con (538), es una combinación lineal de dos funciones que a su vez la satisfacen. Además, $G_\theta(x, x'; \lambda)$ satisface la condición de contorno apropiada en $x = 1$ pues también lo hacen las funciones $G_\infty(x, x'; \lambda), G_0(x, x'; \lambda)$. En consecuencia, $\tau(\lambda)$ y, consecuentemente, el factor $K(\lambda)$ se determinan a partir de la condición de contorno en $x = 0$ (véase la ecuación (509)) que resulta de (530), (534) y (538),

$$\cos \gamma \cdot [1 - \tau(\lambda)] C_1^\infty[\phi] + \sin \gamma \cdot \tau(\lambda) C_2^0[\phi] = 0. \quad (540)$$

Por lo tanto, a partir de las ecuaciones (531), (535) y (540), obtenemos el factor $\tau(\lambda)$,

$$\tau(\mu^2) = \frac{\cos \gamma C_1^\infty[\phi]}{\cos \gamma C_1^\infty[\phi] - \sin \gamma C_2^0[\phi]} = \frac{1}{1 - \theta 4^\nu \frac{\Gamma(\nu)}{\Gamma(-\nu)} \frac{J_\nu(\mu)}{J_{-\nu}(\mu)} \mu^{-2\nu}}, \quad (541)$$

siendo μ^2 distinto de todo autovalor de A^θ . Comparando las expresiones (541) y (539) obtenemos el factor $K(\mu^2)$,

$$K(\mu^2) = 4^\nu \frac{\Gamma(\nu)}{\Gamma(-\nu)} \frac{J_\nu(\mu)}{J_{-\nu}(\mu)} \mu^{-2\nu}. \quad (542)$$

Esta ecuación confirma el desarrollo asintótico de $K(\lambda)$ calculado en (405) (véase la expresión (858).)

La traza de la resolvente

La ecuación (538) implica que la resolvente de una extensión autoadjunta A^θ puede expresarse como una combinación lineal de las resolventes correspondientes a las extensiones correspondientes a $\theta = \infty$ y $\theta = 0$. Además, dado que los autovalores de cualquier extensión crecen como $\lambda_n \sim n^2$ (véase la ecuación 523), las resolventes son operadores tipo traza.

Podemos entonces escribir,

$$\mathrm{Tr}(A^\theta - \lambda)^{-1} - \mathrm{Tr}(A^\infty - \lambda)^{-1} = \tau(\lambda) [\mathrm{Tr}(A^0 - \lambda)^{-1} - \mathrm{Tr}(A^\infty - \lambda)^{-1}] , \quad (543)$$

A partir de las ecuaciones (528) y (532) obtenemos (véanse los detalles en la sección X.5),

$$\mathrm{Tr} (A^\infty - \mu^2)^{-1} = \int_0^1 G_\infty(x, x; \mu^2) dx = \frac{\nu}{2\mu^2} - \frac{J'_\nu(\mu)}{2\mu J_\nu(\mu)} , \quad (544)$$

y,

$$\mathrm{Tr} (A^0 - \mu^2)^{-1} = \int_0^1 G_0(x, x; \mu^2) dx = -\frac{\nu}{2\mu^2} - \frac{J'_{-\nu}(\mu)}{2\mu J_{-\nu}(\mu)} . \quad (545)$$

En consecuencia, la traza de la resolvente de una extensión autoadjunta general puede obtenerse explícitamente y está dada por,

$$\mathrm{Tr} (A^\theta - \mu^2)^{-1} = \left[\frac{\nu}{2\mu^2} - \frac{J'_\nu(\mu)}{2\mu J_\nu(\mu)} \right] + \tau(\mu^2) \left[-\frac{\nu}{\mu^2} + \frac{1}{2\mu} \left(\frac{J'_\nu(\mu)}{J_\nu(\mu)} - \frac{J'_{-\nu}(\mu)}{J_{-\nu}(\mu)} \right) \right] . \quad (546)$$

Desarrollo asintótico de la traza de la resolvente

Utilizando el desarrollo asintótico de Hankel para las funciones de Bessel [1] (véase la sección X.7), se puede obtener el desarrollo asintótico del primer término del miembro derecho de la ecuación (546),

$$\begin{aligned} \mathrm{Tr}(A^\infty - \mu^2)^{-1} &\sim \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A_k(\nu, \sigma)}{\mu^k} \sim \\ &\sim \frac{i\sigma}{2\mu} + \frac{\nu + \frac{1}{2}}{2\mu^2} - \frac{i\sigma(\nu^2 - \frac{1}{4})}{4\mu^3} + \frac{(\nu^2 - \frac{1}{4})}{4\mu^4} + O(\mu^{-5}), \end{aligned} \quad (547)$$

donde $\sigma = 1$ para $\Im(\mu) > 0$ y $\sigma = -1$ para $\Im(\mu) < 0$. Los coeficientes $A_k(\nu, \sigma)$ en esta serie pueden ser directamente determinados a partir de las ecuaciones (854) y (865). Nótese que $A_k(\nu, -1) = A_k(\nu, 1)^*$, pues $A_{2k}(\nu, 1)$ es real y $A_{2k+1}(\nu, 1)$ es imaginario puro.

Por su parte, el desarrollo asintótico del segundo término del miembro derecho de la ecuación (546) se obtiene de la expresión,

$$\mathrm{Tr} (A^\infty - \mu^2)^{-1} - \mathrm{Tr} (A^0 - \mu^2)^{-1} \sim \frac{\nu}{\mu^2} , \quad (548)$$

obtenida a partir de la ecuación (868) y de,

$$\tau(\mu^2) \sim \frac{1}{1 - e^{\sigma i \pi \nu} 4^\nu \frac{\Gamma(\nu)}{\Gamma(-\nu)} \theta \mu^{-2\nu}} \sim \sum_{k=0}^{\infty} \left(e^{\sigma i \pi \nu} 4^\nu \frac{\Gamma(\nu)}{\Gamma(-\nu)} \theta \mu^{-2\nu} \right)^k , \quad (549)$$

donde $\sigma = 1$ ($\sigma = -1$) corresponde a $\Im(\mu) > 0$ ($\Im(\mu) < 0$) (véase la ecuación (858).) Nótese la aparición, en este desarrollo asintótico, de potencias de μ dependientes del parámetro ν .

VI.2.3. La función- ζ y la traza del heat-kernel

La función $\zeta^\theta(s)$ correspondiente a una extensión autoadjunta arbitraria A^θ satisface, para $\Re(s) > 1/2$ (véase la ecuación (248)),

$$\zeta^\theta(s) = -\frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathcal{C}} \lambda^{-s} \text{Tr} (A^\theta - \lambda)^{-1} d\lambda, \quad (550)$$

donde la curva \mathcal{C} encierra el espectro del operador en sentido antihorario pero no encierra al origen. De acuerdo con la ecuación (543),

$$\zeta^\theta(s) = \zeta^\infty(s) + \oint_{\mathcal{C}} \lambda^{-s} \tau(\lambda) \text{Tr} \left\{ (A^\infty - \lambda)^{-1} - (A^0 - \lambda)^{-1} \right\} \frac{d\lambda}{2\pi i}, \quad (551)$$

donde $\zeta^\infty(s)$ es la función- ζ de la extensión $\theta = \infty$.

Como, de acuerdo con la discusión de la sección VI.2.1, A^∞ tiene un espectro positivo y las extensiones autoadjuntas A^θ tienen a lo sumo un único autovalor negativo λ_0 , podemos escribir,

$$\begin{aligned} \zeta^\theta(s) &= \zeta^\infty(s) + \theta(-\lambda_0) \lambda_0^{-s} - \\ &- \int_{-i\infty+0}^{i\infty+0} \lambda^{-s} \tau(\lambda) \text{Tr} \left\{ (A^\infty - \lambda)^{-1} - (A^0 - \lambda)^{-1} \right\} \frac{d\lambda}{2\pi i}. \end{aligned} \quad (552)$$

Será también conveniente tener en cuenta,

$$\begin{aligned} \zeta^\theta(s) &= \frac{e^{-i\frac{\pi}{2}s}}{\pi} \int_1^\infty \mu^{1-2s} \text{Tr} (A^\theta - (e^{i\frac{\pi}{4}} \mu)^2)^{-1} d\mu + \\ &+ \frac{e^{i\frac{\pi}{2}s}}{\pi} \int_1^\infty \mu^{1-2s} \text{Tr} (A^\theta - (e^{-i\frac{\pi}{4}} \mu)^2)^{-1} d\mu + h_1(s), \end{aligned} \quad (553)$$

donde $h_1(s)$ es una función entera.

Para determinar los polos de la función $\zeta^\theta(s)$, sumamos y restamos en los integrandos del miembro derecho de la ecuación (553) una suma parcial del desarrollo asintótico de $\text{Tr} (A^\theta - \lambda)^{-1}$, que ha sido obtenido en la sección anterior.

En particular, para la extensión $\theta = \infty$ y para $s > 1/2$ obtenemos,

$$\begin{aligned} \zeta^\infty(s) &= \frac{1}{\pi} \sum_{\sigma=\pm 1} \int_1^\infty e^{-i\sigma\frac{\pi}{2}s} \mu^{1-2s} \left\{ \sum_{k=1}^N e^{-i\sigma\frac{\pi}{4}k} A_k(\nu, \sigma) \mu^{-k} \right\} d\mu + h_2(s) = \\ &= \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^N \frac{\Re \left\{ e^{-i\frac{\pi}{2}(s+k/2)} A_k(\nu, 1) \right\}}{s - (1 - k/2)} + h_2(s), \end{aligned} \quad (554)$$

VI.2 UN OPERADOR DE SCHRÖDINGER EN UNA VARIEDAD DE BASE
COMPACTA

donde $h_2(s)$ es analítica en el semiplano $\Re(s) > (1 - N)/2$ (véanse las ecuaciones (553) y (547).) Consecuentemente, la extensión meromorfa de la función $\zeta^\infty(s)$ presenta polos simples en,

$$s = \frac{1}{2} - n, \quad \text{con } n = 0, 1, \dots, \quad (555)$$

con residuos,

$$\text{Res} \{ \zeta^\infty(s) \} |_{s=1/2-n} = -\frac{1}{\pi} \Re \{ i A_{2n+1}(\nu, 1) \}, \quad (556)$$

donde los coeficientes $A_k(\nu, 1)$ están dados por la ecuación (547). Nótese que la parte imaginaria de estos coeficientes se anula para k par, por lo que $\zeta^\infty(s)$ no tiene polos en valores enteros de s . Estas singularidades obedecen a la ecuación (1), que es válida para operadores regulares.

El residuo en $s = 1/2$, *e.g.*, está dado por,

$$\text{Res} \zeta^\infty(s) |_{s=1/2} = -\frac{1}{\pi} \Re \{ i A_1(\nu, 1) \} = \frac{1}{2\pi}. \quad (557)$$

Este es, por otra parte, el único polo de la función $\zeta^\infty(s)$ en el límite regular $\nu \rightarrow 1/2$.

Para una extensión autoadjunta general A^θ debemos también considerar, de acuerdo con la ecuación (543), las singularidades que provienen del desarrollo de $\tau(\lambda) \times \text{Tr} \{ (A^\infty - \lambda)^{-1} - (A^0 - \lambda)^{-1} \}$, dado por las ecuaciones (548) y (549).

De la ecuación (552), y teniendo en cuenta (553), obtenemos,

$$\begin{aligned} \zeta^\theta(s) - \zeta^\infty(s) &= h_3(s) - \frac{\nu}{\pi} \times \\ &\times \sum_{\sigma=\pm 1} e^{-i\sigma \frac{\pi}{2}(s-k\nu+1)} \int_1^\infty \sum_{k=0}^N \left(4^\nu \frac{\Gamma(\nu)}{\Gamma(-\nu)} \theta \right)^k \mu^{-2k\nu-2s-1} d\mu = \\ &= -\frac{\nu}{\pi} \sum_{k=0}^N \frac{1}{s + \nu k} \sin \left[\frac{\pi}{2} (k\nu - s) \right] \left[4^\nu \frac{\Gamma(\nu)}{\Gamma(-\nu)} \theta \right]^k + h_3(s), \end{aligned} \quad (558)$$

donde $h_3(s)$ es analítica para $\Re(s) > -\nu(N + 1)$.

En consecuencia, $\zeta^\theta(s) - \zeta^\infty(s)$ tiene una extensión meromorfa con polos simples en posiciones s_k dependientes de ν ,

$$s = -\nu k, \quad \text{con } k = 1, 2, \dots, \quad (559)$$

cuyos residuos dependen de la extensión autoadjunta considerada y están dados por,

$$\text{Res} \{ \zeta^\theta(s) - \zeta^\infty(s) \} |_{s=-\nu k} = -\frac{\nu}{\pi} \left[4^\nu \frac{\Gamma(\nu)}{\Gamma(-\nu)} \theta \right]^k \sin(\pi\nu k). \quad (560)$$

VI.2 UN OPERADOR DE SCHRÖDINGER EN UNA VARIEDAD DE BASE COMPACTA

Nótese que estos polos son irracionales para valores irracionales de ν . Además, los residuos se anulan para la extensión $\theta = 0$ y no es difícil probar que estos polos tampoco están presentes en el caso $\theta = \infty$.

Por otra parte, estos polos son semienteros negativos para el caso regular $\nu = 1/2$, de modo que responden al resultado (1) en este límite.

Es interesante destacar que los polos en la ecuación (559) son también polos de la función- ζ de la correspondiente extensión autoadjunta del operador $-\partial_x^2 + \frac{\nu^2-1/4}{x^2} + x^2$ en $\mathbf{L}_2(\mathbb{R}^+)$, considerado en la sección VI.1 (véanse ecuaciones (482) y 483), con exactamente los mismos residuos, como puede verificarse fácilmente.

Realizaremos una breve consideración con respecto a las propiedades ante transformaciones de escala de las condiciones de contorno y de la función- ζ . En primer lugar, nótese que, excepto para el caso $\theta = \infty$, el residuo de $\zeta^\theta(s)$ en $s = -\nu, k$ es proporcional a θ^k . Esto es consistente con el comportamiento de A bajo transformaciones de escala. En efecto, consideremos la transformación T ,

$$\phi_c(x) := T \cdot \phi(x) = c^{1/2} \phi(cx) \quad (561)$$

bajo la cual $\mathbf{L}_2([0, 1]) \rightarrow \mathbf{L}_2([0, 1/c])$. La extensión A^θ es equivalente por una transformación unitaria al operador $c^{-2} A_c^{\theta_c}$ definido análogamente en $\mathbf{L}_2([0, 1/c])$, con $\theta_c := c^{2\nu} \theta$,

$$T A^\theta = \frac{1}{c^2} A_c^{\theta_c} T. \quad (562)$$

Sólo para las extensiones dadas por $\theta = 0, \infty$ la condición de contorno en la singularidad $x = 0$, dada por la ecuación (509), es invariante de escala.

La función- ζ , por su parte, cambia ante una transformación de escala de la siguiente manera,

$$\zeta_c^{\theta_c}(s) = c^{-2s} \zeta^\theta(s), \quad (563)$$

y sus residuos

$$\text{Res} \{ \zeta_c^{\theta_c}(s) \} \Big|_{s=-\nu k} = c^{2\nu k} \text{Res} \{ \zeta^\theta(s) \} \Big|_{s=-\nu k}. \quad (564)$$

En consecuencia, el factor $c^{2\nu k}$ cancela exactamente el efecto que el cambio de la condición de contorno en la singularidad tiene sobre el factor θ^k en la ecuación (560),

$$\theta^k = c^{-2\nu k} \theta_c^k. \quad (565)$$

Por consiguiente, la diferencia entre los intervalos $[0, 1]$ y $[0, 1/c]$ no tiene efecto en la estructura de estos residuos, que conjeturamos entonces están determinados por propiedades locales en la vecindad de $x = 0$.

Concluimos entonces que la presencia de polos de la función- ζ en posiciones dependientes de ν es consecuencia del comportamiento singular del término de orden cero de A cerca del origen y de una condición de contorno que no es invariante de escala.

VI.2 UN OPERADOR DE SCHRÖDINGER EN UNA VARIEDAD DE BASE
COMPACTA

Finalmente, a partir de las relaciones (249), (251) y (252), obtenemos el siguiente desarrollo asintótico,

$$\mathrm{Tr} \left\{ e^{-tA^\theta} - e^{-tA^\infty} \right\} \sim \nu - \sum_{k=1}^{\infty} \left[\Gamma(-\nu k) \frac{\nu}{\pi} \theta^k \sin(\pi \nu k) \right] t^{\nu k}. \quad (566)$$

El primer término del miembro derecho, que proviene de la ecuación (548) y del primer término del desarrollo asintótico de $\tau(\lambda)$ en la ecuación (549), coinciden con el resultado de [93].

Nótese la dependencia en ν de las potencias de t presentes en el desarrollo asintótico del miembro derecho de la ecuación (566) para una extensión autoadjunta dada por $\theta \neq 0, \infty$. En particular, el primero de estos términos está dado por,

$$\frac{\theta}{\Gamma(\nu)} t^\nu. \quad (567)$$

Aunque la potencia de t coincide con el resultado de [93], obtenemos aquí un resultado distinto para el coeficiente.

VI.2.4. El caso $\nu = 0$

El operador diferencial A ,

$$A = -\partial_x^2 - \frac{1}{4x^2}, \quad (568)$$

correspondiente al valor $\nu = 0$ en la expresión (499) exige una consideración aparte que desarrollaremos brevemente en esta sección.

Repitiendo el procedimiento descrito en la demostración del Lema VI.2.1 se puede probar que si $\phi(x) \in \mathcal{D}(A^\dagger)$, entonces existen constantes $C_1[\phi], C_2[\phi] \in \mathbb{C}$ tales que,

$$\left| \phi(x) - (C_1[\phi] \sqrt{x} + C_2[\phi] \sqrt{x} \log x) \right| \leq \frac{\|A\phi(x)\|}{\sqrt{2}} x^{3/2}, \quad (569)$$

y,

$$\left| \phi'(x) - \left[\frac{1}{2} C_1[\phi] x^{-1/2} + C_2[\phi] \left(x^{-1/2} + \frac{1}{2} x^{1/2} \log x \right) \right] \right| \leq \frac{3\|A\phi(x)\|}{2\sqrt{2}} x^{1/2}, \quad (570)$$

donde $\|\cdot\|$ se refiere a la norma en L_2 .

Se puede probar fácilmente que la ecuación (505) es válida también para el caso $\nu = 0$ y que las extensiones autoadjuntas de A también están en correspondencia con los subespacios lagrangianos $S \subset \mathbb{C}^4$, dados por $S = S^\perp$ donde el complemento ortogonal se define en términos de la forma simpléctica del miembro derecho de la ecuación (505). Si elegimos, además, la condición de Dirichlet en $x = 1$, $\phi(1) = 0$, entonces A admite una

VI.2 UN OPERADOR DE SCHRÖDINGER EN UNA VARIEDAD DE BASE COMPACTA

familia de extensiones autoadjuntas A^θ caracterizadas por un parámetro real θ mediante la ecuación (509).

Existe, por otra parte, una extensión autoadjunta particular A^∞ definida por $\theta = \infty$, o bien, $C_2[\phi] = 0$. Las funciones de su dominio de definición se comportan en el origen de acuerdo con,

$$\phi(x) = C_1[\phi] \sqrt{x} + O(x^{3/2}). \quad (571)$$

Las autofunciones de A^∞ de autovalor λ están dadas por,

$$\phi(x) = C_1[\phi] \sqrt{x} J_0(\mu x), \quad (572)$$

donde $\lambda = \mu^2$ y μ es un cero (positivo) de $J_0(\mu)$.

Para una extensión autoadjunta arbitraria A^θ , con $\theta \neq \infty$, las autofunciones correspondientes al autovalor $\lambda = \mu^2$ están dadas por,

$$\phi(x) = \{C_1[\phi] - C_2[\phi](\log \mu - \log 2 + \gamma_E)\} \sqrt{x} J_0(\mu x) + \frac{\pi}{2} C_2[\phi] \sqrt{x} N_0(\mu x), \quad (573)$$

donde las cantidades $C_1[\phi], C_2[\phi]$ están relacionadas con θ mediante la ecuación (509).

La condición $\phi(1) = 0$ conduce a la ecuación,

$$(\theta + \log 2 - \gamma_E - \log \mu) J_0(\mu) + \frac{\pi}{2} N_0(\mu) = 0 \quad (574)$$

que determina el espectro de A^θ . Nótese que no existen autovalores negativos.

Para determinar los núcleos de las resolventes $(A^\infty - \mu^2)^{-1}$ y $(A^\theta - \mu^2)^{-1}$ definimos las funciones,

$$\begin{cases} L^\infty(x; \mu) = \sqrt{x} J_0(\mu x), \\ L^\theta(x; \mu) = \sqrt{x} \left\{ (\theta + \log 2 - \gamma_E - \log \mu) J_0(\mu x) + \frac{\pi}{2} N_0(\mu x) \right\}, \\ R(x; \mu) = \sqrt{x} \{ N_0(\mu) J_0(\mu x) - J_0(\mu) N_0(\mu x) \}, \end{cases} \quad (575)$$

y obtenemos,

$$G^\infty(x, x'; \mu^2) = \frac{1}{W[L^\infty, R](\mu)} \begin{cases} L^\infty(x; \mu) R(x'; \mu), & x \leq x', \\ L^\infty(x'; \mu) R(x; \mu), & x \geq x', \end{cases} \quad (576)$$

y,

$$G^\theta(x, x'; \mu^2) = \frac{1}{W[L^\theta, R](\mu)} \begin{cases} L^\theta(x; \mu) R(x'; \mu), & x \leq x', \\ L^\theta(x'; \mu) R(x; \mu), & x \geq x', \end{cases} \quad (577)$$

VI.2 UN OPERADOR DE SCHRÖDINGER EN UNA VARIEDAD DE BASE COMPACTA

donde los wronskianos se calculan a partir de (575),

$$W[L^\infty, R](\mu) = \frac{2}{\pi} J_0(\mu), \quad (578)$$

$$W[L^\theta, R](\mu) = \frac{2}{\pi} (\theta + \log 2 - \gamma_E - \log \mu) J_0(\mu) + N_0(\mu).$$

A partir de la ecuación (518), puede verse que tanto $(A^\infty - \lambda)^{-1}$ como $(A^\theta - \lambda)^{-1}$ son operadores tipo traza.

Ahora bien, teniendo en cuenta que [1, 90],

$$\int x Z_1(0, x) Z_2(0, x) dx = \frac{x^2}{2} \{Z_1(0, x) Z_2(0, x) + Z_1(1, x) Z_2(1, x)\}, \quad (579)$$

para $Z_{1,2}(\nu, x) = J_\nu(x)$ o $N_\nu(x)$, las trazas de las resolventes resultan,

$$\begin{aligned} \text{Tr}(A^\infty - \mu^2) &= \int_0^1 G^\infty(x, x; \mu^2) dx = \frac{1}{2\mu} \frac{J_1(\mu)}{J_0(\mu)}, \\ \text{Tr}(A^\theta - \mu^2) &= \int_0^1 G^\theta(x, x; \mu^2) dx = \\ &= \frac{1}{2\mu} \frac{(\theta + \log 2 - \gamma_E - \log \mu) J_1(\mu) + \frac{\pi}{2} N_1(\mu)}{(\theta + \log 2 - \gamma_E - \log \mu) J_0(\mu) + \frac{\pi}{2} N_0(\mu)}. \end{aligned} \quad (580)$$

Las ecuaciones (852) y (853) proveen el mismo desarrollo asintótico para ambas,

$$\begin{aligned} \text{Tr}(A^\infty - \mu^2) &\sim \frac{e^{i\sigma\frac{\pi}{2}}}{2\mu} \left(\frac{P(1, \mu) - i\sigma Q(1, \mu)}{P(0, \mu) - i\sigma Q(0, \mu)} \right) \sim \text{Tr}(A^\theta - \mu^2) \sim \\ &\sim \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A_k(1/2, \sigma)}{\mu^k} = \frac{i\sigma}{2\mu} + \frac{1}{4\mu^2} + \frac{i\sigma}{16\mu^3} - \frac{1}{16\mu^4} + O(\mu^{-5}), \end{aligned} \quad (581)$$

donde $\sigma = +1$ (-1) para $\Im(\mu) > 0$ ($\Im(\mu) < 0$.)

Nótese que el desarrollo asintótico de la ecuación (581) coincide con el miembro derecho de la ecuación (547) evaluada en $\nu = 0$. Por lo tanto, de la ecuación (554) se concluye que las singularidades de la función $\zeta^\theta(s)$, para $\nu = 0$, consisten en polos simples en los puntos s_n ,

$$s_n = \frac{1}{2} - n \quad \text{con} \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (582)$$

VI.2 UN OPERADOR DE SCHRÖDINGER EN UNA VARIEDAD DE BASE COMPACTA

cuyos residuos están dados por,

$$\operatorname{Res} \zeta^\theta(s) \Big|_{s=1/2-n} = -\frac{1}{\pi} \Re \{i A_{2n+1}(1/2, 1)\} . \quad (583)$$

A diferencia del caso $\nu \neq 0$, esta estructura de polos es común a todas las extensiones autoadjuntas de A .

De modo que la estructura de polos de las funciones- ζ correspondientes a las extensiones autoadjuntas del operador dado por (568) obedece también a la ecuación (1), válida para operadores regulares.

Parte VII
Operadores de Dirac

*O God! I could be bounded in a nutshell, and count myself
king of infinite space - were it not that I have bad dreams.
(Hamlet.)*

En el capítulo V demostramos que la posición de los polos de la función- ζ correspondiente a un operador de Schrödinger en una dimensión con un coeficiente singular proporcional a x^{-2} puede depender de la intensidad de la singularidad. Este resultado ha sido ilustrado con dos ejemplos en el capítulo VI.

En este capítulo, consideraremos dos operadores de Dirac con un coeficiente singular proporcional a x^{-1} y mostraremos que la posición de los polos de las correspondientes funciones- ζ tampoco están determinadas por el orden del operador y la dimensión de la variedad sino que dependen de la intensidad del coeficiente del término singular.

En la sección VII.1 resolveremos un operador de Dirac con una singularidad de la forma x^{-1} sobre la variedad unidimensional compacta $[0, 1]$ [57]. Encontraremos la resolución espectral del operador, obteniendo una ecuación trascendente para los autovalores y una forma explícita para las autofunciones. Esta resolución permitirá calcular las singularidades de la función- ζ .

Finalmente, en la sección VII.2, estudiamos una partícula sin masa, con carga y con spin, en $2 + 1$ dimensiones, en presencia de un campo magnético uniforme y de un flujo singular de Aharonov-Bohm. Mostraremos que la posición de los polos de la función- ζ correspondiente al hamiltoniano de Dirac depende del valor del flujo magnético singular.

VII.1. Un operador de primer orden

En esta sección consideraremos un operador de Dirac con un coeficiente singular definido sobre spinores de dos componentes en una variedad de base unidimensional. Aunque el estudio de las funciones espectrales desarrollado en el capítulo V se refiere a operadores de Schrödinger, la ecuación de autovalores del operador de primer orden que estudiaremos en la presente sección está relacionada con un operador de la forma (297).

De manera que, en estrecha analogía con el operador de supercarga estudiado en la sección III, las funciones espectrales que estudiaremos en esta sección no obedecen al comportamiento de las correspondientes a un operador regular. En particular, la posición de los polos de las funciones- ζ y η dependen del coeficiente del término singular en el operador diferencial. Una vez más, este resultado está condicionado por la existencia de un conjunto infinito de extensiones autoadjuntas.

VII.1.1. El operador y sus extensiones autoadjuntas

Consideremos el operador diferencial de Dirac,

$$D = \begin{pmatrix} 0 & A^\dagger \\ A & 0 \end{pmatrix}, \quad (584)$$

donde,

$$A := -\partial_x + \frac{\alpha}{x} = -x^\alpha \partial_x x^{-\alpha}, \quad A^\dagger := \partial_x + \frac{\alpha}{x} = x^{-\alpha} \partial_x x^\alpha, \quad (585)$$

y $\alpha \in \mathbb{R}$, definido sobre $\mathcal{D}(D) = \mathbb{C}^2 \otimes \mathcal{C}_0^\infty(0, 1)$. Se puede probar sin dificultad que D es simétrico sobre este dominio de definición.

El operador adjunto D^\dagger , que es la extensión maximal de D , está definido en el dominio $\mathcal{D}(D^\dagger)$ de funciones $\Phi(x) \in \mathbb{C}^2 \otimes \mathbf{L}_2(0, 1)$, cuyas componentes $\phi_1(x), \phi_2(x)$ tienen una derivada localmente sumable y que satisfacen,

$$D\Phi(x) = \begin{pmatrix} A^\dagger \phi_2(x) \\ A \phi_1(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{\phi}_1(x) \\ \tilde{\phi}_2(x) \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2 \otimes \mathbf{L}_2(0, 1). \quad (586)$$

Lema VII.1.1 Si $\Phi(x) \in \mathcal{D}(D^\dagger)$ y $-\frac{1}{2} < \alpha < \frac{1}{2}$, entonces existen constantes complejas $C_1[\Phi]$ y $C_2[\Phi]$ tales que,

$$|\phi_1(x) - C_1[\Phi] x^\alpha| + |\phi_2(x) - C_2[\Phi] x^{-\alpha}| \leq K_\alpha \|D\Phi(x)\| x^{1/2}, \quad (587)$$

donde $\|\cdot\|$ es la norma en $\mathbb{C}^2 \otimes \mathbf{L}_2$.

Demostración: La ecuación (586) implica,

$$\phi_1(x) = C_1[\Phi] x^\alpha - x^\alpha \int_0^x y^{-\alpha} \tilde{\phi}_2(y) dy, \quad (588)$$

$$\phi_2(x) = C_2[\Phi] x^{-\alpha} + x^{-\alpha} \int_0^x y^\alpha \tilde{\phi}_1(y) dy,$$

y teniendo en cuenta,

$$\left| \int_0^x y^\alpha \tilde{\phi}_1(y) dy \right| \leq \frac{x^{\alpha+1/2}}{\sqrt{1+2\alpha}} \|\tilde{\phi}_1\|, \quad (589)$$

$$\left| \int_0^x y^{-\alpha} \tilde{\phi}_2(y) dy \right| \leq \frac{x^{-\alpha+1/2}}{\sqrt{1-2\alpha}} \|\tilde{\phi}_2\|,$$

obtenemos la ecuación (587) con $K_\alpha = (1-2\alpha)^{-1/2} + (1+2\alpha)^{-1/2}$.

□

Corolario VII.1.2 Sea $\Phi(x) = \begin{pmatrix} \phi_1(x) \\ \phi_2(x) \end{pmatrix}$, $\Psi(x) = \begin{pmatrix} \psi_1(x) \\ \psi_2(x) \end{pmatrix} \in \mathcal{D}(D^\dagger)$. Entonces,

$$\begin{aligned} & (D^\dagger \Psi, \Phi) - (\Psi, D^\dagger \Phi) = \\ & = \left\{ C_1[\Psi]^* C_2[\Phi] - C_2[\Psi]^* C_1[\Phi] \right\} + \left\{ \psi_2(1)^* \phi_1(1) - \psi_1(1)^* \phi_2(1) \right\}. \end{aligned} \quad (590)$$

Demostración: A partir de las ecuaciones (585) se obtiene,

$$\begin{aligned} & (D^\dagger \Psi, \Phi) - (\Psi, D^\dagger \Phi) = \\ & = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\varepsilon}^1 \partial_x \left\{ x^\alpha \psi_2(x)^* x^{-\alpha} \phi_1(x) - x^{-\alpha} \psi_1(x)^* x^\alpha \phi_2(x) \right\} dx, \end{aligned} \quad (591)$$

a partir de la cual, teniendo en cuenta los resultados del Lema VII.1.1, se deduce la ecuación (590). □

De acuerdo con el Corolario (VII.1.2), podemos definir el mapeo,

$$\begin{aligned} & K : \mathcal{D}(D^\dagger) \rightarrow \mathbb{C}^4, \\ & \phi \rightarrow (C_1[\phi], C_2[\phi], \phi_1(1), \phi_2(1)). \end{aligned} \quad (592)$$

El dominio $\mathcal{D}(\overline{D})$ de la clausura $\overline{D} = (D^\dagger)^\dagger$ del operador D es el núcleo de K , en tanto que las extensiones simétricas de D están definidas sobre la preimagen de los subespacios de \mathbb{C}^4 bajo el mapeo K . Las extensiones autoadjuntas, por su parte, están identificadas con los subespacios lagrangianos $S \subset \mathbb{C}^4$, esto es, tales que $S = S^\perp$, donde el complemento ortogonal se define de acuerdo con la forma simpléctica del miembro derecho de la ecuación (590).

En adelante, consideraremos además extensiones autoadjuntas que satisfagan la condición de contorno local,

$$\phi_1(1) = 0. \quad (593)$$

De modo que cada una de estas extensiones está determinada por una condición de la forma,

$$\cos \gamma C_1[\Phi] + \sin \gamma C_2[\Phi] = 0, \quad (594)$$

con $\gamma \in [0, \pi)$. Denotaremos esta extensión por D_γ .

El espectro

Para determinar el espectro de las extensiones autoadjuntas D_γ de D debemos encontrar las soluciones de,

$$(D - \lambda)\Phi(x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} A^\dagger \phi_2(x) = \lambda \phi_1(x), \\ A \phi_1(x) = \lambda \phi_2(x), \end{cases} \quad (595)$$

que satisfagan las condiciones de contorno dadas por las ecuaciones (593) y (594).

La solución de la ecuación (595) para $\lambda = 0$ está dada por,

$$\Phi(x) = \begin{pmatrix} C_1 x^\alpha \\ C_2 x^{-\alpha} \end{pmatrix}, \quad (596)$$

pero las condiciones de contorno (593) y (594) implican que $C_1 = 0$ y $C_2 = 0$, a excepción del caso $\gamma = 0$. En consecuencia, sólo existe un modo cero para la extensión autoadjunta D_0 .

Para resolver el sistema (595) en el caso $\lambda \neq 0$, aplicamos el operador A^\dagger a la segunda de sus ecuaciones y, utilizando la primera, obtenemos,

$$\left\{ -\partial_x^2 + \frac{\nu^2 - 1/4}{x^2} - \lambda^2 \right\} \phi_1(x) = 0, \quad (597)$$

donde $0 < \nu := 1/2 - \alpha < 1$. Las soluciones de (597) tienen la forma,

$$\phi_1(x) = B_1 \sqrt{y} J_\nu(y) + B_2 \sqrt{y} J_{-\nu}(y), \quad (598)$$

siendo $y := |\lambda|x$ y B_1, B_2 son constantes complejas. Esto implica, junto con la segunda ecuación del sistema (595), que la componente inferior de $\Phi(x)$ está dada por,

$$\phi_2(x) = \sigma \{ -B_1 \sqrt{y} J_{-1+\nu}(y) + B_2 \sqrt{y} J_{1-\nu}(y) \}, \quad (599)$$

donde $\sigma = |\lambda|/\lambda$.

La condición de contorno (594) en el origen determina una relación entre las constantes B_1 y B_2 . Para ello, tenemos en cuenta que,

$$J_\nu(y) = y^\nu \left\{ \frac{1}{2^\nu \Gamma(1 + \nu)} + O(y^2) \right\}, \quad (600)$$

y obtenemos,

$$\cos \gamma C_1[\Phi] + \sin \gamma C_2[\Phi] = \frac{\cos \gamma B_2 |\lambda|^{1/2-\nu}}{2^{-\nu} \Gamma(1 - \nu)} - \sigma \frac{\sin \gamma B_1 |\lambda|^{-1/2+\nu}}{2^{-1+\nu} \Gamma(\nu)} = 0. \quad (601)$$

Esta ecuación conduce a la relación,

$$\frac{B_2}{B_1} = \sigma |\lambda|^{-1+2\nu} \left[\frac{4^{1/2-\nu} \Gamma(1-\nu)}{\Gamma(\nu)} \right] \tan \gamma. \quad (602)$$

La condición de contorno (593) en $x = 1$ puede escribirse, por su parte, de la forma,

$$\frac{B_2}{B_1} = -\frac{J_\nu(|\lambda|)}{J_{-\nu}(|\lambda|)}. \quad (603)$$

Las ecuaciones (602) y (603) determinan el espectro de cada extensión autoadjunta.

- Si $\gamma = \pi/2$, la ecuación (601) implica que $B_1 = 0$. Por consiguiente, $\phi_1(1) = 0 \Rightarrow J_{-\nu}(|\lambda|) = 0$. El espectro de la extensión $D_{\pi/2}$ es simétrico con respecto al origen y sus autovalores están dados por,

$$\lambda_{\pm,n} = \pm j_{-\nu,n}, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (604)$$

donde $j_{-\nu,n}$ es el n -ésimo cero positivo de la función de Bessel $J_{-\nu}(z)$.

- Si $\gamma = 0$, la ecuación (601) implica que $B_2 = 0$. Por consiguiente, $\phi_1(1) = 0 \Rightarrow J_\nu(|\lambda|) = 0$. El espectro de la extensión D_0 es entonces simétrico con respecto al origen y sus autovalores están dados por,

$$\lambda_0 = 0, \quad \lambda_{\pm,n} = \pm j_{\nu,n}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (605)$$

donde $j_{\nu,n}$ es el n -ésimo cero positivo de la función de Bessel $J_\nu(z)$.

- En general, si $\gamma \neq 0, \pi/2$, los autovalores de la extensión D_γ están determinados por la siguiente ecuación trascendente que se deriva de las ecuaciones (602) y (603),

$$|\lambda|^{1-2\nu} \frac{J_\nu(|\lambda|)}{J_{-\nu}(|\lambda|)} = \sigma \beta, \quad (606)$$

donde hemos definido,

$$\beta := 4^{1/2-\nu} \nu \frac{\Gamma(-\nu)}{\Gamma(\nu)} \tan \gamma. \quad (607)$$

De acuerdo con esta definición designaremos, en adelante, a las extensiones autoadjuntas de D por D^β .

Para los autovalores positivos $\sigma = 1$ y la ecuación (606) se reduce a,

$$F(\lambda) := \lambda^{1-2\nu} \frac{J_\nu(\lambda)}{J_{-\nu}(\lambda)} = \beta. \quad (608)$$

Esta relación es representada en la Figura 6 para valores particulares de β, ν .

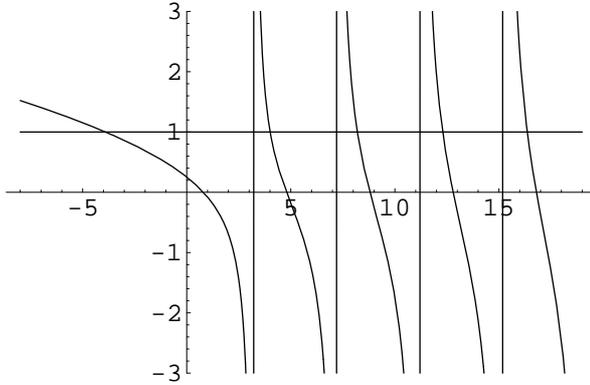


Figura 6: Gráfica de $F(\lambda) := \lambda^{1-2\nu} J_\nu(\lambda)/J_{-\nu}(\lambda)$, con $\nu = 1/6$, y $\beta = 1$.

Por el contrario, para los autovalores negativos $\sigma = e^{-i\pi}$ y la ecuación (606) toma entonces la forma,

$$F(|\lambda|) = -\beta. \quad (609)$$

En consecuencia, los autovalores negativos de D^β son los opuestos de los autovalores positivos de $D^{-\beta}$.

Nótese que el espectro es no degenerado y que existe un autovalor positivo entre cada par consecutivo de ceros de $J_{-\nu}(\lambda)$. Además, el espectro es simétrico respecto del origen sólo para las extensiones $\gamma = \pi/2$ ($\beta = \infty$) y $\gamma = 0$ ($\beta = 0$).

VII.1.2. La resolvente

En esta sección construiremos la resolvente $(D^\beta - \lambda)^{-1}$ para cada extensión autoadjunta D^β de D . Primeramente, consideraremos las condiciones de contorno invariantes de escala correspondientes a las extensiones $\beta = \infty$ y $\beta = 0$. La resolvente para una extensión autoadjunta general será posteriormente expresada como una combinación lineal de las resolventes de estos dos casos particulares.

El núcleo de la resolvente,

$$G^\beta(x, x'; \lambda) = \begin{pmatrix} G_{11}^\beta(x, x'; \lambda) & G_{12}^\beta(x, x'; \lambda) \\ G_{21}^\beta(x, x'; \lambda) & G_{22}^\beta(x, x'; \lambda) \end{pmatrix}, \quad (610)$$

verifica,

$$(D - \lambda) G^\beta(x, x'; \lambda) = \delta(x, x') \mathbf{1}. \quad (611)$$

A partir de esta ecuación obtenemos para los elementos de la diagonal,

$$\begin{cases} \left\{ -\partial_x^2 + \frac{\nu^2 - 1/4}{x^2} - \lambda^2 \right\} G_{11}^\beta(x, x'; \lambda) = \lambda \delta(x, x'), \\ \left\{ -\partial_x^2 + \frac{\nu^2 - 1/4}{x^2} - \lambda^2 \right\} G_{22}^\beta(x, x'; \lambda) = \lambda \delta(x, x'), \end{cases} \quad (612)$$

en tanto que los elementos no diagonales están dados por,

$$\begin{aligned} G_{21}^\beta(x, x'; \lambda) &= \frac{1}{\lambda} \left\{ -\partial_x + \frac{\alpha}{x} \right\} G_{11}^\beta(x, x'; \lambda), \\ G_{12}^\beta(x, x'; \lambda) &= \frac{1}{\lambda} \left\{ \partial_x + \frac{\alpha}{x} \right\} G_{22}^\beta(x, x'; \lambda), \end{aligned} \quad (613)$$

para $\lambda \neq 0$. Como la resolvente es analítica en λ , será suficiente evaluarla en el semiplano $\Re(\lambda) > 0$.

Para construir el núcleo de la resolvente mediante la expresión (236) utilizaremos las soluciones de las ecuaciones (595). Definimos entonces,

$$\left\{ \begin{array}{l} L_1^\infty(y) = \sqrt{y} J_{-\nu}(y), \\ L_2^\infty(y) = \sqrt{y} J_{1-\nu}(y), \\ L_1^0(y) = \sqrt{y} J_\nu(y), \\ L_2^0(y) = \sqrt{y} J_{-1+\nu}(y), \\ R_1(y; \lambda) = \sqrt{y} [J_{-\nu}(\lambda) J_\nu(y) - J_\nu(\lambda) J_{-\nu}(y)], \\ R_2(y; \lambda) = \sqrt{y} [J_{-\nu}(\lambda) J_{-1+\nu}(y) + J_\nu(\lambda) J_{1-\nu}(y)]. \end{array} \right. \quad (614)$$

Nótese que $R_1(\lambda; \lambda) = 0$ y $A^\dagger R_2(\lambda x; \lambda)|_{x=1} = 0$. Los wronskianos correspondientes están dados por,

$$\left\{ \begin{array}{l} W [L_1^\infty, R_1] (\lambda) = -\frac{2}{\pi} \sin(\pi\nu) J_{-\nu}(\lambda), \\ W [L_2^\infty, R_2] (\lambda) = \frac{2}{\pi} \sin(\pi\nu) J_{-\nu}(\lambda), \\ W [L_1^0, R_1] (\lambda) = -\frac{2}{\pi} \sin(\pi\nu) J_\nu(\lambda), \\ W [L_2^0, R_2] (\lambda) = -\frac{2}{\pi} \sin(\pi\nu) J_\nu(\lambda), \end{array} \right. \quad (615)$$

cuyos ceros coinciden con los ceros de $J_{-\nu}(\lambda)$ y $J_\nu(\lambda)$, respectivamente.

La resolvente para la extensión $\beta = \infty$

Las condiciones de contorno que determinan, junto con las ecuaciones (612), los elementos diagonales del núcleo de la resolvente se obtienen imponiendo que la función de dos componentes $\Phi(x)$,

$$\Phi(x) = \begin{pmatrix} \phi_1(x) \\ \phi_2(x) \end{pmatrix} = \int_0^1 G^\infty(x, x'; \lambda) \begin{pmatrix} f_1(x') \\ f_2(x') \end{pmatrix} dx' \quad (616)$$

satisfaga,

$$\phi_1(1) = 0 \quad \text{y} \quad C_2[\Phi] = 0, \quad (617)$$

para cualquier par de funciones $f_1(x), f_2(x) \in \mathbf{L}_2(0, 1)$. Esto implica que,

$$G_{11}^\infty(x, x'; \lambda) = -\frac{1}{W[L_1^\infty, R_1](\lambda)} \times \begin{cases} L_1^\infty(y) R_1(y'; \lambda) & \text{si } x \leq x', \\ R_1(y; \lambda) L_1^\infty(y') & \text{si } x \geq x', \end{cases} \quad (618)$$

$$G_{22}^\infty(x, x'; \lambda) = -\frac{1}{W[L_1^\infty, R_1](\lambda)} \times \begin{cases} L_2^\infty(y) R_2(y'; \lambda) & \text{si } x \leq x', \\ R_2(y; \lambda) L_2^D(y') & \text{si } x \geq x'. \end{cases} \quad (619)$$

Las componentes $G_{12}^\infty(x, x'; \lambda)$ y $G_{21}^\infty(x, x'; \lambda)$, por su parte, están dadas por la ecuación (613). Las ecuaciones (614) y (615) permiten verificar tanto las condiciones de contorno como $(D - \lambda) \Phi(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \end{pmatrix}$. En efecto, a partir de las ecuaciones (613), (618) y (619) se obtiene,

$$\phi_1(x) = C_1^\infty[\Phi] x^{\frac{1}{2}-\nu} + O(\sqrt{x}), \quad \phi_2(x) = O(\sqrt{x}), \quad (620)$$

con,

$$C_1^\infty[\Phi] = \frac{-\pi \lambda^{\frac{1}{2}-\nu}}{2^{1-\nu} \sin(\pi\nu) J_{-\nu}(\lambda) \Gamma(1-\nu)} \cdot \int_0^1 [R_1(y; \lambda) f_1(y) - R_2(y; \lambda) f_2(y)] dy, \quad (621)$$

para λ distinto de todo cero de $J_{-\nu}(\lambda)$. Nótese que $C_1^\infty[\Phi] \neq 0$ si la integral del miembro derecho de la ecuación (621) no se anula.

La resolvente de la extensión $\beta = 0$

En este caso, la función,

$$\Phi(x) = \begin{pmatrix} \phi_1(x) \\ \phi_2(x) \end{pmatrix} = \int_0^1 G^0(x, x'; \lambda) \begin{pmatrix} f_1(x') \\ f_2(x') \end{pmatrix} dx' \quad (622)$$

debe verificar,

$$\phi_1(1) = 0 \quad \text{y} \quad C_1[\Phi] = 0, \quad (623)$$

para cualquier par de funciones $f_1(x), f_2(x) \in \mathbf{L}_2(0, 1)$. Esto implica que,

$$G_{11}^0(x, x'; \lambda) = -\frac{1}{W[L_1^0, R_1](\lambda)} \times \begin{cases} L_1^0(y) R_1(y'; \lambda) & \text{si } x \leq x', \\ R_1(y; \lambda) L_1^0(y') & \text{si } x \geq x', \end{cases} \quad (624)$$

$$G_{22}^0(x, y; \lambda) = -\frac{1}{W[L_1^0, R_1](\lambda)} \times \begin{cases} L_2^0(y) R_2(y'; \lambda), & \text{si } x \leq x', \\ R_2(y; \lambda) L_2^0(y'), & \text{si } x \geq x'. \end{cases} \quad (625)$$

Las componentes $G_{12}^0(x, x'; \lambda)$ y $G_{21}^0(x, x'; \lambda)$ están dadas por la ecuación (613). Las ecuaciones (614) y (615) permiten verificar tanto las condiciones de contorno como la relación $(D - \lambda)\Phi(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \end{pmatrix}$. En efecto, las ecuaciones (613), (624) y (625) permiten obtener,

$$\phi_1(x) = O(\sqrt{x}), \quad \phi_2(x) = C_2^N[\Phi] x^{-\frac{1}{2}+\nu} + O(\sqrt{x}), \quad (626)$$

con,

$$C_2^N[\Phi] = \frac{\pi \lambda^{\frac{1}{2}+\nu}}{2^\nu \sin(\pi\nu) J_\nu(\lambda) \Gamma(\nu)} \times \int_0^1 [R_1(\lambda x'; \lambda) f_1(x') - R_2(\lambda x'; \lambda) f_2(x')] dx', \quad (627)$$

para λ distinto de todo cero de $J_\nu(\lambda)$.

Nótese que $C_2^N[\Phi] \neq 0$ si la integral del miembro derecho de la ecuación (627) (la misma que para la extensión $\beta = \infty$, dada por la ecuación (621)) no se anula.

La resolvente para una extensión autoadjunta general

Para el caso general imponemos la condición de contorno,

$$\phi_1(1) = 0, \quad \cos \gamma C_1[\Phi] + \sin \gamma C_2[\Phi] = 0, \quad (628)$$

para,

$$\Phi(x) = \begin{pmatrix} \phi_1(x) \\ \phi_2(x) \end{pmatrix} = \int_0^1 G^\beta(x, x'; \lambda) \begin{pmatrix} f_1(x') \\ f_2(x') \end{pmatrix} dx', \quad (629)$$

y cualquier par de funciones $f_1(x), f_2(x) \in \mathbf{L}_2(0, 1)$. Para ello, consideramos una combinación lineal de las resolventes de los dos casos particulares $\beta = \infty$ y $\beta = 0$,

$$G^\beta(x, x'; \lambda) = [1 - \tau(\lambda)] G^\infty(x, x'; \lambda) + \tau(\lambda) G^0(x, x'; \lambda). \quad (630)$$

Dado que la condición de contorno en $x = 1$ se satisface automáticamente, el factor $\tau(\lambda)$ queda determinado por la condición,

$$\cos \gamma [1 - \tau(\lambda)] C_1^\infty[\Phi] + \sin \gamma \tau(\lambda) C_2^0[\Phi] = 0. \quad (631)$$

A partir de la ecuación (631) obtenemos,

$$\tau(\lambda) = \frac{\cos \gamma C_1^\infty[\Phi]}{\cos \gamma C_1^\infty[\Phi] - \sin \gamma C_2^0[\Phi]} = 1 - \frac{1}{1 - \beta^{-1} \lambda^{1-2\nu} \frac{J_\nu(\lambda)}{J_{-\nu}(\lambda)}}, \quad (632)$$

para λ distinto de todo cero de $\beta J_{-\nu}(\lambda) - \lambda^{1-2\nu} J_\nu(\lambda)$.

La traza de la resolvente

La ecuación (630) indica que la resolvente $(D^\beta - \lambda)^{-1}$ de una extensión autoadjunta arbitraria D^β puede expresarse en términos de las resolventes de las dos extensiones particulares $(D^\infty - \lambda)^{-1}$ y $(D^0 - \lambda)^{-1}$. Además, dado que los autovalores de cualquier extensión crecen linealmente con n (véase la sección VII.1.1), estas resolventes son operadores de Hilbert-Schmidt y sus derivadas con respecto a λ son operadores tipo traza.

El cuadrado $(D^\beta - \lambda)^{-2}$ de la resolvente puede escribirse entonces de la siguiente manera,

$$\begin{aligned} (D^\beta - \lambda)^{-2} &= \partial_\lambda (D^\beta - \lambda)^{-1} = \\ &= \partial_\lambda (D^\infty - \lambda)^{-1} + \partial_\lambda \tau(\lambda) \left[(D^0 - \lambda)^{-1} - (D^\infty - \lambda)^{-1} \right] + \\ &\quad + \tau(\lambda) \left[\partial_\lambda (D^0 - \lambda)^{-1} - \partial_\lambda (D^\infty - \lambda)^{-1} \right]. \end{aligned} \quad (633)$$

La ecuación (633) indica que la diferencia $(D^0 - \lambda)^{-1} - (D^\infty - \lambda)^{-1}$ es un operador fuertemente analítico de λ , excepto en los ceros de $\partial_\lambda \tau(\lambda)$, que toma valores en el ideal de operadores tipo traza.

A partir de las expresiones para los elementos de la diagonal de $(D^\infty - \lambda)^{-1}$ y $(D^0 - \lambda)^{-1}$ obtenidas en las secciones anteriores (véanse ecuaciones (618), (619), (624) y (625)), obtenemos²⁸,

$$\begin{aligned} \text{Tr } \partial_\lambda (D^\infty - \lambda)^{-1} &= \int_0^1 \text{tr} \{ \partial_\lambda G^\infty(x, x; \lambda) \} dx = \\ &= \partial_\lambda \left\{ \frac{J_{1-\nu}(\lambda)}{J_{-\nu}(\lambda)} \right\} = 1 - \frac{1-2\nu}{\lambda} \frac{J_{1-\nu}(\lambda)}{J_{-\nu}(\lambda)} + \frac{J_{1-\nu}^2(\lambda)}{J_{-\nu}^2(\lambda)} = \\ &= 1 - \frac{\left(\frac{1}{2} - \nu\right)^2}{\lambda^2} + \left(\frac{1}{2\lambda} + \frac{J'_{-\nu}(\lambda)}{J_{-\nu}(\lambda)} \right)^2. \end{aligned} \quad (634)$$

²⁸Los detalles pueden encontrarse en la sección X.6

En esta expresión, “tr” representa la traza matricial, en oposición a la traza del operador “Tr.” Análogamente,

$$\begin{aligned} \text{Tr} \{ (D^0 - \lambda)^{-1} - (D^\infty - \lambda)^{-1} \} &= \frac{2\nu - 1}{\lambda} - \frac{J_{1-\nu}(\lambda)}{J_{-\nu}(\lambda)} - \frac{J_{-1+\nu}(\lambda)}{J_\nu(\lambda)} = \\ &= \frac{1 - 2\nu}{\lambda} + \frac{J'_\nu(\lambda)}{J_\nu(\lambda)} - \frac{J'_{-\nu}(\lambda)}{J_{-\nu}(\lambda)}. \end{aligned} \quad (635)$$

Por su parte, dado que,

$$\partial_\lambda \text{Tr} \{ (D^0 - \lambda)^{-1} - (D^\infty - \lambda)^{-1} \} = \text{Tr} \{ \partial_\lambda (D^0 - \lambda)^{-1} - \partial_\lambda (D^\infty - \lambda)^{-1} \}, \quad (636)$$

obtenemos,

$$\begin{aligned} &\text{Tr} \{ \partial_\lambda (D^0 - \lambda)^{-1} - \partial_\lambda (D^\infty - \lambda)^{-1} \} = \\ &= \frac{1 - 2\nu}{\lambda^2} + \frac{1 - 2\nu}{\lambda} \left[\frac{J_{1-\nu}(\lambda)}{J_{-\nu}(\lambda)} + \frac{J_{-1+\nu}(\lambda)}{J_\nu(\lambda)} \right] - \left[\frac{J_{1-\nu}^2(\lambda)}{J_{-\nu}^2(\lambda)} - \frac{J_{-1+\nu}^2(\lambda)}{J_\nu^2(\lambda)} \right] = \\ &= \frac{2\nu - 1}{\lambda^2} - \left(\frac{1}{2\lambda} + \frac{J'_\nu(\lambda)}{J_\nu(\lambda)} \right)^2 + \left(\frac{1}{2\lambda} + \frac{J'_{-\nu}(\lambda)}{J_{-\nu}(\lambda)} \right)^2. \end{aligned} \quad (637)$$

Estas expresiones permiten calcular la traza del cuadrado de la resolvente de una extensión autoadjunta general,

$$\begin{aligned} \text{Tr} (D^\beta - \lambda)^{-2} &= \text{Tr} \partial_\lambda (D^\infty - \lambda)^{-1} + \\ &+ \partial_\lambda \left[\tau(\lambda) \text{Tr} \{ (D^0 - \lambda)^{-1} - (D^\infty - \lambda)^{-1} \} \right]. \end{aligned} \quad (638)$$

Desarrollo asintótico de la traza de la resolvente

Utilizando el desarrollo asintótico de Hankel para las funciones de Bessel (véase la sección X.7) obtenemos para el primer término del miembro derecho de la ecuación (638),

$$\begin{aligned} \text{Tr} \partial_\lambda (D^\infty - \lambda)^{-1} &\sim \sum_{k=2}^{\infty} \frac{A_k(\nu, \sigma)}{\lambda^k} = \\ &= -\frac{\frac{1}{2} - \nu}{\lambda^2} + i\sigma \frac{\nu^2 - \frac{1}{4}}{\lambda^3} - \frac{3}{2} \frac{\nu^2 - \frac{1}{4}}{\lambda^4} + O\left(\frac{1}{\lambda}\right)^6, \end{aligned} \quad (639)$$

donde $\sigma = 1$ para $\Im(\lambda) > 0$ y $\sigma = -1$ para $\Im(\lambda) < 0$. Los coeficientes de esta serie puede ser evaluados a partir de las ecuaciones (854) y (865). Nótese que $A_k(\nu, -1) = A_k(\nu, 1)^*$, pues $A_{2k}(\nu, 1)$ es real y $A_{2k+1}(\nu, 1)$ es imaginario puro.

VII.1 UN OPERADOR DE PRIMER ORDEN

Análogamente, de las ecuaciones (635), (637) y (868) obtenemos,

$$\text{Tr} \{(D^0 - \lambda)^{-1} - (D^\infty - \lambda)^{-1}\} \sim \frac{1 - 2\nu}{\lambda}, \quad (640)$$

y,

$$\text{Tr} \{\partial_\lambda (D^0 - \lambda)^{-1} - \partial_\lambda (D^\infty - \lambda)^{-1}\} \sim -\frac{1 - 2\nu}{\lambda^2}. \quad (641)$$

Por otra parte, teniendo en cuenta la ecuación (858),

$$\begin{aligned} \tau(\lambda) &\sim 1 - \left(1 - \frac{e^{\sigma i\pi\nu} \lambda^{1-2\nu}}{\beta}\right)^{-1} \sim \\ &\sim \begin{cases} -\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{e^{\sigma i\pi\nu} \lambda^{1-2\nu}}{\beta}\right)^k & \text{si } \frac{1}{2} < \nu < 1, \\ \sum_{k=0}^{\infty} (\beta e^{-\sigma i\pi\nu} \lambda^{-1+2\nu})^k & \text{si } 0 < \nu < 1/2, \end{cases} \end{aligned} \quad (642)$$

donde $\sigma = 1$ ($\sigma = -1$) corresponde a $\Im(\lambda) > 0$ ($\Im(\lambda) < 0$.) Nótese la presencia de potencias de λ no enteras, dependientes de ν , en este desarrollo.

De manera análoga obtenemos,

$$\begin{aligned} \partial_\lambda \tau(\lambda) &\sim -\frac{e^{\sigma i\pi\nu} \lambda^{-2\nu}}{\beta} \left[1 - (1 - 2\nu) \frac{e^{\sigma i\pi\nu} \lambda^{1-2\nu}}{\beta}\right]^{-2} \sim \\ &\sim \begin{cases} -\frac{1 - 2\nu}{\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} k \left(\frac{e^{\sigma i\pi\nu} \lambda^{1-2\nu}}{\beta}\right)^k & \text{si } \frac{1}{2} < \nu < 1, \\ -\frac{1 - 2\nu}{\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} k (\beta e^{-\sigma i\pi\nu} \lambda^{-1+2\nu})^k & \text{si } 0 < \nu < \frac{1}{2}, \end{cases} \end{aligned} \quad (643)$$

que, como se puede ver, corresponden a las derivadas de los correspondientes desarrollos asintóticos de la expresiones (642).

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} & \partial_\lambda \left[\tau(\lambda) \operatorname{Tr} \{ (D^0 - \lambda)^{-1} - (D^\infty - \lambda)^{-1} \} \right] \sim (2\nu - 1) \times \\ & \times \begin{cases} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{e^{\sigma i \pi \nu}}{\beta} \right)^k [(1 - 2\nu)k - 1] \lambda^{(1-2\nu)k-2} & \text{si } \frac{1}{2} < \nu < 1, \\ \sum_{k=0}^{\infty} (\beta e^{-\sigma i \pi \nu})^k [(1 - 2\nu)k + 1] \lambda^{-(1-2\nu)k-2} & \text{si } 0 < \nu < \frac{1}{2}. \end{cases} \end{aligned} \quad (644)$$

Debe observarse, nuevamente, la presencia de potencias de λ dependientes de ν en este desarrollo.

VII.1.3. Las funciones $\zeta(s)$ y $\eta(s)$

Como los autovalores negativos de la extensión autoadjunta D^β son opuestos a los autovalores positivos de la extensión autoadjunta $D^{-\beta}$ será suficiente considerar la función- ζ parcial $\zeta_+^\beta(s)$ que se define como la suma,

$$\zeta_+^\beta(s) = \sum_{\lambda_n > 0} \lambda_n^{-s}, \quad (645)$$

donde λ_n representan los autovalores positivos de D^β . Por consiguiente, ζ_+^β satisface [112], para $\Re(s) > 1$,

$$\zeta_+^\beta(s) = -\frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathcal{C}} \frac{\lambda^{1-s}}{s-1} \operatorname{Tr} (D^\beta - \lambda)^{-2} d\lambda, \quad (646)$$

donde la curva \mathcal{C} encierra la parte positiva del espectro del operador en sentido antihorario, manteniéndose a la derecha del origen.

De acuerdo con la ecuación (638),

$$\begin{aligned} \zeta_+^\beta(s) &= \oint_{\mathcal{C}} \frac{\lambda^{1-s}}{s-1} \operatorname{Tr} (D^\beta - \lambda)^{-2} \frac{d\lambda}{2\pi i} = \\ &= \zeta_+^\infty(s) - \oint_{\mathcal{C}} \frac{\lambda^{1-s}}{s-1} \partial_\lambda \left[\tau(\lambda) \operatorname{Tr} \{ (D^0 - \lambda)^{-1} - (D^\infty - \lambda)^{-1} \} \right] \frac{d\lambda}{2\pi i} = \\ &= \zeta_+^\infty(s) - \int_{-i\infty+0}^{i\infty+0} \frac{\lambda^{1-s}}{s-1} \partial_\lambda \left[\tau(\lambda) \operatorname{Tr} \{ (D^0 - \lambda)^{-1} - (D^\infty - \lambda)^{-1} \} \right] \frac{d\lambda}{2\pi i}, \end{aligned} \quad (647)$$

donde $\zeta_+^\infty(s)$ es la función- ζ parcial (véase la ecuación (645)) de la extensión $\beta = \infty$.

Además, para una extensión autoadjunta general, podemos escribir,

$$\begin{aligned} \zeta_+^\beta(s) &= \frac{1}{2\pi} \int_1^\infty e^{i\frac{\pi}{2}(1-s)} \frac{\mu^{1-s}}{s-1} \text{Tr} (D^\beta - e^{i\frac{\pi}{2}} \mu)^{-2} \frac{d\mu}{2\pi} + \\ &+ \int_1^\infty e^{-i\frac{\pi}{2}(1-s)} \frac{\mu^{1-s}}{s-1} \text{Tr} (D^\beta - e^{-i\frac{\pi}{2}} \mu)^{-2} \frac{d\mu}{2\pi} + \frac{h_1(s)}{s-1}, \end{aligned} \quad (648)$$

donde $h_1(s)$ es una función entera. Podemos entonces determinar los polos de $\zeta_+^\beta(s)$, sumando y substrayendo en los integrandos del miembro derecho de la ecuación (648) una suma parcial del desarrollo asintótico de la traza del cuadrado de la resolvente obtenido en la sección anterior.

En particular, los polos de la función $\zeta_+^\infty(s)$ están dados por,

$$\begin{aligned} \zeta_+^\infty(s) &= \frac{1}{s-1} \int_1^\infty e^{i\frac{\pi}{2}(1-s)} \mu^{1-s} \left\{ \sum_{k=2}^N e^{-i\frac{\pi}{2}k} A_k(\nu, 1) \mu^{-k} \right\} \frac{d\mu}{2\pi} + \\ &+ \frac{1}{s-1} \int_1^\infty e^{-i\frac{\pi}{2}(1-s)} \mu^{1-s} \left\{ \sum_{k=2}^N e^{i\frac{\pi}{2}k} A_k(\nu, 1)^* \mu^{-k} \right\} \frac{d\mu}{2\pi} + \frac{h_2(s)}{s-1} = \\ &= \frac{1}{\pi(s-1)} \sum_{k=2}^N \frac{1}{s-(2-k)} \Re \left\{ e^{i\frac{\pi}{2}(1-s-k)} A_k(\nu, 1) \right\} + \frac{h_2(s)}{s-1}, \end{aligned} \quad (649)$$

donde $h_2(s)$ es una función analítica en el semiplano $\Re(s) > 1 - N$. Por consiguiente, la extensión meromorfa de $\zeta_+^\infty(s)$ tiene un polo simple en $s = 1$ (véase la ecuación (648)), cuyo residuo está dado por,

$$\text{Res } \zeta_+^\infty(s) \Big|_{s=1} = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty+0}^{i\infty+0} \lambda^0 \partial_\lambda \left\{ \frac{J_{1-\nu}(\lambda)}{J_{-\nu}(\lambda)} \right\} d\lambda = \frac{1}{\pi}, \quad (650)$$

donde hemos utilizado las ecuaciones (856) y (857).

La función $\zeta_+^\infty(s)$ presenta también polos simples en $s = 1 - 2n$, para $n = 1, 2, \dots$, con residuos,

$$\text{Res } \zeta_+^\infty(s) \Big|_{s=1-2n} = \frac{\Re \{ i A_{2n+1}(\nu, 1) \}}{(k-1)\pi}, \quad (651)$$

donde los coeficientes $A_k(\nu, 1)$ están dados por (639).

Para una extensión autoadjunta general D^β , debemos también considerar las singularidades que provienen del desarrollo asintótico de $\partial_\lambda [\tau(\lambda) \text{Tr} \{ (D^\infty - \lambda)^{-1} - (D^0 - \lambda)^{-1} \}]$

en la ecuación (644). Resolveremos en detalle solamente el caso $\frac{1}{2} < \nu < 1$, en tanto que el caso $0 < \nu < \frac{1}{2}$ conduce a resultados similares.

A partir de la ecuación (648), y teniendo en cuenta la ecuación (644), si $s > 1$,

$$\begin{aligned} \zeta_+^\beta(s) - \zeta_+^\infty(s) &= \frac{h_3(s)}{s-1} - \frac{\nu - \frac{1}{2}}{\pi(s-1)} \times \\ &\times \left\{ \int_1^\infty e^{i\frac{\pi}{2}(-s-1)} \mu^{1-s} \left[\sum_{k=1}^N \frac{e^{ik\frac{\pi}{2}}}{\beta^k} [(2\nu-1)k+1] \mu^{-(2\nu-1)k-2} \right] d\mu - \right. \\ &\left. - \int_1^\infty e^{-i\frac{\pi}{2}(-s-1)} \mu^{1-s} \left[\sum_{k=1}^N \frac{e^{-ik\frac{\pi}{2}}}{\beta^k} [(2\nu-1)k+1] \mu^{-(2\nu-1)k-2} \right] d\mu \right\} = \\ &= -\frac{2\nu-1}{\pi(s-1)} \sum_{k=1}^N \left[\frac{1+(2\nu-1)k}{s+(2\nu-1)k} \right] \Re \left\{ \frac{e^{i\frac{\pi}{2}(k-s-1)}}{\beta^k} \right\} + \frac{h_3(s)}{s-1}, \end{aligned} \quad (652)$$

donde $h_3(s)$ es analítica para $\Re(s) > -(2\nu-1)(N+1)$.

En consecuencia, el residuo del polo de la extensión meromorfa de $\zeta_+^\beta(s) - \zeta_+^\infty(s)$ en $s=1$ se anula,

$$\begin{aligned} \text{Res} \left(\zeta_+^\beta(s) - \zeta_+^\infty(s) \right) \Big|_{s=1} &= \\ &= \int_{-i\infty+0}^{i\infty+0} \lambda^0 \partial_\lambda \left[\tau(\lambda) \text{Tr} \{ (D^0 - \lambda)^{-1} - (D^\infty - \lambda)^{-1} \} \right] \frac{d\lambda}{2\pi i} = 0, \end{aligned} \quad (653)$$

como se desprende de las ecuaciones (640) y (642). Existen, sin embargo, polos simples en valores no enteros dependientes de ν ,

$$s = (1-2\nu)k = -|1-2\nu|k \quad \text{con} \quad k = 1, 2, \dots \quad (654)$$

cuyos residuos dependen de la extensión autoadjunta considerada,

$$\text{Res} \left\{ \zeta_+^\beta(s) - \zeta_+^\infty(s) \right\} \Big|_{s=(1-2\nu)k} = \frac{2\nu-1}{\pi\beta^k} \sin[\pi\nu k]. \quad (655)$$

Ahora bien, de acuerdo con lo comentado a continuación de la ecuación (609), la función $\zeta^\beta(s)$ está dada por,

$$\zeta^\beta(s) = \zeta_+^\beta(s) + e^{-i\pi s} \zeta_+^{-\beta}(s). \quad (656)$$

En particular, para la extensión $\beta = \infty$,

$$\zeta^\infty(s) = (1 + e^{-i\pi s}) \zeta_+^\infty(s), \quad (657)$$

VII.1 UN OPERADOR DE PRIMER ORDEN

puesto que el espectro de D^∞ es simétrico respecto del origen (véase la ecuación (604).) Se concluye entonces que $\zeta^\infty(s)$ es entera. En efecto, a partir de la ecuación (651), el residuo en $s = 1 - 2n$ está dado por,

$$\text{Res} \{ \zeta^\infty(s) \} |_{s=1-2n} = (1 + e^{-i\pi(1-2n)}) \text{Res} \{ \zeta_+^\infty(s) \} |_{s=1-2n} = 0. \quad (658)$$

Por otra parte, para una extensión autoadjunta arbitraria las singularidades de la función $\zeta^\beta(s)$ consisten en polos simples en los puntos s_k dados por,

$$s_k = -(2\nu - 1)k < 0 \quad \text{con} \quad k = 1, 2, \dots \quad (659)$$

con residuos,

$$\begin{aligned} & \text{Res} \{ \zeta^\beta(s) - \zeta^\infty(s) \} |_{s=-(2\nu-1)k} = \\ &= \text{Res} \left\{ \left[\zeta_+^\beta(s) - \zeta_+^\infty(s) \right] + e^{-i\pi s} \left[\zeta_+^{-\beta}(s) - \zeta_+^\infty(s) \right] \right\} |_{s=-(2\nu-1)k} = \\ &= \frac{2\nu - 1}{\pi} \frac{\sin(2\pi\nu k)}{\beta^k} e^{i\pi\nu k}. \end{aligned} \quad (660)$$

Análogamente, la asimetría espectral (véase la ecuación (244)) satisface,

$$\eta^\beta(s) = \zeta_+^\beta(s) - \zeta_+^{-\beta}(s). \quad (661)$$

En particular, $\eta^\infty(s) = \eta^0(s) = 0$, pues los espectros de las extensiones D^∞, D^0 son simétricos (véanse las ecuaciones (604) y (605)).

Por el contrario, para una extensión autoadjunta general, si $1/2 < \nu < 1$, la función $\eta^\beta(s)$ no se anula idénticamente y tiene polos simples en los puntos s_k dados por,

$$s_k = -(2\nu - 1)(2k + 1) \quad \text{con} \quad k = 1, 2, \dots \quad (662)$$

con residuos,

$$\text{Res} \{ \eta^\beta(s) \} |_{s=-(2\nu-1)k} = 2 \frac{2\nu - 1}{\pi} \frac{\sin[(2k + 1)\pi\nu]}{\beta^{2k+1}}. \quad (663)$$

Para el caso $0 < \nu < 1/2$, un cálculo completamente similar muestra que $\zeta_+^\beta(s) - \zeta_+^\infty(s)$ admite una extensión meromorfa con polos simples en puntos s_k dependientes de ν ,

$$s = -(1 - 2\nu)k \quad (664)$$

para $k = 1, 2, \dots$, cuyos residuos dependen de la extensión autoadjunta y están dados por,

$$\text{Res} \left\{ \zeta_+^\beta(s) - \zeta_+^\infty(s) \right\} \Big|_{s=-(1-2\nu)k} = -\frac{1-2\nu}{\pi} \beta^k \sin(\pi\nu k). \quad (665)$$

A partir de este resultado, es inmediato obtener los residuos de las funciones $\zeta_+^\beta(s)$ y $\eta^\beta(s)$. De hecho, se verifica que el resultado se obtiene substituyendo en las ecuaciones (660) y (663) β y $e^{i\pi\nu k}$ por sus inversos.

Es interesante notar que si $\beta \neq 0, \infty$, los residuos de la función $\zeta_+^\beta(s)$ en los puntos del plano complejo $s_k = -|1-2\nu|k$ son proporcionales a $\beta^{\pm k}$. Esto es consistente con el comportamiento del operador D ante las transformaciones de escala (561) que aplican $\mathbf{L}_2(0, 1) \rightarrow \mathbf{L}_2(0, 1/c)$.

La extensión D^β es equivalente por una transformación unitaria al operador $(1/c)D_c^{\beta c}$ definido similarmente en $\mathbf{L}_2(0, 1/c)$, con $\beta_c = c^{1-2\nu} \beta$,

$$T D^\beta = \frac{1}{c} D_c^{\beta c} T. \quad (666)$$

Sólo para las extensiones con $\beta = 0, \infty$ la condición de contorno en la singularidad $x = 0$, dada por la ecuación (594), es invariante ante cambios de escala.

Por consiguiente, la función $\zeta_+^\beta(s)$ transforma ante un cambio de escala de la siguiente manera,

$$(\zeta_+^{\beta c})_c(s) = c^{-s} \zeta_+^\beta(s), \quad (667)$$

y los residuos correspondientes están dados por,

$$\text{Res} \left\{ (\zeta_+^{\beta c})_c(s) \right\} \Big|_{s=-|1-2\nu|k} = c^{1-2\nu|k} \text{Res} \left\{ \zeta_+^\beta(s) \right\} \Big|_{s=-|1-2\nu|k}. \quad (668)$$

El factor $c^{|1-2\nu|k}$ cancela exactamente el efecto que tiene el cambio en la condición de contorno en el origen sobre β ,

$$\beta^{\pm k} = c^{-|1-2\nu|k} \beta_c^{\pm k}. \quad (669)$$

Por lo tanto, la diferencia entre los intervalos $(0, 1)$ y $(0, 1/c)$ no tiene efecto alguno en la estructura de estos residuos que, entonces conjeturamos están determinados por propiedades locales en las vecindades de $x = 0$.

Para finalizar, señalamos, que estos polos anómalos no están presentes en el caso regular $\alpha = 0$. En efecto, en este caso $\nu = 1/2$ y $\tau(\lambda)$ en la ecuación (632) admite un desarrollo asintótico constante, mientras que $\text{Tr} \{ (D^0 - \lambda)^{-1} - (D^\infty - \lambda)^{-1} \}$ tiende asintóticamente a cero (véase la ecuación (640).) Además, los residuos de los polos provenientes de la función $\zeta_+^\infty(s)$ son todos nulos (véanse las ecuaciones (651) y (639)), excepto aquel correspondiente al polo en $s = 1$, que tiene un residuo igual a $1/\pi$ (véase la ecuación (650).)

En conclusión, la presencia de polos de las funciones $\zeta^\beta(s)$ y $\eta^\beta(s)$ en valores no enteros es consecuencia del comportamiento singular del término de orden cero en D^β y de la forma en que varía la condición de contorno ante una transformación de escala.

VII.2. El problema de Aharonov-Bohm

El último ejemplo que consideraremos se refiere a una partícula de Dirac con carga y sin masa, en $(2 + 1)$ dimensiones, en presencia de un campo magnético uniforme y de un tubo magnético singular con flujo no entero. Este problema ha sido considerado en [54], donde se ha demostrado que el hamiltoniano restringido a un subespacio de momento angular *crítico* admite extensiones autoadjuntas no triviales cuyos espectros satisfacen una ecuación similar a (449) (véanse también [16, 3, 42, 2, 116, 97].)

En esta sección determinaremos el espectro de energías de las partículas y sus estados estacionarios en relación con las extensiones autoadjuntas del hamiltoniano. Calcularemos además la estructura de polos de la función- ζ y mostraremos que existen polos en posiciones dependientes del valor del flujo magnético de Aharonov -Bohm.

VII.2.1. El operador y su espectro

Consideremos una partícula de Dirac con carga e y masa nula moviéndose en el plano en presencia de un campo magnético uniforme B y de un tubo de flujo magnético singular $\Phi = 2\pi\kappa/e$, con $0 < \kappa < 1$ ubicado en el origen.

La función de onda de la partícula es un spinor ψ de dos componentes que satisface la ecuación de Dirac²⁹,

$$i\nabla\psi = 0, \quad (670)$$

donde la derivada covariante³⁰ es $\nabla = \partial - ieA$.

El campo magnético uniforme y el tubo de flujo singular son representados por el siguiente campo de gauge,

$$\vec{A} = \left(\frac{\Omega r}{e} + \frac{\kappa}{er} \right) \hat{e}_\theta, \quad (672)$$

donde $\Omega := eB/2$ y \hat{e}_θ es el vector unitario perpendicular a la dirección radial. Como Ω tiene dimensiones de L^{-2} definimos las cantidades adimensionales $x := \Omega^{1/2} r$ y $D := \Omega^{-1/2} H$, siendo H el hamiltoniano de Dirac asociado al problema.

²⁹Utilizamos unidades para las que $\hbar = c = 1$

³⁰ Utilizamos la siguiente representación del álgebra de Clifford:

$$\gamma^0 = \sigma^3, \gamma^1 = -i\sigma^2, \gamma^2 = i\sigma^1, \quad (671)$$

donde σ^i , $i = 1, 2, 3$ son las matrices de Pauli.

Debido a la simetría rotacional del problema, el operador D conmuta con el generador de las rotaciones $J = -i\partial_\theta + \sigma^3/2$, por lo que buscaremos autoestados simultáneos de ambos operadores. Las autofunciones del operador J están dadas por,

$$\psi(x, \theta) = \begin{pmatrix} e^{il\theta} \phi(x) \\ e^{i(l+1)\theta} \chi(x) \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2 \otimes \mathbf{L}_2(\mathbb{R}^2, x dx d\theta), \quad l \in \mathbb{Z}, \quad (673)$$

siendo $l + 1/2$ los correspondientes autovalores. De modo que los subespacios generados por las funciones (673) son invariantes ante la acción de D . La restricción D_l de D a cada uno de estos subespacios está dada por,

$$D_l = \begin{pmatrix} 0 & i \left(\partial_x + \frac{1-\alpha}{x} - x \right) \\ i \left(\partial_x + \frac{\alpha}{x} + x \right) & 0 \end{pmatrix}, \quad (674)$$

con,

$$\alpha = \kappa - l, \quad (675)$$

que actúa sobre funciones de la coordenada x de dos componentes,

$$\psi(x) = \begin{pmatrix} \phi(x) \\ \chi(x) \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2 \otimes \mathbf{L}_2(\mathbb{R}^+, x dx). \quad (676)$$

Determinaremos las extensiones autoadjuntas y las propiedades espectrales del operador D_l separadamente para $l > 0$, $l < 0$ y $l = 0$. Antes de ello, será útil señalar que las soluciones de la ecuación diferencial

$$(D_l - \lambda) \begin{pmatrix} \phi(x) \\ \chi(x) \end{pmatrix} = 0, \quad (677)$$

de cuadrado integrable en $[1, \infty]$ están dadas por,

$$\begin{pmatrix} \phi(x) \\ \chi(x) \end{pmatrix} = e^{-x^2/2} x^{-\alpha} \begin{pmatrix} U(-\lambda^2/4; 1-\alpha; x^2) \\ \frac{i\lambda}{2} x U(1-\lambda^2/4; 2-\alpha; x^2) \end{pmatrix}. \quad (678)$$

Los valores de λ quedan determinados por el comportamiento de las autofunciones en el origen.

- Si $l > 0$ se puede probar que D_l es esencialmente autoadjunto de modo que la única extensión autoadjunta que admite es su clausura. Como en este caso $\alpha < 0$, la condición de integrabilidad del cuadrado de la componente $\chi(x)$, dada por (678), determina el espectro,

$$\lambda_n := \pm 2\sqrt{n}, \quad \text{con } n = 1, 2, 3, \dots \quad (679)$$

La función $\zeta_l(s)$ del operador D_l para $l > 0$ resulta entonces,

$$\zeta_l(s) = 2^{-s} (1 + e^{-i\pi s}) \zeta_R(s/2), \quad (680)$$

siendo $\zeta_R(s)$ la función- ζ de Riemann.

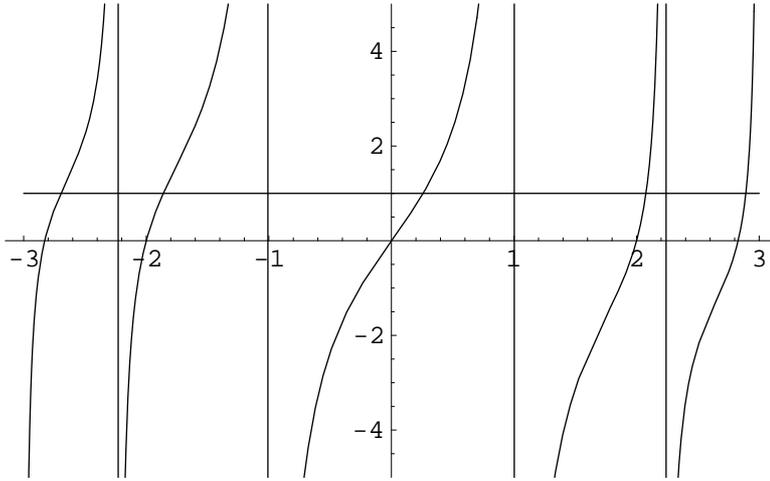


Figura 7: Gráfica de $G(\lambda)$ para $\kappa = 1/4$. Las intersecciones con la línea horizontal determinan el espectro de la extensión autoadjunta correspondiente, en este caso dada por $\beta = 4$.

- Si $l < 0$ se verifica también que D_l es esencialmente autoadjunto. En este caso, $\alpha > 1$ y la condición de integrabilidad del cuadrado de la componente $\phi(x)$, dada por (678), determina el espectro,

$$\lambda_n := \pm 2\sqrt{n + |l| + \kappa}, \quad \text{con } n = 0, 1, 2, \dots \quad (681)$$

La función $\zeta_l(s)$ del operador D_l para $l < 0$ está dada por,

$$\zeta_l(s) = 2^{-s} (1 + e^{-i\pi s}) \zeta_H(s/2, \kappa + |l|), \quad (682)$$

siendo $\zeta_H(s, q)$ la función- ζ de Hurwitz.

- Finalmente, si $l = 0$ entonces D_l admite una familia de extensiones autoadjuntas que designaremos por D^β caracterizadas por un parámetro real β . El espectro de la extensión D^β está dado por las soluciones de la siguiente ecuación trascendente,

$$G(\lambda) := \lambda \frac{\Gamma(\kappa - \lambda^2/4)}{\Gamma(1 - \lambda^2/4)} = 4\beta^{-1}. \quad (683)$$

Las soluciones λ_n de la ecuación (683) permiten definir la función $\zeta^\beta(s)$ correspondiente a este subespacio invariante,

$$\zeta^\beta(s) := \sum_{\lambda_n} \lambda_n^{-s}. \quad (684)$$

En la siguiente sección describiremos su estructura de polos.

VII.2.2. La función $\zeta^\beta(s)$

Representación integral de la función $\zeta^\beta(s)$

Los espectro del operador D^β está dado por los ceros de la función entera,

$$f(\lambda) := \frac{\lambda}{\Gamma\left(\kappa - \frac{\lambda^2}{4}\right)} + \frac{\beta}{\Gamma\left(-\frac{\lambda^2}{4}\right)}. \quad (685)$$

Como los ceros λ_n de $f(\lambda)$ son simples, la función- ζ parcial,

$$\zeta_+^\beta(s) := \sum_{\lambda_n > 0} \lambda_n^{-s}, \quad (686)$$

está dada por,

$$\zeta_+^\beta(s) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}} \partial_\lambda \log f(\lambda) \lambda^{-s} d\lambda, \quad (687)$$

siendo \mathcal{C} una curva que encierra a los ceros positivos de $f(\lambda)$ en sentido antihorario. Dado que estos crecen como $\lambda_n \sim \sqrt{n}$ la función ζ_+^β es analítica para $\Re(s) > 1$.

Para estos valores de s la integral en (687) puede realizarse a lo largo de la curva $\mathcal{C}_+ \cup \mathcal{C}_0 \cup \mathcal{C}_-$, donde \mathcal{C}_+ representa los puntos del eje imaginario desde $i\infty$ hasta i , \mathcal{C}_0 es una curva que une i con $-i$ y cuyos puntos tienen parte real positiva y menor que el primer cero de $f(\lambda)$. Finalmente, \mathcal{C}_- representa los puntos del eje imaginario desde $-i$ hasta $-i\infty$. Luego de una integración por partes la función $\zeta_+^\beta(s)$ toma entonces la forma,

$$\zeta_+^\beta(s) = \frac{s}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}_+ \cup \mathcal{C}_0 \cup \mathcal{C}_-} \log f(\lambda) \lambda^{-s-1} d\lambda, \quad (688)$$

La estructura de polos de $\zeta_+^\beta(s)$ está determinada por las integrales a lo largo de las curvas \mathcal{C}_\pm en la ecuación (688):

$$\frac{s}{2\pi i} \left[\int_{i\infty}^i \log f(\lambda) \lambda^{-s-1} d\lambda + \int_{-i}^{i\infty} \log f(\lambda) \lambda^{-s-1} d\lambda \right]. \quad (689)$$

Nótese asimismo que el residuo de las integrales de la expresión (689) en $s = 0$ es proporcional a $\zeta_+^\beta(0)$.

Estudiaremos entonces el comportamiento asintótico de $\log f(\lambda)$ para λ sobre el eje imaginario y $|\lambda| \rightarrow \infty$.

Desarrollos asintóticos

En adelante, consideraremos solamente, por simplicidad, el caso $0 < \kappa < 1/2$. En primer lugar debemos determinar el comportamiento asintótico de la función,

$$\log f(\lambda) = \log \lambda - \log \Gamma\left(\kappa - \frac{\lambda^2}{4}\right) + \log \left\{ 1 + \beta \lambda^{-1} \frac{\Gamma\left(\kappa - \frac{\lambda^2}{4}\right)}{\Gamma\left(-\frac{\lambda^2}{4}\right)} \right\}. \quad (690)$$

El desarrollo asintótico de las funciones que intervienen en la ecuación (690) para $\lambda = e^{\pm i\frac{\pi}{2}}x$ con $x \in \mathbb{R}^+$ y $x \rightarrow \infty$ está dado por,

$$-\log \Gamma(\kappa + x^2/4) \sim \left(-\frac{x^2}{4} + \frac{1}{2} - \kappa\right) \left(2 \log x + \log\left(1 + \frac{4\kappa}{x^2}\right) - \log 4\right) + \frac{x^2}{4} + \kappa - \log \sqrt{2\pi} - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{B_{2m}}{2m(2m-1)} \left(\kappa + \frac{x^2}{4}\right)^{-2m+1}, \quad (691)$$

$$\frac{\Gamma\left(\kappa + \frac{x^2}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{x^2}{4}\right)} \sim \left(\frac{x^2}{4}\right)^{\kappa} \sum_{n=0}^{\infty} a_n(\kappa) x^{-2n}, \quad (692)$$

$$\log \left\{ 1 + \beta e^{\mp i\frac{\pi}{2}} x^{-1} \frac{\Gamma\left(\kappa + \frac{x^2}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{x^2}{4}\right)} \right\} \sim - \sum_{N=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^N}{N} 4^{-\kappa N} b_{N,n}(\kappa) \beta^N e^{\mp i\frac{\pi}{2}N} x^{-N(1-2\kappa)-2n}, \quad (693)$$

donde los coeficientes $a_n(\kappa)$ y $b_{N,n}(\kappa)$ están definidos por,

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(\kappa) x^{-2n} := \exp \left\{ -\kappa + \left(\frac{x^2}{4} + \kappa - \frac{1}{2}\right) \log\left(1 + \frac{4\kappa}{x^2}\right) + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{4^{2m-1} B_{2m}}{2m(2m-1)} \left[\left(1 + \frac{4\kappa}{x^2}\right)^{-2m+1} - 1 \right] x^{-4m+2} \right\}, \quad (694)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_{N,n}(\kappa) x^{-2n} := \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n(\kappa) x^{-2n}\right)^N.$$

VII.2.3. Estructura de polos de la función $\zeta^{\beta}(s)$

En esta sección reemplazaremos los desarrollos asintóticos (691), (693) y (694) en la expresión (689) para determinar la estructura de polos de la función $\zeta_+^{\beta}(s)$ así como también su valor en $s = 0$.

En primer lugar, si sustituímos en la expresión (689) el primer término $\log \lambda$ del desarrollo (690) obtenemos,

$$\begin{aligned} \frac{s}{2\pi i} (-i) \int_1^{\infty} x^{-s-1} \left(e^{-i\frac{\pi}{2}(s+1)} \left[\log x + i\frac{\pi}{2} \right] + e^{i\frac{\pi}{2}(s+1)} \left[\log x - i\frac{\pi}{2} \right] \right) dx \\ = -\frac{\cos[\pi/2(s+1)]}{\pi s} - \frac{1}{2} \sin[\pi/2(s+1)], \end{aligned} \quad (695)$$

que es una función entera que se anula en $s = 0$.

VII.2 EL PROBLEMA DE AHARONOV-BOHM

Consideremos ahora las potencias pares x^{-2n} , con $n \in \mathbb{Z}$, en el desarrollo asintótico de $\log f(e^{\pm i \frac{\pi}{2}} x)$ (véase la ecuación (691).) Reemplazando estas potencias en el integrando de la expresión (689) obtenemos,

$$\frac{s}{2\pi i} (-i) 2 \cos [\pi/2(s+1)] \int_1^\infty x^{-s-1-2n} = -\frac{s \cos [\pi/2(s+1)]}{\pi (s+2n)}, \quad (696)$$

que es también una función entera que se anula en $s = 0$.

El valor de la función $\zeta_+^\beta(s)$ en $s = 0$ está dado por el primer término del desarrollo (691),

$$\left(-\frac{x^2}{4} + \frac{1}{2} - \kappa\right) 2 \log x. \quad (697)$$

En efecto, si reemplazamos la expresión (697) en (689) obtenemos,

$$\begin{aligned} \frac{s}{2\pi i} (-i) 2 \cos [\pi/2(s+1)] \int_1^\infty \left(-\frac{x^2}{4} + \frac{1}{2} - \kappa\right) 2 \log x x^{-s-1} dx = \\ = \frac{s}{2\pi} \cos [\pi/2(s+1)] \frac{1}{(s-2)^2} - (1-2\kappa) \frac{\cos [\pi/2(s+1)]}{\pi s}, \end{aligned} \quad (698)$$

cuyo valor en $s = 0$ es $1/2 - \kappa$. Además la cantidad (698) presenta un polo simple en,

$$s = 2, \quad (699)$$

con residuo,

$$1/2. \quad (700)$$

Finalmente, las contribuciones correspondientes a los términos del desarrollo (693) a las integrales (689) están dadas por,

$$\begin{aligned} \frac{s}{2\pi i} (-i) \beta^N A_{N,n}(\kappa) 2 \cos [\pi/2(s+1+N)] \int_1^\infty x^{-s-1-N-2n+2N\kappa} dx = \\ = -\frac{s}{\pi} \beta^N A_{N,n}(\kappa) \frac{\cos [\pi/2(s+1+N)]}{s+N(1-2\kappa)+2n}, \end{aligned} \quad (701)$$

siendo

$$A_{N,n}(\kappa) := -\frac{(-1)^N}{N} 4^{-\kappa N} b_{N,n}(\kappa). \quad (702)$$

La expresión (701) se anula en $s = 0$ y presenta un polo simple en,

$$s_{N,n} = -N(1-2\kappa) - 2n, \quad N = 1, 2, 3, \dots \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (703)$$

con residuo,

$$(-1)^n \frac{N(1-2\kappa) + 2n}{\pi} \beta^N A_{N,n}(\kappa) \sin \pi N \kappa. \quad (704)$$

Valor de $\zeta_+^\beta(s)$ en $s = 0$

Los cálculos de esta sección indican que la única contribución a la cantidad $\zeta_+^\beta(0)$ está dada por el primer término de la ecuación (698). En consecuencia,

$$\zeta_+^\beta(0) = \frac{1}{2} - \kappa. \quad (705)$$

Una extensión autoadjunta particular

El espectro de la extensión correspondiente a $\beta = 0$ está dado por (véase la ecuación (685)),

$$\lambda_n = \pm 2\sqrt{n + \kappa}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (706)$$

Por consiguiente, las función- ζ parcial $\zeta_+^0(s)$ está dada, para $\Re(s) > 2$, por,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n^{-s} = 2^{-s} \zeta_H(s/2, \kappa), \quad (707)$$

donde $\zeta_H(s, q)$ es la función- ζ de Hurwitz. En consecuencia, $\zeta_+^0(s)$ presenta un único polo simple en $s = 2$ con residuo $1/2$ y su valor en $s = 0$ está dado por $\zeta_H(0, \kappa) = 1/2 - \kappa$, en acuerdo con las ecuaciones (699), (700), (703), (704) y (705).

VII.2.4. Desarrollo asintótico de la traza del heat-kernel de D^2

Debido a la no compacidad de la variedad de base, el heat-kernel e^{-tD^2} correspondiente al cuadrado del hamiltoniano de Dirac D no es tipo traza. En efecto, puede verse de la ecuación (679) que la suma de las contribuciones correspondientes a los subespacios de momento angular $l > 0$ es divergente.

En consecuencia, calcularemos la traza de la diferencia $e^{-tD^2} - e^{-t\underline{D}^2}$, donde \underline{D}^2 es el cuadrado del operador de Dirac \underline{D} correspondiente a $\kappa = 0$.

Contribuciones de los subespacios con $l \neq 0$

Como los espectros correspondientes a $l > 0$ no dependen de κ , estos subespacios no contribuyen a la traza del operador $e^{-tD^2} - e^{-t\underline{D}^2}$. Por su parte, las contribuciones de los subespacios correspondientes a $l < 0$ están dadas por,

$$\begin{aligned} 2 \sum_{l < 0} \sum_{n=0}^{\infty} (e^{-4t(n+|l|+\kappa)} - e^{-4t(n+|l|)}) &= 2 \sum_{m=1}^{\infty} m (e^{-4t(m+\kappa)} - e^{-4tm}) = \\ &= -e^{-2\kappa t} \frac{\sinh 2\kappa t}{\sinh^2 2t}. \end{aligned} \quad (708)$$

La expresión (708) admite un desarrollo asintótico para $t \rightarrow 0^+$ en potencias enteras de t cuyos primeros términos son,

$$-\frac{\kappa}{2} t^{-1} + \kappa^2 + O(t). \quad (709)$$

Contribuciones del subespacio $l = 0$

De acuerdo con la ecuación (685) los valores absolutos de los autovalores negativos correspondientes a la extensión caracterizada por β son los autovalores positivos correspondientes a la extensión caracterizada por $-\beta$. En consecuencia, la función- ζ del operador $(D^\beta)^2$ está dada por,

$$\zeta_{(D^\beta)^2}^\beta(s) = \zeta_+^\beta(2s) + \zeta_+^{-\beta}(2s). \quad (710)$$

Por consiguiente, de acuerdo con las ecuaciones (699), (700), (703) y (704) la función $\zeta_{(D^\beta)^2}^\beta(s)$ presenta polos simples en,

$$s = 1, \quad (711)$$

con residuo,

$$1/2, \quad (712)$$

y en,

$$s_{N,n} = -N(1 - 2\kappa) - n, \quad N = 1, 2, 3, \dots \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (713)$$

con residuos,

$$(-1)^n \frac{2N(1 - 2\kappa) + 2n}{\pi} \beta^{2N} A_{2N,n}(\kappa) \sin(2\pi N\kappa). \quad (714)$$

Asimismo,

$$\zeta_{-(D^\beta)^2}^\beta(0) = 1 - 2\kappa. \quad (715)$$

Finalmente, utilizando el desarrollo asintótico de la expresión (708) y las ecuaciones (711-715) obtenemos, en virtud de las relaciones (247), (249), (251) y (252) el desarrollo asintótico,

$$\begin{aligned} \text{Tr} \left(e^{-tD^2} - e^{t\overline{D}^2} \right) &\sim -\frac{\kappa}{2} t^{-1} + \kappa(\kappa - 2) + \sum_{N=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \beta^{2N} C_{N,n}(\kappa) t^{N(1-2\kappa)+n} + \\ &+ \sum_{k=0}^{\infty} C_k t^k, \quad (716) \end{aligned}$$

donde,

$$C_{N,n}(\kappa) := (-1)^n \frac{2}{\pi} [N(1 - 2\kappa) + n] \Gamma(-N(1 - 2\kappa) - n) A_{2N,n}(\kappa) \sin(2\pi N\kappa), \quad (717)$$

y las potencias enteras del último término de la expresión (716) provienen del desarrollo asintótico de (708).

Parte VIII
Conclusiones

Wir müssen wissen. Wir werden wissen.

David Hilbert.

*(Dicho en 1930 en Königsberg,
ahora en su epitafio en Göttingen.)*

Ya hemos señalado que en Teoría Cuántica de Campos las primeras correcciones cuánticas pueden describirse en términos de funciones espectrales asociadas a operadores diferenciales que aparecen en el término cuadrático de las acciones de los campos.

Por ejemplo, la información relevante para el cálculo de la acción efectiva al orden de 1-loop puede obtenerse a partir del desarrollo asintótico de la traza del heat-kernel para pequeños valores de su argumento.

De ese modo, el estudio del desarrollo asintótico del heat-kernel permite implementar un mecanismo de regularización de las constantes desnudas del lagrangiano, describir las divergencias del propagador en puntos coincidentes y determinar las funciones β de la teoría, la energía de Casimir, o cantidades de carácter topológico como anomalías. Asimismo, mediante la determinación de la función de partición es posible evaluar cantidades físicas asociadas a campos a temperatura finita. Algunas de estas relaciones han sido brevemente descritas en la sección I.2.1.

Cuando los operadores en consideración son simétricos en cierto dominio denso, interesa determinar dominios más amplios donde resulten además autoadjuntos. Esto conduce en general a considerar una variedad \mathcal{M} de condiciones de contorno admisibles que permiten definir completamente el problema.

Si los coeficientes del operador diferencial A de orden d son infinitamente derivables, la variedad de base M es de dimensión m es compacta y se imponen condiciones de contorno locales apropiadas sobre su borde, entonces la traza del heat-kernel admite un desarrollo asintótico en potencias de t cuyos exponentes están dados por $(n-m)/d$, donde $n = 0, 1, 2, \dots$. De ese modo, estos exponentes están determinados por el orden del operador y la dimensión de la variedad. La dependencia de este desarrollo con los coeficientes del operador diferencial, la forma de la variedad y las condiciones de contorno (locales) se encuentra contenida en los coeficientes de dichas potencias de t . Estos coeficientes son integrales sobre M y ∂M de invariantes geométricos locales. La derivación de este resultado ha sido presentada en el Capítulo IV.

Estas propiedades del desarrollo asintótico de $\text{Tr } e^{-tA}$ pueden no ser válidas bajo otras hipótesis. En efecto, es sabido que si A es un operador pseudodiferencial, o si se imponen

condiciones de contorno no locales del tipo de Atiyah-Patodi-Singer [6], entonces el desarrollo asintótico puede presentar logaritmos de t [73, 74, 75, 76, 77]. Por otra parte, si la variedad de base tiene una singularidad cónica entonces los exponentes de las potencias de t pueden depender del ángulo de deficiencia [93].

En esta Tesis hemos demostrado que la traza del heat-kernel correspondiente a un operador diferencial con coeficientes singulares presenta en general potencias de t cuyos exponentes dependen de las características de dicha singularidad.

En el Capítulo V hemos estudiado el operador de Schrödinger en una dimensión,

$$A := -\partial_x^2 + \frac{\nu^2 - 1/4}{x^2} + V(x), \quad (718)$$

definido sobre $\mathcal{D}(A) := \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^+)$, donde $V(x)$ es una función analítica de $x \in \mathbb{R}^+$ acotada inferiormente.

En primer lugar (véase la Sección V.3.1) hemos mostrado que, para $0 \leq \nu < 1$, el operador A admite una familia de extensiones autoadjuntas A^θ , donde θ es un parámetro que caracteriza la condición de contorno sobre la singularidad en $x = 0$.

Hemos luego señalado que sólo dos de estas extensiones autoadjuntas, que corresponden a $\theta = 0, \infty$, definen condiciones de contorno sobre la singularidad que resultan invariantes de escala.

Los resultados de la Sección V.4.1 indican que la traza del operador $e^{-tA^\theta} - e^{-tA^\infty}$ admite un desarrollo asintótico de la forma,

$$\mathrm{Tr}(e^{-tA^\theta} - e^{-tA^\infty}) \sim \sum_{n=1}^{\infty} a_n(A) t^{n/2} + \sum_{N=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} b_{N,n}(A) \theta^N t^{\nu N + n/2 - 1/2}. \quad (719)$$

Los coeficientes $a_n(A), b_{N,n}(A)$ dependen de la forma del potencial $V(x)$ y de ν pero no del parámetro θ que caracteriza la condición de contorno. Hemos presentado una fórmula de recurrencia para la determinación de estos coeficientes.

En particular, el desarrollo asintótico (719) presenta potencias de t cuyos exponentes dependen del parámetro ν . Este es uno de los resultados centrales de esta Tesis cuyo único antecedente, a nuestro saber, se encuentran en el trabajo de E. Mooers [93], donde se obtiene un término proporcional a t^ν en el desarrollo asintótico del heat-kernel de las extensiones autoadjuntas del laplaciano sobre una variedad con una singularidad cónica, estando ν relacionado en ese caso con el ángulo de deficiencia de la variedad.

Por otra parte, señalemos que este resultado implica otras propiedades espectrales que no tienen los operadores con coeficientes regulares: la función- ζ del operador diferencial presenta polos simples en posiciones dependientes de ν , la traza de la resolvente $(A^\theta -$

$\lambda)^{-1}$ admite un desarrollo asintótico para grandes valores de $|\lambda|$ en potencias de λ cuyos exponentes dependen de ν y el comportamiento asintótico de los autovalores $\{\lambda_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ para grandes valores de n presenta potencias de n con exponentes también dependientes de ν (véase la Sección IV.2.1.)

Posteriormente, en la Sección VI.1 hemos ilustrado el desarrollo (719) mediante la resolución explícita del operador (718) para el caso $V(x) = x^2$. Para ello, hemos determinado la clausura del operador diferencial, sus extensiones autoadjuntas y hemos analizado una representación integral de la función- ζ .

Hemos también extendido la expresión (719) al caso del un operador de la forma (718), pero definido sobre la variedad de base compacta $[0, 1] \subset \mathbb{R}^+$ (véase la Sección V.4.2.) En este caso las extensiones autoadjuntas que hemos analizado están caracterizadas por dos parámetros θ y β que describen la condición de contorno sobre la singularidad en $x = 0$ y una condición local en $x = 1$, respectivamente.

Los valores $\theta = 0, \infty$ definen condiciones de contorno que son invariantes ante una transformación de escala en las proximidades de $x = 0$. Para estas extensiones la traza del heat-kernel admite un desarrollo en potencias de t cuyos exponentes están dados por $n/2$ con $n = -1, 0, 1, 2, \dots$, al igual que para un operador de orden 2 con coeficientes regulares en una variedad de base compacta de dimensión 1.

Sin embargo, el desarrollo asintótico correspondiente a las restantes extensiones autoadjuntas presenta potencias de t con exponentes dependientes de ν . En la Sección VI.2 se ha considerado a modo de ejemplo el operador (718) para el caso $V(x) = 0$.

Permítasenos resumir estos resultados mediante algunas consideraciones cualitativas. Nótese que el coeficiente singular del operador (718), dominante frente a $V(x)$ en proximidades de $x = 0$, se transforma de la misma manera ante una transformación de escala que el término de orden 2. Por otra parte, las extensiones autoadjuntas que definen condiciones de contorno que no son invariantes ante transformaciones de escala introducen un parámetro θ cuya dimensión corresponde a una potencia de unidad de longitud con un exponente dependiente del parámetro ν . Esto está relacionado con la dependencia de ν de los exponentes de las potencias de t en el desarrollo asintótico de la traza del heat kernel.

Esto sugiere la posibilidad de obtener el mismo tipo de desarrollo asintótico en relación con operadores de primer orden con un coeficiente proporcional a la inversa de la distancia al punto de la singularidad.

En efecto, en la sección VII.1 hemos considerado el operador de Dirac,

$$D = \begin{pmatrix} 0 & \partial_x + \frac{\alpha}{x} \\ -\partial_x + \frac{\alpha}{x} & 0 \end{pmatrix}, \quad (720)$$

definido sobre $\mathcal{D}(D) := \mathcal{C}_0^\infty(0, 1) \otimes \mathbb{C}^2$. Si se imponen ciertas condiciones locales fijas en $x = 1$, sus extensiones autoadjuntas para valores de $\alpha \in (-1/2, 1/2)$ resultan caracterizadas por un único parámetro β que describe la condición de contorno sobre la singularidad en $x = 0$. Existen, en particular, dos extensiones autoadjuntas correspondientes a $\beta = 0, \infty$ que definen condiciones de contorno invariantes de escala.

La traza de la resolvente correspondiente a las restantes extensiones autoadjuntas, que rompen la invarianza de escala, admite un desarrollo asintótico en potencias de λ con exponentes que dependen del parámetro α y coeficientes que dependen de β .

Finalmente, en la sección VII.2, hemos analizado en este contexto un problema que ha sido estudiado en sus muy diversos aspectos. Consideramos el hamiltoniano de Dirac D de una partícula de spin $1/2$, de masa nula y con carga e en $2+1$ dimensiones en presencia de un campo magnético homogéneo B y de un flujo de Aharonov-Bohm Φ en el origen $r = 0$.

El coeficiente de D proveniente del campo de gauge correspondiente al campo magnético B tiende a ∞ cuando $r \rightarrow \infty$, de modo que el operador H tiene un espectro discreto. Por su parte, el coeficiente proveniente del campo de gauge que representa el flujo singular rompe la simetría traslacional característica del problema de Landau, presentando una singularidad en $r = 0$.

El sistema conserva, no obstante, la invarianza rotacional, por lo que los subespacios característicos de momento angular $l + 1/2$, con $l \in \mathbb{Z}$, son subespacios invariantes del hamiltoniano D .

Si $0 < \Phi < 2\pi/e$, las restricciones del hamiltoniano a los subespacios correspondientes a $l \neq 0$ admiten una única extensión autoadjunta, en tanto que la restricción al subespacio caracterizado por $l = 0$ admite una familia de extensiones autoadjuntas caracterizadas por un parámetro que describe el comportamiento de la función de onda en las proximidades del flujo singular.

Hemos calculado, para $0 < \Phi < \pi/e$, la estructura de singularidades de la función- ζ correspondiente a la restricción del hamiltoniano a ese subespacio particular, encontrando que presenta polos simples en los puntos,

$$s_{N,n} = -N \left(1 - \frac{e\Phi}{\pi} \right) - 2n, \quad N = 1, 2, 3, \dots \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (721)$$

cuyos residuos dependen de la extensión autoadjunta considerada.

La existencia de estos polos determina la presencia de potencias de t con exponentes dependientes de Φ en el desarrollo asintótico de la traza del heat-kernel correspondiente al cuadrado del hamiltoniano de Dirac.

Con respecto a las implicaciones de estos resultados, mencionemos en relación con este problema particular (pero haciendo referencia a todos los operadores con coeficientes singulares analizados) que esta dependencia con Φ se traslada al comportamiento de las divergencias a 1-loop. En particular, el propagador $H^{-1}(x, x')$ presenta un desarrollo asintótico para $x \rightarrow x'$ en potencias de $|x - x'|$ con exponentes dependientes del flujo singular Φ . Resulta también de interés estudiar la renormalización de este tipo de teorías en las que se presentan potencias del cutoff que dependen de la cantidad Φ .

Otro ejemplo de interés que se propone considerar en el futuro consiste en el estudio de campos cuánticos de distintos spines a temperatura finita en proximidades del horizonte interno de un agujero negro. En este problema, la energía libre al orden de 1-loop se obtiene a partir de la función de partición calculada mediante estos métodos. Para el caso de un agujero negro de Schwarzschild, la variedad euclídea resultante presenta, en proximidades del horizonte interno, una singularidad cónica cuyo ángulo de deficiencia está determinado por la temperatura.

Los resultados presentados en esta Tesis sugieren considerar las funciones espectrales de las distintas extensiones autoadjuntas del operador diferencial relevante, que tiene coeficientes singulares, a fin de estudiar el comportamiento de cantidades físicas como la entropía.

Para finalizar, mencionaremos otros dos resultados de esta Tesis. En primer lugar, señalemos que el resultado (719) fue obtenido a partir de una técnica distinta de la utilizada para estudiar el desarrollo asintótico de la traza del heat-kernel de operadores con coeficientes regulares. Una de las dificultades en este sentido consiste en que los coeficientes del desarrollo para el caso regular son integrales sobre la variedad y su borde de los invariantes construidos en términos de los coeficientes del operador diferencial, el tensor de curvatura de la variedad, la curvatura extrínseca del borde y los operadores que definen las condiciones de contorno. Si los coeficientes del operador diferencial presentan singularidades entonces estas integrales no resultan convergentes.

Como ya hemos mencionado, las condiciones de contorno que definen un problema en mecánica cuántica sobre una variedad con borde o en presencia de singularidades están determinadas por las extensiones autoadjuntas del hamiltoniano. Esto garantiza la unitariedad de la teoría. Las distintas extensiones autoadjuntas representan las propiedades microscópicas del borde o de la singularidad.

Para derivar el desarrollo asintótico (719) hemos aprovechado la existencia de dos extensiones autoadjuntas, definidas por condiciones de contorno invariantes de escala, para las cuales los coeficientes $b_{N,n}$ en (719) se anulan.

El paso siguiente consistió en establecer una relación entre las resolventes correspondientes a distintas extensiones autoadjuntas del operador diferencial con coeficientes singulares (véase la Sección V.3.2.) Esta relación representa una generalización de la fórmula de Krein, válida para operadores con coeficientes regulares (véase la Sección V.2.)

En el Capítulo III hemos considerado un problema en mecánica cuántica supersimétrica definido por un superpotencial singular en el cual las condiciones de contorno cumplen un rol esencial con respecto a las simetrías del hamiltoniano. Los operadores diferenciales analizados constituyen una realización formal del álgebra de $N=2$ SUSY en $0+1$ dimensiones. Sin embargo, la validez de esta realización está limitada por la determinación de dominios de definición apropiados.

Hemos estudiado las extensiones autoadjuntas del hamiltoniano y de las supercargas y concluido que existen sólo dos extensiones cuyas condiciones de contorno, invariantes de escala, definen una realización del álgebra de la SUSY con dos supercargas.

Para una de ellas, el estado fundamental del hamiltoniano tiene energía nula y el resto del espectro es doblemente degenerado, de modo que la SUSY es explícita. Por el contrario, la otra extensión presenta un espectro doblemente degenerado con un estado fundamental de energía estrictamente positiva y, en consecuencia, ruptura espontánea (dinámica) de la SUSY.

Para el resto de las extensiones autoadjuntas sólo es posible definir una única supercarga, y la SUSY está dinámicamente rota como consecuencia de que el estado fundamental tiene energía positiva y el espectro es no degenerado.

Este resultado resuelve la controversia originada a partir del trabajo de A. Jevicki y J.P. Rodrigues [80] en el que proponen un mecanismo de ruptura espontánea de la supersimetría mediante la presencia de potenciales singulares. Esta propuesta recibió cuestionamientos basados en el estudio de una regularización que preserva la supersimetría [43, 41, 65].

El problema tratado en el Capítulo III muestra que la variedad de condiciones de contorno admisibles sobre la singularidad del superpotencial proveen un mecanismo de ruptura de la SUSY en Mecánica Cuántica Supersimétrica.

Parte IX
Problemas de interés

*El número de páginas de este libro es exactamente infinito.
Ninguna es la primera; ninguna, la última.
No sé por qué están numeradas de ese modo arbitrario.
Acaso para dar a entender que
los términos de una serie infinita admiten cualquier número.
Jorge L. Borges (El Libro de Arena.)*

IX.1. Método Functorial

En este último capítulo consideraremos un procedimiento para obtener el desarrollo asintótico de la traza del heat-kernel de operadores diferenciales singulares distinto del desarrollado en esta Tesis. Este procedimiento carece de una justificación completa por lo que simplemente supondremos la validez de la generalización de un método ampliamente utilizado en el caso de operadores diferenciales regulares [112, 113, 114, 66, 123].

Consideremos primeramente un operador diferencial autoadjunto de segundo orden A positivo definido con coeficientes \mathcal{C}^∞ definido sobre secciones de un fibrado vectorial sobre una variedad de base M compacta, de dimensión m y con borde suave ∂M y sujeto a condiciones de contorno locales. La traza del operador e^{-tA} admite un desarrollo asintótico para pequeños valores de t dado por las ecuaciones (9-17).

Los coeficientes $c_n(A)$, $c_n^b(A)$ de estas ecuaciones son integrales de combinaciones lineales de todos los invariantes geométricos de la dimensión apropiada; de manera que están determinados por los coeficientes del operador diferencial A , el tensor de curvatura de Riemann de la variedad M , el tensor curvatura extrínseca del borde ∂M y los operadores de borde que definen la condición de contorno local.

Los invariantes relacionados con cada coeficiente $c_n(A)$, $c_n^b(A)$ pueden determinarse analizando las dimensiones de las cantidades involucradas. Consideremos, por ejemplo, un operador de Schrödinger A caracterizado por un potencial $V(x)$. Los coeficientes $c_0(A)$ y $c_1(A)$ tiene dimensiones L^m y L^{m-1} , respectivamente, por lo que los coeficientes $c_0(A, x)$ y $c_1^b(A)$ son adimensionales y, por consiguiente, constantes. De modo que los coeficientes $c_0(A)$ y $c_1(A)$ son proporcionales a los volúmenes de la variedad M y del borde ∂M , respectivamente.

El coeficiente $c_2(A)$ tiene dimensión L^{m-2} , por lo que los coeficientes $c_2(A, x)$ y $c_2^b(A, x)$ tienen dimensiones L^{-2} y L^{-1} , respectivamente. En consecuencia, $c_2(A, x)$ es

una combinación lineal con coeficientes constantes del tensor de curvatura escalar \mathcal{R} y del potencial $V(x)$. El coeficiente $c_2^b(A, x)$, por su parte, es una combinación lineal con coeficientes constantes de la traza del tensor curvatura extrínseca y del operador de borde.

De esta manera, una vez determinados los invariantes geométricos en distintas dimensiones, cada cantidad $c_n(A)$ se expresa como una integral de una combinación lineal de los invariantes correspondientes cuyos coeficientes resultan ser cantidades universales, independientes de los coeficientes del operador, de la variedad y de las condiciones locales de contorno. La resolución de problemas particulares cobra entonces especial relevancia en el estudio del desarrollo asintótico de la traza del heat-kernel de operadores regulares pues permite, en general, determinar algunos de los coeficientes universales que expresan las cantidades $c_n(A)$ en términos de los invariantes geométricos.

Esta técnica no puede utilizarse, *a priori*, en el caso de operadores diferenciales con coeficientes singulares como los considerados en esta Tesis. La ecuación (10) representa a las cantidades $c_n(A)$ en términos de integrales de cantidades locales que son combinaciones lineales de los invariantes geométricos, entre los que se cuentan los coeficientes del operador diferencial. Si el operador posee coeficientes singulares, sus potencias y derivadas no serán, en general, integrables y los resultados mencionados pierden validez.

No obstante, generalizaremos, a continuación, estas ideas con el propósito de estudiar los coeficientes del desarrollo asintótico del heat-kernel para un operador diferencial singular. Los resultados sugieren la posibilidad de extender la técnica de determinar los coeficientes universales al caso de operadores singulares.

Consideremos el operador,

$$A = -\partial_x^2 + \frac{\kappa}{x^2} + V(x). \quad (722)$$

Las dimensiones de las cantidades involucradas están dadas por,

$$\begin{aligned} [A] &= L^{-2}, & [\kappa] &= [\nu] = L^0, & [V(x)] &= L^{-2}, \\ [\theta] &= L^{-2\nu}, & [z] &= L^{-2}, & [t] &= L^2. \end{aligned} \quad (723)$$

Las ecuación (367) indica que la traza de la diferencia de las resolventes correspondientes a las extensiones A^0 y A^∞ admite un desarrollo asintótico de la forma,

$$\text{Tr} \{(A^0 + z)^{-1} - (A^\infty + z)^{-1}\} \sim \sum_{n=2}^{\infty} \alpha_n^V(\nu) z^{-n/2}. \quad (724)$$

Esto implica, de acuerdo con las ecuaciones (249) y (250), el siguiente desarrollo asintótico,

$$\text{Tr} \{e^{-tA^0} - e^{-tA^\infty}\} \sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n(A) t^{n/2}, \quad (725)$$

donde coeficientes $a_n(A) = \alpha_{n+2}^V(\nu)/\Gamma(n/2 + 1)$ y sus dimensiones están dadas por,

$$[a_n(A)] = L^{-n}. \quad (726)$$

Si los coeficientes $a_n(A)$ sólo dependen del parámetro adimensional ν y de potencias de las derivadas del potencial $V(x)$ en el borde de la variedad, esto es, en $x = 0$, entonces podemos escribir,

$$\begin{aligned} a_0(A) &= C_1(\nu), & a_3(A) &= C_3(\nu) \cdot \partial_x V(0), \\ a_1(A) &= 0, & a_4(A) &= C_4(\nu) \cdot V^2(0) + C_5(\nu) \cdot \partial_x^2 V(0), \\ a_2(A) &= C_2(\nu) \cdot V(0), & a_5(A) &= C_6(\nu) \cdot \partial_x V^2(0) + C_7(\nu) \cdot \partial_x^3 V(0). \end{aligned} \quad (727)$$

Supongamos ahora la validez de la relación,

$$\left. \frac{d}{d\epsilon} \text{Tr} \{e^{-t(A-\epsilon)}\} \right|_{\epsilon=0} = t \text{Tr} e^{-tA}, \quad (728)$$

que ha sido probada para operadores diferenciales regulares. De acuerdo con la ecuación (728),

$$\left. \frac{d}{d\epsilon} a_n(A - \epsilon) \right|_{\epsilon=0} = a_{n-2}(A). \quad (729)$$

La ecuación (729) describe el efecto de la transformación $A \rightarrow A - \epsilon$ que equivale a reemplazar $V(0)$ por $V(0) - \epsilon$. Teniendo en cuenta las expresiones (727) podemos encontrar las relaciones,

$$\begin{aligned} -C_2(\nu) &= C_1(\nu), \\ -2C_4(\nu) &= C_2(\nu), \\ -2C_6(\nu) &= C_3(\nu), \end{aligned} \quad (730)$$

y se verifica, además, que $a_1(A) = 0$.

Aunque busquemos un método para determinar los coeficientes $a_n(A)$ distinto del provisto por la ecuación (366) (junto con (351), (354) y (357)), una simple inspección del término dominante en la ecuación (366) permite deducir que $\alpha_2^V(\nu) = \nu$. Por consiguiente,

$$a_0(A) = \nu. \quad (731)$$

En consecuencia, utilizando las relaciones (730) reescribimos las ecuaciones (727),

$$\begin{aligned} a_0(A) &= \nu, & a_3(A) &= C_3(\nu) \cdot \partial_x V(0), \\ a_1(A) &= 0, & a_4(A) &= \frac{\nu}{2} \cdot V^2(0) + C_5(\nu) \cdot \partial_x^2 V(0), \\ a_2(A) &= -\nu \cdot V(0), & a_5(A) &= C_3(\nu) \cdot V(0) \partial_x V(0) + C_7(\nu) \cdot \partial_x^3 V(0). \end{aligned} \quad (732)$$

El propósito del método que exponemos es determinar los coeficientes $C_i(\nu)$ desconocidos a partir de las funciones espectrales que se hubieren calculado para ejemplos particulares.

Consideremos el caso particular $V(x) = 0$. En este caso, los núcleos de las resolventes de las extensiones $\theta = 0$ y $\theta = \infty$ se conocen explícitamente,

$$G_0(x, x', z) = \sqrt{xx'} \left[(\theta(x - x') I_{-\nu}(\sqrt{zx}) K_\nu(\sqrt{zx'}) - \theta(x' - x) I_{-\nu}(\sqrt{zx'}) K_\nu(\sqrt{zx}) \right], \quad (733)$$

$$G_\infty(x, x', z) = \sqrt{xx'} \left[(\theta(x - x') I_\nu(\sqrt{zx}) K_\nu(\sqrt{zx'}) - \theta(x' - x) I_\nu(\sqrt{zx'}) K_\nu(\sqrt{zx}) \right]. \quad (734)$$

La traza de la diferencia de las resolventes está entonces dada por,

$$\text{Tr} \{ (A^0 + z)^{-1} - (A^\infty + z)^{-1} \} = \frac{\int_0^\infty [I_{-\nu}(y) - I_\nu(y)] K_\nu(y) dy}{z} = \frac{\nu}{z}, \quad (735)$$

que confirma el resultado (731). Esta solución permite escribir la solución para el caso $V(x) = V_0$, siendo V_0 na constante en \mathbb{R} . En efecto, para este caso se deduce inmediatamente a partir de (735),

$$\begin{aligned} \text{Tr} \{ (A^0 + z)^{-1} - (A^\infty + z)^{-1} \} &= \frac{\nu}{z + V_0} \\ &\sim \frac{\nu}{z} \left(1 - \frac{V_0}{z} + \frac{V_0^2}{z^2} - \dots \right). \end{aligned} \quad (736)$$

Los primeros términos del desarrollo asintótico para el caso $V(x) = V_0$ están dados, consecuentemente, por,

$$\text{Tr} \{ e^{-tA^0} - e^{-tA^\infty} \} \sim \nu - \nu V_0 t + \frac{\nu}{2} V_0^2 t^2 - \dots \quad (737)$$

de donde verificamos las primeras dos relaciones de (730).

El caso $V(x) = x^2$, cuyas funciones espectrales ya hemos estudiado, permitirá determinar el coeficiente $C_5(\nu)$. En efecto, la función (351) está dada en este caso por,

$$R(y, z) = y^{\nu+1/2} e^{-y^2/2z} U(z/4 + \nu/2 + 1/2, 1 + \nu, y^2/z). \quad (738)$$

cuyo comportamiento en el origen es,

$$R(y, z) = \frac{\Gamma(\nu) z^\nu}{\Gamma\left(\frac{z}{4} + \frac{\nu}{2} + \frac{1}{2}\right)} y^{-\nu+1/2} + \frac{\Gamma(-\nu)}{\Gamma\left(\frac{z}{4} - \frac{\nu}{2} + \frac{1}{2}\right)} y^{\nu+1/2} + \dots \quad (739)$$

Teniendo en cuenta la relación (356) obtenemos el valor de $H(z)$ para el potencial $V(x) = x^2$,

$$H(z) = 4^\nu \frac{\Gamma\left(\frac{z}{4} + \frac{1+\nu}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{z}{4} + \frac{1-\nu}{2}\right)} z^{-\nu}. \quad (740)$$

Podemos entonces calcular la traza de la diferencia de las resolventes correspondientes a las extensiones $\theta = 0$ y $\theta = \infty$ mediante la ecuación (366),

$$\begin{aligned} \text{Tr} \{ (A^0 + z)^{-1} - (A^\infty + z)^{-1} \} &= \\ &= \frac{2^{1-2\nu} z^{2\nu}}{\Gamma(\nu)\Gamma(1-\nu)} \frac{\Gamma\left(\frac{z}{4} + \frac{1-\nu}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{z}{4} + \frac{1+\nu}{2}\right)} \times \\ &\times \int_0^\infty x^{2\nu+1} e^{-x^2} U^2(z/4 + \nu/2 + 1/2, 1 + \nu, x^2) dx = \\ &= \frac{1}{4} \left[\psi\left(\frac{z}{4} + \frac{1+\nu}{2}\right) - \psi\left(\frac{z}{4} + \frac{1-\nu}{2}\right) \right]. \end{aligned} \quad (741)$$

Podemos entonces escribir los primeros términos del desarrollo asintótico,

$$\text{Tr} \{ (A^0 + z)^{-1} - (A^\infty + z)^{-1} \} \sim \frac{\nu}{z} + \frac{4}{3}\nu(\nu^2 - 1)\frac{1}{z^3} + O(z^{-5}). \quad (742)$$

A partir de este desarrollo obtenemos para el caso $V(x) = x^2$,

$$\text{Tr} \{ e^{-tA^0} - e^{-tA^\infty} \} \sim \nu + \frac{2}{3}\nu(\nu^2 - 1)t^2 + O(t^4), \quad (743)$$

de donde se deduce,

$$C_5(\nu) = \frac{\nu(\nu^2 - 1)}{3}. \quad (744)$$

De esta manera, la resolución de problemas particulares permite determinar los coeficientes $C_i(\nu)$ que proveen el desarrollo asintótico de la traza de la diferencia del heat-kernel de las extensiones $\theta = 0$ y $\theta = \infty$.

Utilizaremos ahora el mismo método para estudiar el desarrollo asintótico del heat-kernel para una extensión autoadjunta arbitraria. De acuerdo con la ecuación (367),

$$\text{Tr} \{ e^{-tA^\theta} - e^{-tA^\infty} \} \sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n(A) t^{n/2} + \sum_{N=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} b_{N,n}(A) \theta^N t^{\nu N + n/2 - 1/2}, \quad (745)$$

donde $b_{N,n}(A) = \beta_{N,n}/\Gamma(\nu N + n/2 + 1/2)$. Nótese que $[\theta^N] = L^{-2\nu N}$ de modo que cancelan las dimensiones dependientes de ν que provienen de las potencias $t^{\nu N}$; las dimensiones de los coeficientes $b_{N,n}(A)$, que no dependen de θ , están entonces dadas por,

$$[b_{N,n}(A)] = L^{1-n}. \quad (746)$$

Podemos entonces escribir,

$$\begin{aligned}
 b_{1,0}(A) &= D_1(\nu), & b_{2,0}(A) &= D_2(\nu), & b_{3,0}(A) &= D_3(\nu), & \dots \\
 b_{1,1}(A) &= 0, & b_{2,1}(A) &= 0, & b_{3,1}(A) &= 0, & \dots \\
 b_{1,2}(A) &= D_4 V(0)(\nu), & b_{2,2}(A) &= D_5(\nu) V(0), & \dots \\
 b_{1,3}(A) &= D_6(\nu) \partial_x V(0), & \dots
 \end{aligned} \tag{747}$$

La propiedad de transformación (728) implica para los coeficientes $b_{N,n}(A)$,

$$\left. \frac{d}{d\epsilon} b_{N,n}(A - \epsilon) \right|_{\epsilon=0} = b_{N,n-2}(A), \tag{748}$$

que conduce a las relaciones,

$$\begin{aligned}
 D_4(\nu) &= -D_1(\nu), \\
 D_5(\nu) &= -D_2(\nu),
 \end{aligned} \tag{749}$$

y confirman que $b_{N,1}(A) = 0$.

El estudio del caso $V(x) = 0$ es suficiente para establecer los valores de los coeficientes $b_{N,0}(A)$. En efecto, es fácil ver que, si $V(x) = 0$ entonces $H(z) = 1$. Por consiguiente, de acuerdo con la ecuación (361),

$$K(z) = -4^\nu \frac{\Gamma(\nu)}{\Gamma(-\nu)} z^{-\nu}. \tag{750}$$

De modo que, de acuerdo con el Teorema (339), los términos dependientes de θ en el desarrollo asintótico de la traza de la diferencia de las resolventes de las extensiones θ arbitrario y $\theta = \infty$ están dados por,

$$\text{Tr} \{ (A^\theta + z)^{-1} - (A^\infty + z)^{-1} \} \sim \frac{\nu}{z} \sum_{N=1}^{\infty} \left[4^\nu \frac{\Gamma(\nu)}{\Gamma(-\nu)} \right]^N \theta^N z^{-\nu N} + \dots \tag{751}$$

Los términos correspondientes que se obtienen del desarrollo asintótico de la traza del heat-kernel,

$$\text{Tr} \{ e^{-tA^\theta} - e^{-tA^\infty} \} \sim \nu \cdot \sum_{N=1}^{\infty} \frac{1}{\Gamma(\nu N + 1)} \left[4^\nu \frac{\Gamma(\nu)}{\Gamma(-\nu)} \right]^N \theta^N t^{\nu N} + \dots \tag{752}$$

Comparando las ecuaciones (752) y (745) obtenemos,

$$b_{N,0} = \frac{1}{N \Gamma(\nu N)} \left[4^\nu \frac{\Gamma(\nu)}{\Gamma(-\nu)} \right]^N. \tag{753}$$

Por consiguiente,

$$\begin{aligned}
 D_1(\nu) &= \frac{4^\nu}{\Gamma(-\nu)}, & D_2(\nu) &= 2^{4\nu-1} \frac{\Gamma^2(\nu)}{\Gamma(2\nu)\Gamma^2(-\nu)}, \\
 D_3(\nu) &= \frac{4^{3\nu}}{3} \frac{\Gamma^3(\nu)}{\Gamma(3\nu)\Gamma^3(-\nu)}, & D_4(\nu) &= -\frac{4^\nu}{\Gamma(-\nu)}, \\
 D_5(\nu) &= -2^{4\nu-1} \frac{\Gamma^2(\nu)}{\Gamma(2\nu)\Gamma^2(-\nu)}.
 \end{aligned} \tag{754}$$

IX.2. Otro tipo de singularidad

En esta sección haremos una breve consideración de un operador de Schrödinger en una dimensión con un coeficiente singular proporcional a x^{-1} . Debido a la presencia de esta singularidad la estructura de polos de la función- ζ correspondiente no responde al resultado (1) sino que presenta polos dobles en el plano complejo.

Sea el operador,

$$A = -\partial_x^2 + \frac{\alpha}{x} \tag{755}$$

definido en el subconjunto denso $\mathcal{C}_0^\infty((0, 1)) \subset \mathbf{L}_2([0, 1])$.

Las extensiones autoadjuntas de este operador correspondientes a condiciones de contorno locales están caracterizadas por dos parámetros que describen esas condiciones en los extremos $x = 0$ y $x = 1$, respectivamente. A nuestro propósito de manifestar la presencia de polos de la función- ζ de multiplicidad mayor que 1, será suficiente con imponer condiciones de contorno tipo Dirichlet en $x = 1$.

Las extensiones autoadjuntas resultan entonces caracterizadas por un único parámetro real que describe el comportamiento de las funciones de $\mathcal{D}(A)$ en la singularidad. Puede probarse que la función- ζ correspondiente a una extensión autoadjunta general presenta polos con multiplicidad de todo orden. Sin embargo, por simplicidad, consideraremos en esta sección la extensión autoadjunta particular caracterizada por condiciones de tipo Dirichlet en el origen.

Como veremos, además de una sucesión de polos simples en semienteros negativos, la función $\zeta(s)$ correspondiente a esta extensión autoadjunta posee un polo doble en $s = -1/2$.

Consideremos entonces las soluciones de la ecuación de autovalores,

$$(A - \mu^2)\phi = 0, \tag{756}$$

IX.2 OTRO TIPO DE SINGULARIDAD

que son combinaciones lineales de las funciones,

$$\phi_1(x) = x e^{-i\mu x} M(1 + \alpha/2i\mu, 2, 2i\mu x), \quad (757)$$

$$\phi_2(x) = x e^{-i\mu x} U(1 + \alpha/2i\mu, 2, 2i\mu x). \quad (758)$$

Sus comportamiento en el origen están dados por,

$$\phi_1(x) = x + O(x^2), \quad (759)$$

$$\phi_2(x) = \frac{1}{2i\mu \Gamma(1 + \alpha/2i\mu)} + O(x). \quad (760)$$

Si imponemos condiciones de contorno tipo Dirichlet en ambos extremos del intervalo $[0, 1]$, las autofunciones del operador A están dadas por la ecuación (757) y los autovalores $\lambda_n = \mu_n$ son las soluciones de la ecuación,

$$M(1 + \alpha/2i\mu_n, 2, 2i\mu_n) = 0. \quad (761)$$

La función $\zeta_A(s)$ admite entonces la representación integral,

$$\begin{aligned} \zeta(s) &= \oint_{\mathcal{C}} \mu^{-2s} \frac{d}{d\mu} \log M(1 + \alpha/2i\mu, 2, 2i\mu) \frac{d\mu}{2\pi i} = \\ &= s \cdot \oint_{\mathcal{C}} \mu^{-2s-1} \log M(1 + \alpha/2i\mu, 2, 2i\mu) \frac{d\mu}{\pi i}, \end{aligned} \quad (762)$$

siendo \mathcal{C} una curva que encierra las soluciones de (761) en sentido antihorario.

Las singularidades de la función $\zeta(s)$ pueden obtenerse a partir de un desarrollo asintótico del integrando en (762). Si $|\arg \mu| < \pi$ entonces,

$$\begin{aligned} M(1 + \alpha/2i\mu, 2, 2i\mu) &\sim \frac{e^{i\mu + \pi\alpha/4\mu}}{2i\mu} \times \\ &\times \left[\frac{e^{i\mu - i\alpha \log 2\mu/2\mu}}{\Gamma(1 + \alpha/2i\mu)} {}_2F_0(1 - \alpha/2i\mu, -\alpha/2i\mu, 1/2i\mu) - \right. \\ &\left. - \frac{e^{-i\mu + i\alpha \log 2\mu/2\mu}}{\Gamma(1 - \alpha/2i\mu)} {}_2F_0(1 + \alpha/2i\mu, \alpha/2i\mu, -1/2i\mu) \right]. \end{aligned} \quad (763)$$

Podemos cambiar el camino de integración en (762) de \mathcal{C} al eje imaginario. Si $\mu = \pm i\rho$ con $\rho \in \mathbb{R}^+$ el logaritmo del desarrollo asintótico (763) toma la forma,

$$\begin{aligned} \log M(1 \mp \alpha/2\rho, 2, \mp 2\rho) &\sim (1 \mp 1)\rho - \log \rho + \frac{\alpha}{2} \frac{\log \rho}{\rho} - \\ - \log 2 + \frac{\alpha \log 2}{2} \frac{1}{\rho} &- \log \Gamma(1 + \alpha/2\rho) + \log {}_2F_0(1 - \alpha/2\rho, -\alpha/2\rho, 1/2\rho). \end{aligned} \quad (764)$$

Reemplazando este desarrollo asintótico en la expresión (762) obtenemos las singularidades de la función $\zeta(s)$.

El primer término de (764) sólo está presente cuando μ pertenece al semieje imaginario negativo y conduce a la aparición de un polo simple de la función $\zeta(s)$ en

$$s = \frac{1}{2}, \quad (765)$$

con residuo,

$$\text{Res} \{ \zeta_A(s) \} |_{s=1/2} = \frac{1}{2\pi}. \quad (766)$$

Las potencias impares restantes de ρ en el desarrollo asintótico (763) originan polos simples de la función $\zeta(s)$ en los puntos,

$$s_n = -\frac{1}{2} - n \quad \text{con} \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (767)$$

Las singularidades restantes provienen del término $\alpha \log \rho / 2\rho$. Este término contribuye en la cantidad $-\alpha/4\pi$ al residuo del polo en,

$$s = -\frac{1}{2}. \quad (768)$$

Además, también conduce a la presencia de un polo doble en el mismo punto $s = -1/2$ con residuo $\alpha/8\pi$.

Comportamiento asintótico de los autovalores

Si aproximamos las soluciones de la ecuación (761) utilizando la expresión (763) obtenemos el siguiente comportamiento asintótico para μ_n ,

$$\mu_n \sim \pi n + \frac{\alpha}{2\pi} \frac{\log n}{n} + \frac{\alpha}{2\pi} (\log 2\pi + \gamma_E) \frac{1}{n} + O(n^{-2} \log n). \quad (769)$$

Si reemplazamos este desarrollo asintótico en la expresión,

$$\zeta(s) = \sum_{\mu_n} \mu_n^{-s}, \quad (770)$$

obtenemos,

$$\zeta(s) = \pi^{-2s} \zeta_R(2s) + \alpha \pi^{-2s-2} s \zeta'_R(2s+2) - \quad (771)$$

$$-\alpha (\log 2\pi + \gamma_E) \pi^{-2s-2} s \zeta_R(2s+2) + h(s), \quad (772)$$

siendo $\zeta_R(s)$ la función- ζ de Riemann y $h(s)$ es una función analítica en $\Re(s) > -1$. La expresión (771) confirma los valores de los residuos que hemos encontrado para los polos en $s = 1/2$ y $s = -1/2$. Se verifica además la presencia de un polo doble en $s = -1/2$.

Parte X
Apéndice

X.1. Operadores regulares sobre variedades no compactas

El resultado (1) determina la posición de los polos de la función- ζ de un operador diferencial A de orden d con coeficientes infinitamente derivables definido sobre secciones de un fibrado vectorial sobre una variedad de base compacta M de dimensión m con borde suave ∂M sobre el que se imponen condiciones de contorno locales. Sin embargo, como en esta Tesis hemos considerado operadores diferenciales con coeficientes singulares sobre variedades no compactas, hemos encontrado divergencias con respecto al resultado (1).

Con el objeto de distinguir cuáles de estas divergencias provienen de la presencia de términos singulares y cuáles se originan en la no compactidad de la variedad de base, estudiaremos en esta sección la validez del resultado (1) en el caso de variedades de base M no compactas. El argumento que presentaremos permite determinar la posición del primer polo de la función- ζ del operador diferencial para operadores de Schrödinger con un potencial homogéneo.

Consideremos un operador de Schrödinger A ,

$$A = -\Delta + V(x), \quad (773)$$

donde $x \in \mathbb{R}^m$ y el dominio $\mathcal{D}(A)$ del operador es un subespacio de $L_2(\mathbb{R}^m)$ sobre el cual A es autoadjunto. Designemos por $\phi_n(x)$ sus autofunciones y por λ_n los autovalores correspondientes.

La traza del heat-kernel puede escribirse,

$$\text{Tr } e^{-tA} = \sum_n e^{-t\lambda_n} = \sum_n \int_{\mathbb{R}^m} dx \phi_n^*(x) e^{-tA} \cdot \phi_n(x). \quad (774)$$

Si introducimos en la última expresión la transformada de Fourier (ver definición (IV.1.1)) en m dimensiones obtenemos,

$$\text{Tr } e^{-tA} = \sum_n \int_{\mathbb{R}^{3m}} \frac{dx dp dp'}{(2\pi)^m} \mathcal{F}\{\phi_n\}^*(p) e^{ipx} e^{-tA} \cdot e^{-ip'x} \mathcal{F}\{\phi_n\}(p'). \quad (775)$$

Como estamos interesados en el orden dominante a pequeños valores de t , podemos realizar la siguiente aproximación,

$$\exp[-t(-\Delta + V(x))] \sim \exp(t\Delta) \cdot \exp(-tV(x)), \quad (776)$$

pues la diferencia entre ambos miembros es proporcional al conmutador de $t\Delta$ y de

X.1 OPERADORES REGULARES SOBRE VARIEDADES NO COMPACTAS

$tV(x)$ que es orden t^2 . La ecuación (775) toma entonces la forma,

$$\begin{aligned} \text{Tr } e^{-tA} &\sim \\ &\sim \int_{\mathbb{R}^{3m}} \frac{dx dp dp'}{(2\pi)^m} \left[\sum_n \mathcal{F}\{\phi_n\}^*(p) \cdot \mathcal{F}\{\phi_n\}(p') \right] e^{i(p-p')x} e^{-t(p'^2+V(x))} + \dots \sim \\ &\sim \int_{\mathbb{R}^{2m}} \frac{dx dp}{(2\pi)^m} e^{-t(p^2+V(x))} \dots \end{aligned} \quad (777)$$

La última expresión puede interpretarse como la aproximación clásica³¹ de la función de partición en el espacio de fases. Si realizamos la integral en el espacio de impulsos obtenemos,

$$\text{Tr } e^{-tA} \sim \frac{1}{(2\sqrt{\pi})^m} t^{-m/2} \int_{\mathbb{R}^m} dx e^{-tV(x)} + \dots \quad (778)$$

Supongamos ahora que el potencial depende de la variable radial r y que satisface la condición de homogeneidad,

$$V(cr) = c^h V(r). \quad (779)$$

La aproximación (778) puede entonces escribirse,

$$\begin{aligned} \text{Tr } e^{-tA} &\sim \frac{1}{(2\sqrt{\pi})^m} t^{-m/2} \int_{S^{m-1}} d\Omega \int_{\mathbb{R}^+} dr r^{m-1} e^{-V(t^{1/h}r)} + \dots \\ &\sim \frac{1}{2^{m-1} \Gamma(m/2)} t^{-m/2-m/h} \int_{\mathbb{R}^+} dr r^{m-1} e^{-V(r)} + \dots \end{aligned} \quad (780)$$

Para un operador regular, el primer término del desarrollo asintótico de la traza del heat-kernel para una variedad compacta es proporcional a $t^{-m/2}$. Sin embargo, como indica la ecuación (780), esto no es cierto para un operador de Schrödinger con un potencial homogéneo sobre una variedad no compacta sino que el exponente se modifica en la cantidad $-m/h$ siendo h el grado de homogeneidad del potencial.

Si la variedad de base es unidimensional y el potencial es homogéneo de grado 2, entonces el primer término del desarrollo asintótico de la traza del heat-kernel es proporcional a t^{-1} . Esto implica que el primer polo de la función- ζ del operador diferencial se encuentra en $s = 1$, en coincidencia con uno de los resultados de la sección (VI.1), que corresponde a una variedad de base unidimensional y a un potencial cuyo término dominante en el infinito es homogéneo de grado 2. Este resultado se encuentra también en [9], donde se afirma, además, que el comportamiento del potencial $V(x)$ en $|x| \rightarrow \infty$ puede conducir, incluso, a la aparición de potencias de logaritmos de t en el desarrollo de la traza del heat-kernel del operador diferencial.

³¹Nótese que si interpretamos a la traza del heat-kernel como la función de partición estadística, el límite de pequeños valores de t corresponde al límite de altas temperaturas.

X.2. SUSYQM: Funciones Espectrales

X.2.1. La función de partición graduada

En esta sección calcularemos la función de partición graduada [117] del hamiltoniano $H^{(\gamma)}$ de la sección III, definida como,

$$Z_\gamma^F(t) := \text{Tr} \left\{ (-1)^F e^{-tH^{(\gamma)}} \right\}. \quad (781)$$

Si $\{\Phi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ representa el conjunto de autofunciones de componentes $\phi_{1,n}, \phi_{2,n}$ del operador $Q_+^{(\gamma)}$ cuyos autovalores están dados por $\{\lambda_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, podemos definir la función $\hat{Z}_\gamma^F(t)$,

$$\hat{Z}_\gamma^F(t) = \sum_{\lambda_n \neq 0} e^{-t\lambda_n^2} \frac{(\Phi_n, (-1)^F \Phi_n)}{\|\Phi_n\|^2} = \sum_{\lambda_n \neq 0} \frac{e^{-t\lambda_n^2}}{\lambda_n} \frac{(Q_+^\dagger \Phi_n, (-1)^F \Phi_n)}{\|\Phi_n\|^2}, \quad (782)$$

donde,

$$(-1)^F \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ -\phi_2 \end{pmatrix}. \quad (783)$$

Teniendo en cuenta la ecuación (125) es inmediato probar,

$$\begin{aligned} \hat{Z}_\gamma^F(t) &= - \sum_{\lambda_n \neq 0} \frac{e^{-t\lambda_n^2}}{\sqrt{2}\lambda_n \|\Phi_n\|^2} [\phi_{n,1}(x)\phi_{n,2}(x)]_{x=0^+} = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{\lambda_n \neq 0} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2} + \alpha\right) \Gamma\left(\frac{1}{2} - \alpha\right) e^{-t\lambda_n^2}}{\Gamma\left(1 - \frac{\lambda_n^2}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1-\lambda_n^2}{2} - \alpha\right) \|\Phi_n\|^2}, \end{aligned} \quad (784)$$

donde hemos tenido en cuenta el comportamiento de las funciones en $\mathcal{D}(H_\gamma)$ cerca del origen (véase la ecuación (173).)

Dado que el espectro de $Q_+^{(\gamma)}$ depende del parámetro γ , la función de partición graduada depende de la extensión autoadjunta. Se puede probar, además, que, para los casos $\gamma = 0, \pi/2$, $Z_\gamma^F(t)$ es independiente de t y coincide con el índice de Witten Δ .

En efecto, de acuerdo con los autovalores de $Q_+^{(0)}$, dados en la ecuación (181), cada término en la serie en (784) se anula. En consecuencia, como $Z_{\gamma=0}^F(t)$ sólo recibe una contribución no nula proveniente del modo cero, obtenemos,

$$Z_{\gamma=0}^F(t) = \frac{(\Phi_0, (-1)^F \Phi_0)}{\|\Phi_0\|^2} = 1 = \Delta_{\gamma=0}, \quad (785)$$

donde hemos utilizado la ecuación (156).

X.2 SUSYQM: FUNCIONES ESPECTRALES

Por su parte, de acuerdo con los autovalores de $P_{\gamma=\pi/2}$, dados por la ecuación (182), todos los términos de la serie en (784) se anula. Obtenemos entonces,

$$Z_{\gamma=\pi/2}^F(t) = 0 = \Delta_{\gamma=\pi/2}. \quad (786)$$

Debe destacarse que para las extensiones autoadjuntas del hamiltoniano correspondientes a valores de $\gamma \neq 0, \pi/2$, la función de partición graduada $Z_{\gamma}^F(t)$ depende del parámetro t . El índice de Witten está dado por el límite $t \rightarrow \infty$ que es igual a cero pues $Z_{\gamma}^F(t) = \hat{Z}_{\gamma}^F(t)$ se anula exponencialmente con t debido a la ausencia de modos cero.

X.2.2. La asimetría espectral de la supercarga

La asimetría espectral $\eta(s)$ del operador $Q_+^{(\gamma)}$,

$$\eta(s) := \sum_{\lambda_{\pm,n} \neq 0} \text{sign}(\lambda_{\pm,n}) |\lambda_{\pm,n}|^{-s}. \quad (787)$$

está relacionada con la degeneración del espectro de $H^{(\gamma)}$.

Dado que $|\lambda_{\pm,n}| \sim \sqrt{n}$ (véanse las ecuaciones (179)), la ecuación (787) define una función analítica en el semiplano $\Re(s) > 2$.

Si $\alpha \in (-1/2, 1/2)$, la función $\eta(s)$ correspondiente a las extensiones caracterizadas por $\gamma = 0$ y $\gamma = \pi/2$ se anula idénticamente (véanse las ecuaciones (177) y (178).)

Calcularemos, a continuación, el valor $\eta(0)$ para las extensiones definidas por $\gamma \neq 0, \pi/2$. En general, la asimetría espectral puede expresarse en términos de las funciones- ζ parciales $\zeta_{\pm}(s, \beta(\gamma))$,

$$\eta(s) = \zeta_+(s, \beta(\gamma)) - e^{i\pi s} \zeta_-(s, \beta(\gamma)), \quad (788)$$

donde,

$$\begin{aligned} \zeta_+(s, \beta(\gamma)) &:= \sum_{\lambda_{+,n} > 0} \lambda_{+,n}^{-s}, \\ \zeta_-(s, \beta(\gamma)) &:= \sum_{\lambda_{-,n} < 0} \lambda_{-,n}^{-s}. \end{aligned} \quad (789)$$

De acuerdo con la ecuación (176) los autovalores de $Q_+^{(\gamma)}$ son los ceros de la función entera,

$$F(\lambda, \beta(\gamma)) := \frac{\lambda}{\Gamma\left(\frac{1}{2} - \alpha - \frac{\lambda^2}{2}\right)} - \frac{\beta(\gamma)}{\Gamma\left(-\frac{\lambda^2}{2}\right)}. \quad (790)$$

Como los ceros de $F(\lambda, \beta(\gamma))$ son reales y simples, podemos utilizar la siguiente representación integral para la función- ζ parcial,

$$\begin{aligned}\zeta_+(s, \beta(\gamma)) &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathcal{C}_+} \lambda^{-s} \frac{F'(\lambda, \beta(\gamma))}{F(\lambda, \beta(\gamma))} d\lambda = \\ &= -\frac{1}{2\pi} e^{i\pi s/2} \int_{-\infty+i0}^{\infty+i0} \mu^{-s} \frac{F'(e^{-i\pi/2}\mu, \beta(\gamma))}{F(e^{-i\pi/2}\mu, \beta(\gamma))} d\mu,\end{aligned}\tag{791}$$

donde la curva \mathcal{C}_+ encierra los ceros positivos de $Q_+^{(\gamma)}$ en sentido antihorario.

Además, como $F(e^{i\pi}|\lambda|, \beta(\gamma)) = e^{i\pi} F(|\lambda|, e^{-i\pi}\beta(\gamma))$, se deduce que los ceros negativos de $F(\lambda, \beta(\gamma))$ son opuestos a los ceros positivos de $F(\lambda, e^{-i\pi}\beta(\gamma))$. En consecuencia,

$$\zeta_-(s, \beta(\gamma)) = e^{-i\pi s} \zeta_+(s, e^{-i\pi}\beta(\gamma)).\tag{792}$$

Teniendo en cuenta,

$$\begin{aligned}\frac{F'(-i\mu, \beta(\gamma))}{F(-i\mu, \beta(\gamma))} &= \frac{1 + \mu^2 \left[\psi(\mu^2/2) - \psi\left(\frac{1}{2} - \alpha + \mu^2/2\right) \right]}{-i\mu \left[1 - i\beta(\gamma) \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2} - \alpha + \mu^2/2\right)}{\mu \Gamma(\mu^2/2)} \right]} - i\mu \psi(\mu^2/2) = \\ &= i \left[\Delta_1(\mu) + \Delta_2(\mu, \beta(\gamma)) \right] + O(\mu^{-3}),\end{aligned}\tag{793}$$

siendo,

$$\begin{aligned}\Delta_1(\mu) &= -\mu \log\left(\frac{\mu^2}{2}\right) + \frac{1}{\mu}, \\ \Delta_2(\mu, \beta(\gamma)) &= \frac{2\alpha}{\mu} \left[1 - i\frac{\beta(\gamma)}{\mu} \left(\frac{\mu^2}{2}\right)^{-\alpha+1/2} \right]^{-1},\end{aligned}\tag{794}$$

vemos que la integral en (791) converge a una función analítica en el semiplano $\Re(s) > 2$. Consideraremos la extensión meromorfa de $\zeta_+(s, \beta(\gamma))$ al semiplano complementario.

Como,

$$\frac{F'(-ie^{i\pi}\mu, \beta(\gamma))}{F(-ie^{i\pi}\mu, \beta(\gamma))} = e^{i\pi} \frac{F'(-i\mu, e^{-i\pi}\beta(\gamma))}{F(-i\mu, e^{-i\pi}\beta(\gamma))},\tag{795}$$

podemos escribir,

$$\begin{aligned}
 -2\pi \zeta_+(s, \beta(\gamma)) = & -2 \sin\left(\frac{\pi s}{2}\right) \int_1^\infty \mu^{-s} \Delta_1(\mu) d\mu + \\
 & + i \int_1^\infty \mu^{-s} \left\{ e^{i\pi s/2} \Delta_2(\mu, \beta(\gamma)) - e^{-i\pi s/2} \Delta_2(\mu, e^{-i\pi} \beta(\gamma)) \right\} d\mu + \\
 & + e^{i\pi s/2} \int_1^\infty \mu^{-s} \left\{ \frac{F'(-i\mu, \beta(\gamma))}{F(-i\mu, \beta(\gamma))} - i \left[\Delta_1(\mu) + \Delta_2(\mu, \beta(\gamma)) \right] \right\} d\mu - \\
 & - e^{-i\pi s/2} \int_1^\infty \mu^{-s} \left\{ \frac{F'(-i\mu, e^{-i\pi} \beta(\gamma))}{F(-i\mu, e^{-i\pi} \beta(\gamma))} - i \left[\Delta_1(\mu) + \Delta_2(\mu, e^{-i\pi} \beta(\gamma)) \right] \right\} d\mu + \\
 & + e^{i\pi s/2} \int_{e^{i\pi}}^1 \mu^{-s} \frac{F'(-i\mu, \beta(\gamma))}{F(-i\mu, \beta(\gamma))} d\mu, \quad (796)
 \end{aligned}$$

donde la primera integral en el miembro derecho converge para $\Re(s) > 2$, la segunda para $\Re(s) > 0$, la tercera y la cuarta para $\Re(s) > -2$, y la quinta, evaluada a lo largo de una curva en el semiplano superior que une el punto -1 con el 1 , es una función entera de s .

La extensión analítica $I_1(s)$ del primer término del miembro derecho de la ecuación (796) está dada por,

$$\begin{aligned}
 I_1(s) = & -2 \sin\left(\frac{\pi s}{2}\right) \int_1^\infty \mu^{-s} \Delta_1(\mu) d\mu = \\
 = & -2 \sin(\pi s/2) \left[\frac{1}{s} - \frac{2}{(s-2)^2} + \frac{\log(2)}{s-2} \right]. \quad (797)
 \end{aligned}$$

La extensión analítica del segundo término del miembro derecho de la ecuación (796) resulta,

$$\begin{aligned}
 I_2(s) = & \Re \left\{ 2i e^{i\pi s/2} \int_1^\infty \mu^{-s} \Delta_2(\mu, \beta(\gamma)) d\mu \right\} = \\
 = & -\Re \left\{ 2i e^{i\pi s/2} \lim_{\mu \rightarrow \infty} \int_1^{\mu^{-2\alpha}} \frac{x^{\frac{s}{2\alpha}-1} dx}{1 - i 2^{\alpha-\frac{1}{2}} \beta(\gamma) x} \right\}, \quad (798)
 \end{aligned}$$

si $\alpha \neq 0$, en tanto que $I_2(s) := 0$ para $\alpha = 0$.

De acuerdo con el valor de α , obtenemos,

- Si $0 < \alpha < 1/2$,

$$\begin{aligned}
 I_2(s) = & -\frac{4\alpha}{s} \sin\left(\frac{\pi s}{2}\right) - \frac{2^{\alpha+3/2} \alpha \beta(\gamma)}{s+2\alpha} \cos\left(\frac{\pi s}{2}\right) + \\
 & + 2^{2\alpha} \beta^2(\gamma) \int_0^1 x^{\frac{s}{2\alpha}+1} \frac{\sin\left(\frac{\pi s}{2}\right) + 2^{\alpha-1/2} \beta(\gamma) x \cos\left(\frac{\pi s}{2}\right)}{1 + 2^{2\alpha-1} \beta(\gamma)^2 x^2} dx, \quad (799)
 \end{aligned}$$

donde la integral converge para $s > -4\alpha$. Nótese la presencia de un polo³² en $s = -2\alpha$.

- Si $-1/2 < \alpha < 0$ y $\gamma \neq 0$,

$$I_2(s) = -\frac{2^{-\alpha+5/2}\alpha}{\beta(\gamma)(s-2\alpha)} \cos\left(\frac{\pi s}{2}\right) + \int_1^\infty x^{\frac{s}{2\alpha}-2} \frac{2\beta(\gamma) x \sin\left(\frac{\pi s}{2}\right) - 2^{-\alpha+3/2} \cos\left(\frac{\pi s}{2}\right)}{\beta(\gamma) [1 + 2^{2\alpha-1}\beta(\gamma)^2 x^2]} dx, \quad (802)$$

donde la integral converge para $s > 4\alpha = -4|\alpha|$. Nótese la presencia de un polo simple en $s = 2\alpha = -|2\alpha|$.

Es importante mencionar que la función $\zeta_+(s, \beta(\gamma))$ resulta analítica en una vecindad del origen. En particular, las ecuaciones (796), (797), (799) y (802) permiten obtener los primeros términos del desarrollo de Taylor de la función $\zeta_+(s, \beta(\gamma))$ alrededor de $s = 0$,

$$\begin{aligned} -2\pi \zeta_+(s \sim 0, \beta(\gamma)) &= -\pi + \left\{ \begin{array}{ll} -2\pi\alpha, & \alpha > 0 \\ 0, & \alpha \leq 0 \end{array} \right\} + \\ &+ \int_1^\infty \left[\frac{F'(-i\mu, \beta(\gamma))}{F(-i\mu, \beta(\gamma))} - \frac{F'(-i\mu, e^{-i\pi}\beta(\gamma))}{F(-i\mu, e^{-i\pi}\beta(\gamma))} \right] d\mu + \\ &+ i \left[\log F(-i, \beta(\gamma)) - \log F(i, \beta(\gamma)) \right] + O(s), \end{aligned} \quad (803)$$

donde la integral puede evaluarse teniendo en cuenta que,

$$\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2} - \alpha + \frac{\mu^2}{2}\right)}{\mu \Gamma\left(\frac{\mu^2}{2}\right)} = 2^{\alpha-1/2} \mu^{-2\alpha} \{1 + O(\mu^{-2})\}. \quad (804)$$

³²Esta singularidad implica que la función- ζ de $Q_+^{(\gamma)}$,

$$\zeta(s, \beta(\gamma)) := \zeta_+(s, \beta(\gamma)) + \zeta_-(s, \beta(\gamma)) = \zeta_+(s, \beta(\gamma)) + e^{-i\pi s} \zeta_+(s, e^{-i\pi}\beta(\gamma)), \quad (800)$$

presenta un polo simple en $s = -2\alpha$,

$$\zeta(s, \beta(\gamma)) = \frac{2^{g+3/2} (e^{2i\pi g} - 1) g \beta(\gamma) \cos(g\pi)}{s + 2g} + O(s + 2g)^0. \quad (801)$$

Si el parámetro $\gamma \neq 0, \pi/2$ el residuo, que depende de la extensión autoadjunta, se anula solamente para el caso regular $\alpha = 0$. Este es otro ejemplo de un operador con un potencial singular que admite extensiones autoadjuntas cuyas funciones- ζ asociadas presentan polos en posiciones que no responden al resultado (1), válido para operadores regulares, sino que dependen de las características de la singularidad.

X.3 DESARROLLO ASINTÓTICO DEL HEAT-KERNEL EN VARIAS DIMENSIONES

Finalmente obtenemos,

$$\zeta_+(s=0, \beta(\gamma)) = \left\{ \begin{array}{ll} \alpha, & \alpha > 0 \\ \frac{i}{2\pi} \log \left(\frac{1 + e^{i\frac{\pi}{2} \frac{\beta(\gamma)}{\sqrt{2}}}}{1 + e^{-i\frac{\pi}{2} \frac{\beta(\gamma)}{\sqrt{2}}}} \right), & \alpha = 0 \\ \frac{1}{2}, & \alpha < 0 \end{array} \right\}. \quad (805)$$

De las ecuaciones (788),(792) y (805), podemos entonces calcular la asimetría espectral en $s = 0$,

$$\begin{aligned} \eta(s=0) &= \left[\zeta_+(s, \beta(\gamma)) - \zeta_+(s, e^{-i\pi} \beta(\gamma)) \right] \Big|_{s=0} = \\ &= \left\{ \begin{array}{ll} 0, & \alpha \neq 0, \\ -\frac{2}{\pi} \arctan \left(\frac{\beta(\gamma)}{\sqrt{2}} \right), & \alpha = 0. \end{array} \right. \end{aligned} \quad (806)$$

X.3. Desarrollo asintótico del heat-kernel en varias dimensiones

En esta sección mostraremos que la traza del heat-kernel e^{-tA} correspondiente a un operador de segundo orden A con coeficientes regulares admite un desarrollo asintótico en potencias de t cuyos exponentes sólo dependen del orden del operador y de la dimensión de la variedad M .

Consideremos, entonces, el operador,

$$A = -\Delta + V(x), \quad (807)$$

$$V(x) = \mathbf{V}_\mu(x) \cdot \partial_\mu + \mathbf{V}_0(x), \quad (808)$$

donde $x \in \mathbb{R}^m$, $\Delta = -d^\dagger d$ y $\mathbf{V}_\mu(x), \mathbf{V}_0(x)$ son funciones sobre \mathbb{R}^m con valores en $\mathbb{C}^{k \times k}$.

Lema X.3.1 *El heat-kernel $e^{t\Delta}(x, x')$ definido sobre $\mathbb{R}^m \otimes \mathbb{R}^m$ es función de $x - x'$ y satisface la propiedad de homogeneidad,*

$$e^{-t\Delta}(x - x') = t^{-m/2} e^{-\Delta}(t^{-1/2}(x - x')). \quad (809)$$

Demostración: El núcleo del operador $e^{t\Delta}$ puede calcularse en forma explícita (véase, e.g., [40].) La propiedad (809) resulta entonces inmediata.

□

Es conveniente formular las siguientes definiciones,

$$\tilde{e}^{-tA} := e^{-t\Delta} \cdot e^{-tA}, \quad (810)$$

$$\tilde{V}(t) := e^{t\Delta} \cdot V(x) \cdot e^{-t\Delta}. \quad (811)$$

El operador \tilde{e}^{-tA} satisface entonces la ecuación diferencial,

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \tilde{V}(t) \right) \tilde{e}^{-tA} = 0, \quad (812)$$

que puede escribirse en forma integral,

$$\tilde{e}^{-tA} = \mathbf{1} - \int_0^t \tilde{V}(t_1) \cdot \tilde{e}^{-t_1A} dt_1. \quad (813)$$

La solución de esta ecuación puede obtenerse en forma iterativa,

$$\begin{aligned} \tilde{e}^{-tA} &\sim \mathbf{1} - \int_0^t \tilde{V}(t_1) dt_1 + \int_0^t \int_0^{t_1} \tilde{V}(t_1) \cdot \tilde{V}(t_2) dt_1 dt_2 - \dots + \\ &+ (-1)^n \int_0^t \int_0^{t_1} \dots \int_0^{t_{n-1}} \tilde{V}(t_1) \tilde{V}(t_2) \dots \tilde{V}(t_n) dt_1 dt_2 \dots dt_n + \dots \end{aligned} \quad (814)$$

Reemplazando en esta expresión las definiciones (810) y (811) obtenemos,

$$\begin{aligned} e^{-tA} &\sim e^{-t\Delta} - \int_0^t e^{-(t-t_1)\Delta} \cdot V(x) \cdot e^{-t_1\Delta} dt_1 + \\ &+ \int_0^t \int_0^{t_1} e^{-(t-t_1)\Delta} \cdot V(x) \cdot e^{-(t_1-t_2)\Delta} \cdot V(x) \cdot e^{-t_2\Delta} dt_1 dt_2 - \dots + \\ &+ (-1)^n \int_0^t \int_0^{t_1} \dots \int_0^{t_{n-1}} e^{-(t-t_1)\Delta} \cdot V(x) \cdot e^{-(t_1-t_2)\Delta} \cdot V(x) \times \dots \times \\ &\quad \times e^{-(t_{n-1}-t_n)\Delta} \cdot V(x) \cdot e^{-t_n\Delta} dt_1 dt_2 \dots dt_n + \dots \end{aligned} \quad (815)$$

de modo que el desarrollo asintótico para la el heat-kernel en la diagonal está dado por,

$$\begin{aligned} e^{-tA}(x, x') &\sim \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int_0^t \int_0^{t_1} \dots \int_0^{t_{n-1}} \int_{\mathbb{R}^m} \dots \int_{\mathbb{R}^m} e^{-(t-t_1)\Delta}(x, x_1) \times \\ &\times e^{-(t_1-t_2)\Delta}(x_1, x_2) \dots e^{-t_n\Delta}(x_n, x') \cdot V(x_1) \dots V(x_n) dx_1 \dots dx_n dt_1 \dots dt_n. \end{aligned} \quad (816)$$

Si hacemos el cambio de variables $t_i \rightarrow t \cdot t_i$ para $i = 1, \dots, n$ y utilizamos la propiedad de homogeneidad (809) obtenemos,

$$\begin{aligned} e^{-tA}(x, x') &\sim \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^{n-\frac{m}{2}(n+1)} \int_0^1 \dots \int_0^{t_{n-1}} \int_{\mathbb{R}^m} \dots \int_{\mathbb{R}^m} e^{-(1-t_1)\Delta}(t^{-1/2}(x - x_1)) \cdot \\ &\cdot e^{-(t_1-t_2)\Delta}(t^{-1/2}(x_1 - x_2)) \cdot \dots \cdot e^{-t_n\Delta}(t^{-1/2}(x_n - x')) \cdot \\ &\quad \cdot V(x_1) \dots V(x_n) dx_1 \dots dx_n dt_1 \dots dt_n. \end{aligned} \quad (817)$$

X.4 DESARROLLOS ASINTÓTICOS DE LA SECCIÓN VI.1

Finalmente, hacemos el cambio de escala en las coordenadas $x_i \rightarrow t^{-1/2}(x - x_i)$ para $i = 1, \dots, n$,

$$\begin{aligned}
 e^{-tA}(x, x') &\sim \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n(m+1)} t^{n-\frac{m}{2}} \int_0^1 \dots \int_0^{t_{n-1}} \int_{\mathbb{R}^m} \dots \int_{\mathbb{R}^m} e^{-(1-t_1)\Delta}(x_1) \times \\
 &\quad \times e^{-(t_1-t_2)\Delta}(x_2 - x_1) \dots e^{-t_n\Delta}(t^{-1/2}(x - x') - x_n) \times \\
 &\quad \times V(x - \sqrt{t}x_1) \cdot V(x - \sqrt{t}x_2) \dots V(x - \sqrt{t}x_n) dt_1 \dots dt_n dx_1 \dots dx_n.
 \end{aligned} \tag{818}$$

El desarrollo asintótico del heat-kernel en la diagonal $e^{-tA}(x, x)$ para pequeños valores de t resulta entonces,

$$e^{-tA}(x, x) \sim t^{-m/2} \sum_{n=0}^{\infty} c_n(A, x) \cdot t^n, \tag{819}$$

donde los coeficientes $c_n(A)$ están dados por,

$$\begin{aligned}
 c_n(A, x) &:= \frac{(-1)^{n(m+1)}}{n!} \int_0^1 \dots \int_0^{t_{n-1}} dt_1 \dots dt_n \int_{\mathbb{R}^m} \dots \int_{\mathbb{R}^m} dx_1 \dots dx_n \times \\
 &\quad \times e^{-(1-t_1)\Delta}(x_1) \cdot e^{-(t_1-t_2)\Delta}(x_2 - x_1) \dots e^{-t_n\Delta}(-x_n) \times \\
 &\quad \times \left. \frac{d^n}{d\tau^n} V(x - \tau x_1) \dots V(x - \tau x_n) \right|_{\tau=0}.
 \end{aligned} \tag{820}$$

A partir del desarrollo asintótico (819) del heat-kernel en la diagonal $e^{-tA}(x, x)$ se demuestra, utilizando las ecuaciones (249) y (250), que el núcleo de la resolvente en la diagonal $G(x, x, \lambda)$ admite un desarrollo asintótico dado por,

$$G(x, x, \lambda) \sim \sum_{k=0}^{\infty} \gamma_{2k}(A, x) \cdot \lambda^{\frac{m-2k}{2}-1}. \tag{821}$$

El desarrollo (819) conduce a la expresión (9) cuando el operador diferencial A es de segundo orden y está definido sobre una variedad de base sin borde. Por su parte, la expresión (821) permite obtener el desarrollo de la traza de la resolvente en potencias de λ dadas por la expresión (280) en el caso $d = 2$.

X.4. Desarrollos asintóticos de la sección VI.1

En esta sección calcularemos el desarrollo asintótico de $f'(\lambda)/f(\lambda)$ que hemos presentado en la ecuación (470).

El desarrollo asintótico de la función poligamma que figura en el miembro derecho de la ecuación (470) puede ser sencillamente derivado de la fórmula de Stirling [1],

$$\psi\left(\frac{\nu}{2} + \frac{1}{2} - \lambda/4\right) \sim \log(-\lambda) + \sum_{i=0}^{\infty} c_i(\nu)(-\lambda)^{-k},$$

donde los coeficientes $c_i(\nu)$ son polinomios en ν cuya expresión explícita no necesitamos.

Por otra parte, teniendo en cuenta la ecuación (473), podemos escribir asintóticamente el primer término del miembro derecho de la ecuación (470) de la siguiente manera,

$$\begin{aligned} & \frac{[\psi(-\frac{\nu}{2} + \frac{1}{2} - \frac{\lambda}{4}) - \psi(\frac{\nu}{2} + \frac{1}{2} - \frac{\lambda}{4})]}{1 - \theta \frac{\Gamma(\nu)}{\Gamma(-\nu)} \frac{\Gamma(-\frac{\nu}{2} + \frac{1}{2} - \frac{\lambda}{4})}{\Gamma(\frac{\nu}{2} + \frac{1}{2} - \frac{\lambda}{4})}} \sim \\ & \sim \sum_{N=0}^{\infty} \theta^N \left[\frac{\Gamma(\nu)}{\Gamma(-\nu)} \frac{\Gamma(-\frac{\nu}{2} + \frac{1}{2} - \frac{\lambda}{4})}{\Gamma(\frac{\nu}{2} + \frac{1}{2} - \frac{\lambda}{4})} \right]^N \left[\psi\left(-\frac{\nu}{2} + \frac{1}{2} - \frac{\lambda}{4}\right) - \psi\left(\frac{\nu}{2} + \frac{1}{2} - \frac{\lambda}{4}\right) \right] = \\ & = \sum_{N=0}^{\infty} \theta^N \left[\frac{\Gamma(\nu)}{\Gamma(-\nu)} \frac{\Gamma(-\frac{\nu}{2} + \frac{1}{2} - \frac{\lambda}{4})}{\Gamma(\frac{\nu}{2} + \frac{1}{2} - \frac{\lambda}{4})} \right]^N 4 \frac{d}{d(-\lambda)} \log \left[\frac{\Gamma(-\frac{\nu}{2} + \frac{1}{2} - \frac{\lambda}{4})}{\Gamma(\frac{\nu}{2} + \frac{1}{2} - \frac{\lambda}{4})} \right] = \\ & = \sum_{N=0}^{\infty} \frac{\theta^N}{N} 4 \frac{d}{d(-\lambda)} \left[\frac{\Gamma(\nu)}{\Gamma(-\nu)} \frac{\Gamma(-\frac{\nu}{2} + \frac{1}{2} - \frac{\lambda}{4})}{\Gamma(\frac{\nu}{2} + \frac{1}{2} - \frac{\lambda}{4})} \right]^N. \end{aligned} \tag{822}$$

De la fórmula de Stirling [1] obtenemos,

$$\log \left[\frac{\Gamma(-\frac{\nu}{2} + \frac{1}{2} - \frac{\lambda}{4})}{\Gamma(\frac{\nu}{2} + \frac{1}{2} - \frac{\lambda}{4})} \right] \sim -\nu \log\left(-\frac{\lambda}{4}\right) + \left\{ \sum_{m=1}^{\infty} a_m(\nu)(-\lambda)^{-2m} \right\}, \tag{823}$$

donde los coeficientes en la serie están dados por

$$\begin{aligned} a_m(\nu) &= \frac{2^{4m-1}}{2m+1} \left\{ \left[\left(-\frac{\nu}{2} + \frac{1}{2}\right)^{2m} - \left(\frac{\nu}{2} + \frac{1}{2}\right)^{2m} \right] + \left(\frac{\nu}{2m}\right) \times \right. \\ & \times \left[\left(-\frac{\nu}{2} + \frac{1}{2}\right)^{2m} + \left(\frac{\nu}{2} + \frac{1}{2}\right)^{2m} \right] + (2m+1) \sum_{p=1}^m \frac{B_{2p}}{p(2p-1)} \times \\ & \left. \times \binom{2m-1}{2p-2} \left[\left(\frac{\nu}{2} + \frac{1}{2}\right)^{2(m-p)+1} - \left(-\frac{\nu}{2} + \frac{1}{2}\right)^{2(m-p)+1} \right] \right\}. \end{aligned} \tag{824}$$

Por consiguiente,

$$\left[\frac{\Gamma(-\frac{\nu}{2} + \frac{1}{2} - \frac{\lambda}{4})}{\Gamma(\frac{\nu}{2} + \frac{1}{2} - \frac{\lambda}{4})} \right]^N \sim \left(-\frac{\lambda}{4}\right)^{-N\nu} \sum_{n=0}^{\infty} b_n(\nu, N) (-\lambda)^{-2n}, \tag{825}$$

donde los coeficientes $b_n(\nu, N)$ están definidos por,

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n(\nu, N) z^{-2n} := \exp \left\{ N \sum_{m=1}^{\infty} a_m(\nu) z^{-2m} \right\}. \quad (826)$$

Estos coeficientes $b_n(\nu, N)$ son polinomios en ν y N dados por,

$$b_n(\nu, N) = \sum_{r_1, r_2, \dots, r_n} N^{r_1 + r_2 + \dots + r_n} \cdot \frac{a_1(\nu)^{r_1} a_2(\nu)^{r_2} \dots a_n(\nu)^{r_n}}{r_1! r_2! \dots r_n!}, \quad (827)$$

donde la suma comprende el conjunto de todos los enteros positivos r_1, r_2, \dots, r_n tales que $r_1 + 2r_2 + \dots + nr_n = n$.

Reemplazando ahora la ecuación (825) en la ecuación (822) obtenemos,

$$\begin{aligned} \frac{[\psi(-\frac{\nu}{2} + \frac{1}{2} - \frac{\lambda}{4}) - \psi(\frac{\nu}{2} + \frac{1}{2} - \frac{\lambda}{4})]}{4 \left[1 - \beta(\gamma) \frac{\Gamma(-\frac{\nu}{2} + \frac{1}{2} - \frac{\lambda}{4})}{\Gamma(\frac{\nu}{2} + \frac{1}{2} - \frac{\lambda}{4})} \right]} &\sim - \sum_{N=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} 4^{N\nu} \times \\ &\times \beta(\gamma)^N \left(\nu + \frac{2n}{N} \right) b_n(\nu, N) (-\lambda)^{-N\nu - 2n - 1} := \\ &:= \sum_{N=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} C_{N,n}(\nu, \theta) (-\lambda)^{-N\nu - 2n - 1}. \end{aligned} \quad (828)$$

Las ecuaciones (822) y (828) conducen finalmente al desarrollo asintótico para $f'(\lambda)/f(\lambda)$ dado en la ecuación (476).

X.5. Trazas de la sección VI.2

En esta sección describimos brevemente el cálculo de las trazas utilizado en la sección VI.2.2.

A partir de (528) obtenemos para el núcleo de $G_{\infty}(\lambda)$ en la diagonal,

$$G_{\infty}(x, x; \mu^2) = -\frac{\pi}{2} \frac{x}{\sin \pi \nu J_{\nu}(\mu)} \{ J_{-\nu}(\mu) J_{\nu}^2(\mu x) - J_{\nu}(\mu) J_{\nu}(\mu x) J_{-\nu}(\mu x) \}. \quad (829)$$

Para evaluar la traza de la resolvente hemos utilizado las primitivas [90, 72],

$$\int x J_{\nu}^2(\mu x) dx = \frac{x^2}{2} \{ J_{\nu}(x \mu)^2 - J_{\nu-1}(x \mu) J_{\nu+1}(x \mu) \}, \quad (830)$$

y,

$$\int x J_\nu(\mu x) J_{-\nu}(\mu x) dx = \frac{-\nu^2}{\mu^2 \Gamma(1-\nu) \Gamma(1+\nu)} \left[{}_1F_2(\{-1/2\}, \{-\nu, \nu\}, -x^2 \mu^2) - 1 \right], \quad (831)$$

donde,

$${}_1F_2(\{-1/2\}, \{-\nu, \nu\}, -x^2 \mu^2) = -\frac{\pi x^2 \mu^2 \operatorname{csc}(\pi \nu)}{4 \nu} \times \{J_{-1-\nu}(x \mu) J_{-1+\nu}(x \mu) + 2 J_{-\nu}(x \mu) J_\nu(x \mu) + J_{1-\nu}(x \mu) J_{1+\nu}(x \mu)\}. \quad (832)$$

Estas primitivas, junto con la relación,

$$J_{\nu-1}(z) + J_{\nu+1}(z) = \frac{2\nu}{z} J_\nu(z), \quad (833)$$

conducen directamente a la ecuación (544).

Análogamente, el núcleo de $G_0(\lambda)$ en la diagonal está dado por,

$$G_0(x, x; \mu^2) = -\frac{\pi}{2} \frac{x}{\sin \pi \nu J_{-\nu}(\mu)} \{J_{-\nu}(\mu) J_{-\nu}(\mu x) J_\nu(\mu x) - J_\nu(\mu) J_{-\nu}^2(\mu x)\}. \quad (834)$$

El mismo argumento conduce a la ecuación (545).

X.6. Trazas de la sección VII.1

En esta sección describiremos brevemente el cálculo de las trazas utilizadas en la sección VII.1.2.

De las ecuaciones (624) y (625) obtenemos la traza matricial de $G^0(x, x', \lambda)$ en la diagonal $x = x'$,

$$\begin{aligned} \operatorname{tr} \{G^0(x, x; \lambda)\} &= -\frac{\pi x \lambda \operatorname{cosec}(\nu \pi)}{2 J_\nu(\lambda)} \{J_{-\nu}(\lambda) J_{\nu-1}^2(x \lambda) + \\ &+ J_{-\nu}(\lambda) J_\nu^2(x \lambda) - J_\nu(\lambda) J_\nu(x \lambda) J_{-\nu}(x \lambda) + J_\nu(\lambda) J_{\nu-1}(x \lambda) J_{1-\nu}(x \lambda)\}, \end{aligned} \quad (835)$$

cuyo comportamiento en proximidades del origen está dado por,

$$\operatorname{tr} \{G^0(x, x; \lambda)\} = -\frac{4^{1/2-\nu} \pi \operatorname{cosec}(\nu \pi) J_{-\nu}(\lambda)}{\lambda^{1-2\nu} \Gamma^2(\nu) J_\nu(\lambda)} x^{-1+2\nu} + O(x), \quad (836)$$

de modo que es integrable en $[0, 1]$. Para calcular esta integral hemos utilizado las primitivas [90],

$$\int x J_\nu^2(\lambda x) dx = \frac{x^2}{2} \{J_\nu(x\lambda)^2 - J_{\nu-1}(x\lambda) J_{\nu+1}(x\lambda)\}, \quad (837)$$

$$\int x J_\nu(\lambda x) J_{-\nu}(\lambda x) dx = \quad (838)$$

$$= \frac{-\nu^2}{\lambda^2 \Gamma(1-\nu) \Gamma(1+\nu)} [{}_1F_2(\{-1/2\}, \{-\nu, \nu\}, -x^2 \lambda^2) - 1], \quad (839)$$

donde,

$${}_1F_2(\{-1/2\}, \{-\nu, \nu\}, -x^2 \lambda^2) = -\frac{\pi x^2 \lambda^2 \operatorname{csc}(\pi \nu)}{4\nu} \times \quad (840)$$

$$\{J_{-1-\nu}(x\lambda) J_{-1+\nu}(x\lambda) + 2 J_{-\nu}(x\lambda) J_\nu(x\lambda) + J_{1-\nu}(x\lambda) J_{1+\nu}(x\lambda)\}.$$

junto con la relación,

$$J_{\nu-1}(z) + J_{\nu+1}(z) = \frac{2\nu}{z} J_\nu(z). \quad (841)$$

La traza de la resolvente correspondiente a $\beta = 0$ resulta entonces,

$$\operatorname{Tr}(D^0 - \lambda)^{-1} = \int_0^1 \operatorname{tr} \{G^0(x, x; \lambda)\} dx = \frac{2\nu - 1}{\lambda} - \frac{J_{\nu-1}(\lambda)}{J_\nu(\lambda)}. \quad (842)$$

Análogamente, la traza matricial de $G^\infty(x, x'; \lambda)$ en la diagonal $x = x'$ resulta,

$$\operatorname{tr} \{G^\infty(x, x; \lambda)\} = \frac{\pi x \lambda \operatorname{cosec}(\nu\pi)}{2 J_{-\nu}(\lambda)} \{-J_{-\nu}(\lambda) J_\nu(x\lambda) J_{-\nu}(x\lambda) + \quad (843)$$

$$+ J_{-\nu}(\lambda) J_{\nu-1}(x\lambda) J_{1-\nu}(x\lambda) + J_\nu(\lambda) J_{-\nu}^2(x\lambda) + J_\nu(\lambda) J_{1-\nu}^2(x\lambda)\},$$

cuyo comportamiento en el origen está dado por,

$$\operatorname{tr} \{G^\infty(x, x; \lambda)\} = \frac{\pi \lambda^{1-2\nu} \operatorname{cosec}(\nu\pi) J_\nu(\lambda)}{4^{1/2-\nu} \Gamma^2(1-\nu) J_{-\nu}(\lambda)} x^{1-2\nu} + O(x). \quad (844)$$

Podemos entonces calcular la traza de la resolvente correspondiente a la extensión $\beta = \infty$,

$$\operatorname{Tr}(D^\infty - \lambda)^{-1} = \int_0^1 \operatorname{tr} \{G^\infty(x, x; \lambda)\} dx = \frac{J_{1-\nu}(\lambda)}{J_{-\nu}(\lambda)}. \quad (845)$$

De las ecuaciones (842) y (845) obtenemos las expresiones (634) y (635).

Nótese además que,

$$\begin{aligned} \partial_\lambda \operatorname{tr} \{G^\infty(x, x; \lambda)\} &= \\ &= \frac{2^{2\nu} \lambda^{-2\nu} [1 + (1/2 - \nu) \pi J_\nu(\lambda) J_{-\nu}(\lambda) \operatorname{cosec}(\nu\pi)]}{J_{-\nu}(\lambda)^2 \Gamma(1-\nu)^2} x^{1-2\nu} + O(x). \end{aligned} \quad (846)$$

X.7. Desarrollos asintóticos de las Secciones VI.2 y VII.1

Para desarrollar asintóticamente la traza de la resolvente utilizamos el desarrollo de Hankel para las funciones de Bessel, que brevemente exponemos en esta sección.

Para $|z| \rightarrow \infty$, con ν fijo y $|\arg z| < \pi$, se verifica [1],

$$J_\nu(z) \sim \left(\frac{2}{\pi z}\right)^{\frac{1}{2}} \{P(\nu, z) \cos \chi(\nu, z) - Q(\nu, z) \sin \chi(\nu, z)\}, \quad (847)$$

y,

$$N_\nu(z) \sim \left(\frac{2}{\pi z}\right)^{\frac{1}{2}} \{P(\nu, z) \sin \chi(\nu, z) + Q(\nu, z) \cos \chi(\nu, z)\}, \quad (848)$$

donde,

$$\chi(\nu, z) = z - \left(\frac{\nu}{2} + \frac{1}{4}\right) \pi, \quad (849)$$

$$P(\nu, z) \sim \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \Gamma\left(\frac{1}{2} + \nu + 2k\right)}{(2k)! \Gamma\left(\frac{1}{2} + \nu - 2k\right)} \frac{1}{(2z)^{2k}}, \quad (850)$$

y,

$$Q(\nu, z) \sim \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \Gamma\left(\frac{1}{2} + \nu + 2k + 1\right)}{(2k + 1)! \Gamma\left(\frac{1}{2} + \nu - 2k - 1\right)} \frac{1}{(2z)^{2k+1}}. \quad (851)$$

Además, $P(-\nu, z) = P(\nu, z)$ y $Q(-\nu, z) = Q(\nu, z)$, pues estas funciones dependen solamente de ν^2 (véase [1].) Por consiguiente,

$$J_\nu(z) \sim \frac{e^{-i\sigma z} e^{i\sigma\pi\left(\frac{\nu}{2} + \frac{1}{4}\right)}}{\sqrt{2\pi z}} \{P(\nu, z) - i\sigma Q(\nu, z)\}, \quad (852)$$

donde $\sigma = 1$ si $\Im(z) > 0$ en el semiplano superior y $\sigma = -1$ si $\Im(z) < 0$. Análogamente,

$$N_\nu(z) \sim i\sigma \frac{e^{-i\sigma z} e^{i\sigma\pi\left(\frac{\nu}{2} + \frac{1}{4}\right)}}{\sqrt{2\pi z}} \{P(\nu, z) - i\sigma Q(\nu, z)\}, \quad (853)$$

donde $\sigma = 1$ si $\Im(z) > 0$ y $\sigma = -1$ si $\Im(z) < 0$. En estas ecuaciones,

$$P(\nu, z) - i\sigma Q(\nu, z) \sim \sum_{k=0}^{\infty} \langle \nu, k \rangle \left(\frac{-i\sigma}{2z}\right)^k, \quad (854)$$

donde los coeficientes,

$$\langle \nu, k \rangle = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2} + \nu + k\right)}{k! \Gamma\left(\frac{1}{2} + \nu - k\right)} = \langle -\nu, k \rangle \quad (855)$$

son los símbolos de Hankel.

X.7 DESARROLLOS ASINTÓTICOS DE LAS SECCIONES VI.2 Y VII.1

El cociente de dos funciones de Bessel admite entonces el desarrollo asintótico,

$$\frac{J_{\nu_1}(z)}{J_{\nu_2}(z)} \sim e^{i\sigma\frac{\pi}{2}(\nu_1-\nu_2)} \frac{P(\nu_1, z) - i\sigma Q(\nu_1, z)}{P(\nu_2, z) - i\sigma Q(\nu_2, z)}, \quad (856)$$

donde $\sigma = 1$ para $\Im(z) > 0$ y $\sigma = -1$ para $\Im(z) < 0$. Los coeficientes de este desarrollo asintótico pueden ser fácilmente calculados, a todo orden, a partir de la ecuación (854),

$$\frac{P(\nu_1, z) \pm iQ(\nu_1, z)}{P(\nu_2, z) \pm iQ(\nu_2, z)} \sim 1 + \left(\langle \nu_1, 1 \rangle - \langle \nu_2, 1 \rangle \right) \left(\frac{\pm i}{2z} \right) + O\left(\frac{1}{z^2} \right). \quad (857)$$

En particular,

$$\frac{J_\nu(z)}{J_{-\nu}(z)} \sim e^{i\sigma\pi\nu} \frac{P(\nu, z) - i\sigma Q(\nu, z)}{P(-\nu, z) - i\sigma Q(-\nu, z)} = e^{i\sigma\pi\nu}, \quad (858)$$

pues $P(\nu, z)$ y $Q(\nu, z)$ son funciones pares en ν .

Análogamente, las derivadas de las funciones de Bessel admiten los siguientes desarrollos asintóticos [1] para $|\arg z| < \pi$,

$$J'_\nu(z) \sim -\frac{2}{\sqrt{2\pi z}} \{R(\nu, z) \sin \chi(\nu, z) + S(\nu, z) \cos \chi(\nu, z)\}, \quad (859)$$

y,

$$N'_\nu(z) \sim \frac{2}{\sqrt{2\pi z}} \{R(\nu, z) \cos \chi(\nu, z) - S(\nu, z) \sin \chi(\nu, z)\}, \quad (860)$$

donde,

$$R(\nu, z) \sim \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\nu^2 + (2k)^2 - 1/4}{\nu^2 - (2k - 1/2)^2} \frac{\langle \nu, 2k \rangle}{(2z)^{2k}}, \quad (861)$$

y,

$$S(\nu, z) \sim \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\nu^2 + (2k+1)^2 - 1/4}{\nu^2 - (2k+1 - 1/2)^2} \frac{\langle \nu, 2k+1 \rangle}{(2z)^{2k+1}}. \quad (862)$$

Por lo tanto,

$$J'_\nu(z) \sim \mp i \frac{e^{\mp iz} e^{\pm i\pi(\frac{\nu}{2} + \frac{1}{4})}}{\sqrt{2\pi z}} \{R(\nu, z) \mp i S(\nu, z)\}, \quad (863)$$

donde el signo superior es válido para $\Im(\lambda) > 0$, y el inferior para $\Im(\lambda) < 0$. Se verifica también

$$R(\nu, z) \pm i S(\nu, z) = P(\nu, z) \pm i Q(\nu, z) + T_\pm(\nu, z), \quad (864)$$

con,

$$T_\pm(\nu, z) \sim \sum_{k=1}^{\infty} (2k-1) \langle \nu, k-1 \rangle \left(\frac{\pm i}{2z} \right)^k. \quad (865)$$

X.7 DESARROLLOS ASINTÓTICOS DE LAS SECCIONES VI.2 Y VII.1

Obtenemos entonces,

$$\frac{J'_\nu(z)}{J_\nu(z)} \sim \mp i \left\{ 1 + \frac{T_\mp(\nu, z)}{P(\nu, z) \mp iQ(\nu, z)} \right\}, \quad (866)$$

donde el signo superior vale para $\Im(\lambda) > 0$, y el inferior para $\Im(\lambda) < 0$. Los coeficientes del desarrollo asintótico del miembro derecho de la ecuación (866) pueden obtenerse fácilmente a partir de las ecuaciones (854) y (865),

$$\frac{T_\pm(\nu, z)}{P(\nu, z) \pm iQ(\nu, z)} = \pm \frac{i}{2z} + O\left(\frac{1}{z^2}\right) \quad (867)$$

Finalmente, como los símbolos de Hankel son pares en ν (véanse las ecuaciones (855), (854), (865) y (866)) se verifica,

$$\frac{J'_\nu(z)}{J_\nu(z)} \sim \frac{J'_{-\nu}(z)}{J_{-\nu}(z)}. \quad (868)$$

* * *

X.7 DESARROLLOS ASINTÓTICOS DE LAS SECCIONES VI.2 Y VII.1

Parte XI
Agradecimientos

-
- Agradezco la experiencia de mi Director Horacio Falomir en enseñar a reconocer los aspectos relevantes de un problema, su tenaz paciencia para revelarme los errores que me empeñé en repetir y su vocación para renovar mi entusiasmo luego de mis tantos intentos fallidos. Le agradezco todo lo que he aprendido durante la elaboración de esta Tesis y el trabajo que ello le ha demandado.
 - Agradezco a Mariel Santangelo, María Amelia Muschietti, Rafael Benguria y Fidel Schaposnik el haber aceptado conformar el jurado de esta Tesis.
 - Agradezco nuevamente a Mariel Santangelo su apostólica dedicación a la tarea de aprender, que transmite permanente motivación a los que tenemos el privilegio de trabajar junto a ella.
 - Agradezco a Gabriela y Karin por brindarme atención y consejos siempre que los necesité.
 - Agradezco conocer a Los Justos: Diego el Esenio, Leo el Paciente Peregrino, Nico, Guille y Ale, que descubren con placer, que cultivan un jardín, que justifican el mal que se ha hecho y prefieren que los demás tengan razón.
 - Agradezco a Laura su contagiosa capacidad de sorprenderse y de descubrir lo extraordinario en lo cotidiano.
 - Agradezco a mi familia el agrado que siento al mencionarlos y que testimonien que cada cosa engendra su semejante.
 - Agradezco al Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas, a la Comisión de Investigaciones Científicas de la Provincia de Buenos Aires, a la Fundación Antorchas, al Instituto de Física de La Plata y a la Universidad Nacional de La Plata por el apoyo que he recibido y que brindan a quienes ejercen esta profesión.

* * *

Parte XII
Bibliografía

Bibliografía

- [1] M. Abramowitz e I. Stegun editors. “Handbook of Mathematical Functions”. Dover Publications, New York (1970).
- [2] R. Adami y A. Teta, “On the Aharonov-Bohm Effect,” *Lett. Math. Phys.* **43**, 43 (1998).
- [3] Y. Aharonov y D. Bohm, “Significance Of Electromagnetic Potentials In The Quantum Theory,” *Phys. Rev.* **115**, 485 (1959).
- [4] N.I. Akhiezer e I.M. Glatzman, “Theory of Linear Operators in Hilbert Spaces. Vol. II,” Ungar Pub. Co., New York (1963).
- [5] M. Asorey, A. Ibert y G. Marmo, “Global theory of quantum boundary conditions and topology change,” arXiv:hep-th/0403048.
- [6] M.F. Atiyah, V.K. Patodi e I.M. Singer, “Spectral Asymmetry And Riemannian Geometry 1,” *Math. Proc. Cambridge Phil. Soc.* **77**, 43 (1975).
- [7] M.F. Atiyah, V.K. Patodi e I.M. Singer, “Spectral Asymmetry And Riemannian Geometry 3,” *Math. Proc. Cambridge Phil. Soc.* **79**, 71 (1980).
- [8] E. Aurell y P. Salomonson, “On functional determinants of Laplacians in polygons and simplices,” *Commun. Math. Phys.* **165**, 233 (1994); “Further results on functional determinants of laplacians in simplicial complexes,” arXiv:hep-th/9405140.
- [9] I.G. Avramidi, “Covariant algebraic method for calculation of the low-energy heat kernel,” *J. Math. Phys.* **36**, 5055 (1995).
- [10] I.G. Avramidi, “Heat kernel approach in quantum field theory,” *Nucl. Phys. Proc. Suppl.* **104**, 3 (2002).
- [11] V. Balasubramanian, J. de Boer, E. Keski-Vakkuri y S.F. Ross, “Supersymmetric conical defects: Towards a string theoretic description of black hole formation,” *Phys. Rev. D* **64**, 064011 (2001).
- [12] M. Bawin and S.A. Coon, “The singular inverse square potential, limit cycles and self-adjoint extensions,” arXiv:quant-ph/0302199.

- [13] D. Birmingham, K.S. Gupta y S. Sen, “Near-horizon conformal structure of black holes,” *Phys. Lett. B* **505**, 191 (2001).
- [14] B. Basu-Mallick, P.K. Ghosh y K.S. Gupta, “Inequivalent Quantizations of the Rational Calogero Model,” *Phys. Lett. A* **311**, 87 (2003).
- [15] B. Basu-Mallick, P.K. Ghosh y K.S. Gupta, “Novel Quantum States of the Rational Calogero Models Without the Confining Interaction,” *Nucl. Phys. B* **659**, 437 (2003).
- [16] C.G. Beneventano, M. de Francia y E.M. Santangelo, “Dirac fields in the background of a magnetic flux string and spectral boundary conditions,” *Int. J. Mod. Phys. A* **14**, 4749 (1999); C.G. Beneventano, M. de Francia, K. Kirsten y E.M. Santangelo, “Casimir energy of massive MIT fermions in a Bohm-Aharonov background,” *Phys. Rev. D* **61**, 085019 (2000).
- [17] G. Bonneau, J. Faraut y G. Valent, “Self-adjoint extensions of operators and the teaching of quantum mechanics,” *Am. J. Phys.* **69**, 322 (2001).
- [18] M. Bordag, U. Mohideen y V.M. Mostepanenko, “New developments in the Casimir effect,” *Phys. Rept.* **353**, 1 (2001)
- [19] M. Bordag, K. Kirsten y S. Dowker, “Heat kernels and functional determinants on the generalized cone,” *Commun. Math. Phys.* **182**, 371 (1996).
- [20] L. Brink, T.H. Hansson y M.A. Vasiliev, “Explicit solution to the N body Calogero problem,” *Phys. Lett. B* **286**, 109 (1992).
- [21] J. Brüning y R. Seeley, “The resolvent expansion for second order regular singular operators,” *J. Func. Anal.* **73**, 369 (1987).
- [22] I.L. Buchbinder, S.D. Odintsov y I.L. Shapiro, “Effective Action in Quantum Gravity,” IOP Publishing, Bristol and Philadelphia (1992).
- [23] W. Bulla y F. Gesztesy, “Deficiency Indices And Singular Boundary Conditions In Quantum Mechanics,” *J. Math. Phys.* **26**, 2520 (1985).
- [24] A.P. Calderón y A. Zygmund, “Singular integral operators and differential equations,” *Am. J. Math.* **79**, 901 (1957).
- [25] C.J. Callias, “The heat equation with singular coefficients. I: Operators of the form $-d^2/dx^2 + \kappa/x^2$ in dimension 1,” *Commun. Math. Phys.* **88**, 357 (1983).
- [26] C. Callias y C.H. Taubes, “Functional Determinants In Euclidean Yang-Mills Theory,” *Commun. Math. Phys.* **77**, 229 (1980).

- [27] F. Calogero, "Solution Of A Three-Body Problem In One-Dimension," *Jour. Math. Phys.* **10**, 2191 (1969); "Ground State Of One-Dimensional N Body System," *Jour. Math. Phys.* **10**, 2197 (1969); "Solution Of The One-Dimensional N Body Problems With Quadratic And/Or Inversely Quadratic Pair Potentials," *Jour. Math. Phys.* **12**, 419 (1971).
- [28] H.E. Camblong, L.N. Epele, H. Fanchiotti y C.A. Garcia Canal, "Dimensional transmutation and dimensional regularization in quantum mechanics. I: General theory," *Annals Phys.* **287**, 14 (2001); "Dimensional transmutation and dimensional regularization in quantum mechanics. II: Rotational invariance," *Annals Phys.* **287**, 57 (2001).
- [29] S. Carlip y C. Teitelboim, "The Off-shell black hole," *Class. Quant. Grav.* **12**, 1699 (1995).
- [30] H.S. Carslaw, *Proc. Lond. Math. Soc.* **20** 121 (1898).
- [31] P. Chang y J.S. Dowker, "Vacuum energy on orbifold factors of spheres," *Nucl. Phys. B* **395**, 407 (1993); "Polyhedral cosmic strings," *Phys. Rev. D* **46**, 3458 (1992).
- [32] J.J. Cheeger, "Spectral geometry of singular Riemannian spaces," *Differential Geometry* **18**, 575 (1983).
- [33] P. Claus, M. Derix, R. Kallosh, J. Kumar, P.K. Townsend y A. Van Proeyen, "Black holes and superconformal mechanics," *Phys. Rev. Lett.* **81**, 4553 (1998).
- [34] G. Cognola, K. Kirsten y L. Vanzo, "Free and selfinteracting scalar fields in the presence of conical singularities," *Phys. Rev. D* **49**, 1029 (1994).
- [35] S.A. Coon y B.R. Holstein, "Anomalies in Quantum Mechanics: the $1/r^2$ Potential," [quant-ph/0202091](https://arxiv.org/abs/quant-ph/0202091) (2002).
- [36] F. Cooper, A. Khare y U. Sukhatme, "Supersymmetry and Quantum Mechanics," *Phys. Rept.* **251**, 267 (1995).
- [37] B. Freedman y F. Cooper, "Fun With Supersymmetric Quantum Mechanics," *Physica* **15D**, 138 (1985).
- [38] F. Cooper y B. Freedman, "Aspects Of Supersymmetric Quantum Mechanics," *Annals Phys.* **146**, 262 (1983).
- [39] R. Courant y D. Hilbert "Methods of Mathematical Physics. Volume I," Wiley-Interscience (1989).
- [40] R. Courant y D. Hilbert "Methods of Mathematical Physics. Volume II," Wiley-Interscience (1989).

- [41] A.K. Das, “Supersymmetry in singular quantum mechanics,” arXiv:hep-th/0005042 (2000).
- [42] P. de Sousa Gerbert, “Fermions In An Aharonov-Bohm Field And Cosmic Strings,” *Phys. Rev. D* **40**, 1346 (1989).
- [43] A.K. Das y S.A. Pernice, “Supersymmetry and singular potentials,” *Nucl. Phys. B* **561**, 357 (1999). “Comment on “Supersymmetry in the half-oscillator - Revisited”,” arXiv:hep-th/0207112 (2002).
- [44] V. De Alfaro, S. Fubini y G. Furlan, “Conformal Invariance In Quantum Mechanics,” *Nuovo Cim. A* **34**, 569 (1976).
- [45] L. De Nardo, D. V. Fursaev and G. Miele, “Heat-kernel coefficients and spectra of the vector Laplacians on spherical domains with conical singularities,” *Class. Quant. Grav.* **14**, 1059 (1997).
- [46] S. Deser, R. Jackiw y G. t’Hooft, “Three-dimensional Einstein gravity: dynamics of flat space,” *Annals Phys.* **152**, 220 (1984).
- [47] S. Deser y R. Jackiw, “Three-dimensional cosmological gravity: dynamics of constant curvature,” *Annals Phys.* **153**, 405 (1984).
- [48] J.S. Dowker, “Quantum Field Theory On A Cone,” *J. Phys. A* **10**, 115 (1977); “Functional determinants on spheres and sectors,” *J. Math. Phys.* **35**, 4989 (1994).
- [49] J.S. Dowker, “Two simple topics in spectral theory,” arXiv:hep-th/0107171.
- [50] J.S. Dowker, P. Gilkey y K. Kirsten, “On properties of the asymptotic expansion of the heat trace for the N/D problem,” *Int. J. Math.* **12**, 505 (2001).
- [51] J.S. Dowker y K. Kirsten, “Smearred heat-kernel coefficients on the ball and generalized cone,” *J. Math. Phys.* **42**, 434 (2001).
- [52] E. Elizalde, S.D. Odintsov, A. Romeo, A.A. Bytsenko y S. Zerbini, “Zeta regularization techniques with applications,” Singapore: World Scientific (1994).
- [53] G. Esposito, “Dirac operator and spectral geometry,” Cambridge University Press (1998).
- [54] H. Falomir y P.A.G. Pisani, “Hamiltonian self-adjoint extensions for (2+1)-dimensional Dirac particles,” *J. Phys. A.: Mathematical and General* **34**, 1 (2001).
- [55] H. Falomir y P.A.G. Pisani, “Self-adjoint extensions and SUSY breaking in Supersymmetric Quantum Mechanics,”; enviado para su publicación al *J. Phys. A* (2004).
- [56] H. Falomir, M.A. Muschietti y P.A.G. Pisani, “On the resolvent and spectral functions of a second order differential operator with a regular singularity,” aceptado para su publicación en *Journal of Math. Phys.*; arXiv:math-ph/0404034.

- [57] H. Falomir, M.A. Muschiatti, P.A.G. Pisani y R. Seeley, “Unusual poles of the ζ -functions for some regular singular differential operators,” *J. Phys. A* **36**, 9991 (2003).
- [58] H. Falomir, P.A.G. Pisani y A. Wipf, “Pole structure of the Hamiltonian ζ -function for a singular potential,” *J. Phys. A.: Mathematical and General* **35**, (2002) 5427.
- [59] K. Fujikawa, “Path Integral Measure For Gauge Invariant Fermion Theories,” *Phys. Rev. Lett.* **42**, 1195 (1979); “Path Integral For Gauge Theories With Fermions,” *Phys. Rev.* **D21**, 2848 (1979).
- [60] D.V. Fursaev, “The Heat kernel expansion on a cone and quantum fields near cosmic strings,” *Class. Quant. Grav.* **11**, 1431 (1994); “Spectral geometry and one loop divergences on manifolds with conical singularities,” *Phys. Lett. B* **334**, 53 (1994).
- [61] D.V. Fursaev y G. Miele, “Cones, Spins and Heat Kernels,” *Nucl. Phys. B* **484**, 697 (1997).
- [62] D.V. Fursaev y G. Miele, “Finite temperature scalar field theory in static de Sitter space,” *Phys. Rev. D* **49**, 987 (1994)
- [63] D.V. Fursaev y S.N. Solodukhin, “On the description of the Riemannian geometry in the presence of conical defects,” *Phys. Rev. D* **52**, 2133 (1995).
- [64] J.A.H. Futterman, F.A. Handler y R.A. Matzner, “Scattering from Black Holes,” Cambridge University Press (1988).
- [65] A. Gangopadhyaya y J.V. Mallow, “Supersymmetry in the half-oscillator - Revisited,” arXiv:hep-th/0206133.
- [66] P.B. Gilkey, “Invariance Theory, the Heat Equation and the Atiyah-Singer Index Theorem,” CRC Press (1995).
- [67] Ver el Lema 1.1.4 en [66], pág. 8.
- [68] Ver el Lema 1.6.4 en [66], pág. 54.
- [69] G.W. Gibbons y P.K. Townsend, “Black holes and Calogero models,” *Phys. Lett. B* **454**, 187 (1999).
- [70] V.I. Gorbachuk y M.L. Gorbachuk, “Boundary Value Problems for Operator Differential Equations,” Kluwer Academic Publishers, Dordrecht (1991).
- [71] T.R. Govindarajan, V. Suneeta y S. Vaidya, “Horizon states for AdS black holes,” *Nucl. Phys. B* **583**, 291 (2000).
- [72] I.S. Gradshteyn y I.M. Ryzhik, “Table of integrals, series and products,” Sixth Edition, Academic Press, San Diego (2000).

- [73] G. Grubb, “Heat operator trace expansions and index for general Atiyah-Patodi-Singer boundary problems,” *Commun. Part. Diff. Equat.* **17**, 2031 (1992).
- [74] G. Grubb, “Trace expansions for pseudodifferential boundary problems for Dirac operators and more general systems,” *Ark. Math.* **37**, 45 (1999).
- [75] G. Grubb y R. Seeley, “Asymptotic expansion of the Atiyah-Patodi-Singer operator,” *C. R. Acad. Sci., Paris, Ser. I* **317**, 1123 (1993).
- [76] G. Grubb y R. Seeley, “Weakly parametric pseudodifferential operators and problems,” *Invent. Math.* **121**, 481 (1995).
- [77] G. Grubb y R. Seeley, “Zeta and eta functions for Atiyah-Patodi-Singer operators,” *J. Geom. Anal.* **6**, 31 (1996).
- [78] N. Gurappa y P.K. Panigrahi, “Equivalence of the Calogero-Sutherland model to free harmonic oscillators,” *Phys. Rev. B* **59**, R2490 (1999)
- [79] S.W. Hawking, “Zeta Function Regularization Of Path Integrals In Curved Space-Time,” *Commun. Math. Phys.* **55**, 133 (1977).
- [80] A. Jevicki y J. P. Rodrigues, “Singular Potentials And Supersymmetry Breaking,” *Phys. Lett. B* **146**, 55 (1984).
- [81] Y.b. Kim, O.K. Kwon y J.s. Sohn, “Vacuum structure and global strings with conical singularities,” *Phys. Lett. B* **549**, 221 (2002).
- [82] K. Kirsten, “Spectral Functions in Mathematics and Physics,” Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, FL (2001).
- [83] S.G. Krantz, “Partial Differential Equations and Complex Analysis,” CRC Press (1992).
- [84] M.G. Kreĭn, “On Hermitian Operators with Deficiency Indices One,” *Dokl. Akad. Nauk. SSSR* **43** 339 (1944). In Russian.
- [85] M.G. Kreĭn, “Resolvents of Hermitian Operators with Deficect Index (m, m) ,” *Dokl. Akad. Nauk. SSSR* **52** 657 (1946). In Russian.
- [86] M.Y. Kuchiev, “Reflection, radiation and interference for black holes,” *Phys. Rev. D* **69**, 124031 (2004); “Reflection from black holes and space-time topology,” *Europhys. Lett.* **65**, 445 (2004).
- [87] M.Y. Kuchiev y V.V. Flambaum, “Scattering of scalar particles by a black hole,” *Phys. Rev. D* **70**, 044022 (2004); “Reflection on event horizon and escape of particles from confinement inside black holes,” arXiv:gr-qc/0407077.

- [88] F. Larsen y F. Wilczek, “Renormalization of black hole entropy and of the gravitational coupling constant,” Nucl. Phys. B **458**, 249 (1996).
- [89] L. Lathouwers, “The Hamiltonian $H = -\frac{1}{2} \frac{d^2}{dx^2} + \frac{x^2}{2} + \frac{\lambda}{x^2}$ reobserved,” J. Math. Phys. **16** 1393 (1975).
- [90] *Mathematica 4*. Wolfram Research, Inc., Champaign, USA (1999).
- [91] S.G. Mikhlin, “On the multipliers of Fourier integrals,” Dokl. Akad. Nauk. SSSR **109**, 701 (1956); “Multidimensional Singular Integral Equations,” Pergamon Press, New York (1965).
- [92] K.A. Milton, “The Casimir effect: Recent controversies and progress,” J. Phys. A **37**, R209 (2004).
- [93] E.A. Mooers, “Heat kernel asymptotics on manifolds with conic singularities,” Journal d’Analyse Mathématique **78**, 1 (1999).
- [94] V. Moretti y N. Pinamonti, “Aspects of hidden and manifest $SL(2, \mathbb{R})$ symmetry in 2D near-horizon black-hole backgrounds,” Nucl. Phys. B **647**, 131 (2002).
- [95] H. Nicolai, “Supersymmetry And Spin Systems,” J. Phys. A **9**, 1497 (1976).
- [96] M. A. Olshanetsky y A. M. Perelomov, “Classical Integrable Finite Dimensional Systems Related To Lie Algebras,” Phys. Rep. **71**, 313 (1981); “Quantum Integrable Systems Related To Lie Algebras,” Phys. Rept. **94**, 313 (1983).
- [97] A.P. Polychronakos, “Boundary Conditions, Vacuum Quantum Numbers And The Index Theorem,” Nucl. Phys. B **283**, 268 (1987); “Induced Vacuum Quantum Numbers In (2+1)-Dimensions,” Nucl. Phys. B **278**, 207 (1986).
- [98] A.P. Polychronakos, “Exchange operator formalism for integrable systems of particles,” Phys. Rev. Lett. **69**, 703 (1992).
- [99] A.P. Polychronakos, “Quasihole wavefunctions for the Calogero model,” Mod. Phys. Lett. A **11**, 1273 (1996).
- [100] D. Ray e I.M. Singer, “R-torsion and the Laplacian on Riemannian manifolds,” Adv. Math. **7**, 145 (1971).
- [101] M. Reed y B. Simon, “Methods of Modern Mathematical Physics, Vol. I - II,” Academic Press, New York (1980).
- [102] Véase el Teorema II.4 en [101], Vol. I, pág. 43.
- [103] Véase la sección VIII.4 en [101], Vol. I, pág. 264.
- [104] Véase el Teorema X.1 [101], Vol. II, pág. 136.

- [105] Véase la Proposición 2 en [101], Vol. II, pág. 150.
- [106] Véase el Teorema X.25 en [101], Vol. II, pág. 180.
- [107] V.N. Romanov y A.S. Schwarz, “Anomalies and elliptic operators,” *Teor. Mat. Fiz.* **41**, 190 (1979).
- [108] P. Roy y R. Roychoudhury, “On The Question Of Degenerate States In Supersymmetric Quantum Mechanics,” *Phys. Rev.* **D32**, 1597 (1995).
- [109] P. Salomonson y J.W. van Holten, “Fermionic Coordinates And Supersymmetry In Quantum Mechanics,” *Nucl. Phys. B* **196**, 509 (1982).
- [110] N. Sanchez, “The Wave Scattering Theory And The Absorption Problem For A Black Hole,” *Phys. Rev. D* **16**, 937 (1977); “Absorption And Emission Spectra Of A Schwarzschild Black Hole,” *Phys. Rev. D* **18**, 1030 (1978); “Elastic Scattering Of Waves By A Black Hole,” *Phys. Rev. D* **18**, 1798 (1978).
- [111] E.M. Santangelo, “Evaluation of Casimir energies through spectral functions,” *Theor. Math. Phys.* **131**, 527 (2002) [*Teor. Mat. Fiz.* **131**, 98 (2002)].
- [112] R.T. Seeley, “Complex Powers of an Elliptic Operator,” *A. M. S. Proc. Symp. Pure Math.* **10**, 288 (1967).
- [113] R.T. Seeley, “The resolvent of an elliptic boundary problem,” *Am. Journ. Math.* **91**, 889 (1969).
- [114] R.T. Seeley, “Analytic extension of the trace associated with elliptic boundary problems,” *Am. Journ. Math.* **91**, 963 (1969).
- [115] R.T. Seeley, “Trace Expansions for the Zarembo Problem,” enviada a *Comm. Part. Diff. Eq.* (2001).
- [116] Y.A. Sitenko, “Effects of fermion vacuum polarization by a singular magnetic vortex: Zeta function and energy,” *Phys. Atom. Nucl.* **62**, 1056 (1999) [*Yad. Fiz.* **62**, 1123 (1999)]; “Self-adjointness of the two-dimensional massless Dirac Hamiltonian and vacuum polarization effects in the background of a singular magnetic vortex,” *Annals Phys.* **282**, 167 (2000).
- [117] A.V. Smilga, “Quasiclassical expansion for $\text{Tr}\{(-1)^F e^{-\beta H}\}$,” *Commun. Math. Phys.* **230**, 245 (2002).
- [118] S.N. Solodukhin, “Conformal description of horizon’s states,” *Phys. Lett. B* **454**, 213 (1999).
- [119] A. Sommerfeld, “Zur analytischen Theorie der Wärmeleitung,” *Math. Ann.* **45**, 263 (1894).

- [120] C. Teitelboim, “Statistical Thermodynamics of a Black Hole in Terms of Surface Fields,” *Phys. Rev. D* **53**, 2870 (1996).
- [121] I. Tsutsui, T. Fulop y T. Cheon, “Connection Conditions and the Spectral Family under Singular Potentials,” *Journal of Physics A: Mathematical and General* **36**, 275 (2003). “Möbius Structure of the Spectral Space of Schrödinger Operators with Point Interaction,” *J. Math. Phys.* **42**, 5687 (2001). “Symmetry, Duality and Anholonomy of Point Interactions in One Dimension,” *Annals Phys.* **294**, 1 (2001).
- [122] W.G. Unruh, “Absorption Cross-Section Of Small Black Holes,” *Phys. Rev. D* **14**, 3251 (1976).
- [123] D.V. Vassilevich, “Heat kernel expansion: User’s manual,” *Phys. Rept.* **388**, 279 (2003).
- [124] A. Vilenkin, “Cosmic Strings And Domain Walls,” *Phys. Rept.* **121**, 263 (1985).
- [125] C. Wiesendanger y A. Wipf, “Running coupling constants from finite size effects,” *Annals Phys.* **233**, 125 (1994).
- [126] E. Witten, “Dynamical Breaking Of Supersymmetry,” *Nucl. Phys. B* **188**, 513 (1981).
- [127] E. Witten, “Constraints On Supersymmetry Breaking,” *Nucl. Phys. B* **202**, 253 (1982).
- [128] E. Witten, “Supersymmetry And Morse Theory,” *J. Diff. Geom.* **17**, 661 (1982).