

Tesis Doctoral

Determinantes funcionales en regiones con borde.
Aplicación a modelos de Teoría de Campos

Marcelo María De Francia

Director: Horacio A. Falomir

Departamento de Física
Facultad de Ciencias Exactas
Universidad Nacional de La Plata

Junio de 1995

dedicado a Ale

Contenido

1	Introducción	9
2	Determinantes y valores de borde	13
2.1	Revisión del método del operador de Forman	14
2.1.1	Operadores elípticos y determinantes	14
2.1.2	Problemas de valores de borde	16
2.1.3	Condiciones de contorno dependientes de un parámetro	20
2.2	Laplaciano en el disco	21
2.3	Bolsa quirral en 3 + 1 dimensiones	23
2.3.1	Energía libre de la bolsa quirral (definición)	23
2.3.2	El operador de Forman en la bolsa quirral	27
2.3.3	Evaluación de la energía libre	31
2.4	Resumen del Capítulo 2	39
3	Determinantes y Función de Green	41
3.1	Campo escalar real	43
3.1.1	Energía libre y Función de Green	43
3.1.2	Función de Green del campo escalar	44
3.1.3	Cálculo de la energía libre	46
3.2	Campo fermiónico	53
3.3	Campo de gauge (Abeliano)	59
3.3.1	Tratamiento de la simetría de gauge	59
3.3.2	Cálculo de la energía libre	60
3.4	Resumen del Capítulo 3	64
4	Aplicación a Modelos de Teoría de Campos	67
4.1	Cromodinámica Cuántica (Aspectos generales)	68
4.2	Modelo de la bolsa de M. I. T.	70
4.2.1	Gota de quarks y gluones	72
4.3	Bolsa quirral híbrida	75
4.3.1	Modelo de Skyrme	76
4.3.2	Modelo de dos fases	80
4.3.3	Temperatura de deconfinamiento	92

4.4	Resumen del Capítulo 4	94
5	Fermiones a densidad finita (1+1 dim.)	97
5.1	Energía libre de Gibbs y Funciones de Green	98
5.2	Energía libre de Helmholtz ($\mu = 0$)	105
5.3	Aplicación del método del operador de Forman	108
5.4	Resumen del Capítulo 5	112
6	Conclusiones	115
A	Desarrollos Asintóticos	119
A.1	Desarrollos asintóticos para las correcciones quirales	119
A.2	Desarrollos asintóticos para el campo fermiónico	120
A.3	Desarrollo asintótico para el campo de gauge	122
B	Funciones de Green en regiones acotadas	123
B.1	Función de Green para la bolsa de M. I. T.	123
B.2	Función de Green para el campo vectorial	127

Lista de Figuras

2.1	Curva Γ (para semieje imaginario positivo libre de autovalores)	16
3.1	Contribuciones a la energía libre del campo escalar Dirichlet; —: $-\beta F^{(2)}(z)$; - · -: $-\beta F^{(C)}(z)$, como función de $z = RT$	51
3.2	Campo escalar Dirichlet; —: Aproximación de z pequeño; - · -: Aproximación de z grande	53
3.3	$-\beta F$ – Campo escalar Dirichlet	54
3.4	$-\beta F$ – Campo fermiónico M. I. T.	58
3.5	$-\beta F$ – Campo de gauge (abeliano) M. I. T.	65
4.1	Energía libre para la gota de quarks y gluones – De arriba a abajo: $T = 147, 150, 152, 154\text{MeV}$	73
4.2	Perfil de Atiyah y Manton para el ángulo quirral $\theta(\hat{r})$	79
4.3	Parámetro de perfil $\hat{\lambda}$ como función de \hat{T}	81
4.4	Energía (adimensionalizada) del estado fundamental del hamiltoniano de Dirac como función de θ	82
4.5	Corrección a la energía libre por condiciones de contorno quirales. Se muestra $R\Delta F$ como función de z y θ	84
4.6	Energía (adimensionalizada) de la bolsa en el modelo híbrido como función de θ	87
4.7	$\epsilon^2(\theta)$	88
4.8	$e(R)$	90
4.9	Energía del modelo de dos fases	91
4.10	Energía del modelo híbrido en la aproximación de gases libres (sustraída la energía correspondiente a $T = 0$)	93
5.1	Fermiones en $1 + 1$: Número medio	104

Capítulo 1

Introducción

En Teoría Cuántica de Campos y Mecánica Estadística, el cálculo de magnitudes físicas al orden de “1-loop” está relacionado con la evaluación de determinantes funcionales de operadores diferenciales.

Es bien sabido que cuando las configuraciones de los campos están sujetas a condiciones de contorno, sus fluctuaciones cuánticas son alteradas de un modo fundamental. En efecto, a partir del trabajo de Casimir [1] ha habido cada vez más evidencia de la importancia de los efectos de los contornos sobre la estructura del vacío de los sistemas confinados.

En la presente tesis se desarrollan y aplican métodos para el cálculo de determinantes funcionales de operadores diferenciales que actúan sobre funciones definidas en regiones acotadas, en el borde de las cuales satisfacen condiciones de contorno elípticas. Por tratarse de problemas en regiones compactas este tipo de cálculo se encuentran naturalmente relacionado con la consideración de sistemas a temperatura no nula.

La evaluación de este tipo de determinantes ofrece dificultades. Por ejemplo, el problema de autovalores de un operador diferencial diagonal define una sucesión no acotada. Esto hace necesaria la introducción de técnicas de regularización para la extracción de resultados finitos.

Según se verá en esta tesis, la evaluación de determinantes de cocientes de operadores diferenciales elípticos sometidos a distintas condiciones de contorno pueden ser relacionados con los p -determinantes [2] de ciertos operadores pseudodiferenciales, introducidos por R. Forman [3]. Estos están enteramente definidos por el hecho de que vinculan valores de borde de las funciones en el núcleo del operador diferencial, proyectados por operadores de diferentes condiciones de contorno.

Los mencionados determinantes de cocientes, están vinculados con cocientes de funciones de partición o, de manera equivalente, con diferencias de energías libres de sistemas que satisfacen distintas condiciones en el borde.

Los determinantes o energías libres que son tomados como referencia deben ser estudiados mediante técnicas complementarias. En el Capítulo 3

se introducirán relaciones entre derivadas de los determinantes a calcular respecto de parámetros adecuadamente elegidos (en este caso la temperatura) y trazas que involucran a la función de Green que satisface las condiciones de contorno del problema.

Si bien el conocimiento de la función de Green no alcanza para reconstruir la resolvente del operador (cuyos puntos singulares constituyen el espectro), la información que ella contiene es suficiente para la evaluación del determinante.

Como ejemplo de aplicación se han utilizado esas técnicas para el estudio de modelos efectivos para las interacciones fuertes.

Si bien la Cromodinámica cuántica (Q. C. D.) es la teoría que describe las interacciones fuertes, la deducción a partir de ella de una de sus características fundamentales, el confinamiento, resulta enormemente difícil. Esto ha motivado la introducción de modelos efectivos que lo incluyen de manera explícita. De este modo, han sido extensamente estudiados los llamados modelos de la bolsa, en los que los campos con grados de libertad de color son no nulos sólo en regiones acotadas del espacio, al tiempo que son sometidos a condiciones de contorno elegidas de modo de evitar el flujo de color al exterior.

Una de las primeras variantes de este tipo de modelos constituye la llamada bolsa de M. I. T. En ella los quarks y gluones confinados satisfacen condiciones de contorno que definen un problema elíptico de borde, anulando el flujo de la corriente de color a través del borde de la cavidad.

Los cálculos del Capítulo 3 permiten la evaluación de la energía libre de campos fermiónicos y de gauge confinados bajo este tipo de condiciones de contorno. El tratamiento utilizado permite el aislamiento de las divergencias que, tal como se verá, corresponden a contribuciones a la energía de Casimir del modelo ($T = 0$).

Si bien la bolsa de M. I. T. ha sido muy exitosa en la descripción de ciertas propiedades de los hadrones (tales como el espectro de masas), presenta la dificultad de romper la simetría axial que los fermiones exhiben cuando sus masas son nulas.

El modelo de la bolsa no ha sido el único intento para la descripción de los bariones. Sus propiedades de bajas energías pueden ser representadas mediante el modelo bosónico efectivo de Skyrme [4, 5].

La propuesta más refinada de este tipo de sistemas corresponde al llamado modelo de dos fases, que considera una bolsa de quarks y gluones rodeada por el “halo” de un skyrmión, conjugando la libertad asintótica de los grados de libertad fundamentales de la Q. C. D. con la conservación del flujo de la corriente axial a través del borde de la cavidad. En este caso, los fermiones están acoplados al campo bosónico externo mediante las condiciones de contorno [6, 7].

Mediante el método de los p -determinantes del Capítulo 2 pudo estudiarse la diferencia entre la energía libre de la bolsa de M. I. T. y la

correspondiente a fermiones acoplados a un solitón del modelo de Skyrme, teniendo control de la sustracción de singularidades necesaria para dar sentido al modelo.

En el Capítulo 4 se aplican los resultados obtenidos para el caso de la bolsa de M. I. T. al modelo de una gota de quarks y gluones (confinados gracias a una presión fenomenológica externa), y posteriormente al modelo de dos fases. Cabe destacar que en el límite de temperatura cero, la energía del modelo híbrido ha mostrado una marcada independencia del radio de la cavidad, a tono con el llamado “esquema del gato de Cheshire” para este tipo de modelos.

El estudio a temperatura finita de estos modelos efectivos es de interés actual, en relación con la posibilidad de descripción de mecanismos conducentes a transiciones de fase deconfinantes. La existencia de un nuevo estado de la materia llamado “plasma de quarks y gluones” está siendo exhaustivamente analizada, sobre todo teniendo en cuenta que las eventuales temperaturas de deconfinamiento no están lejos de los límites experimentales actuales ($100 \text{ MeV} \leq T_C \leq 200 \text{ MeV}$).

En ese sentido, en el Capítulo 4 se estudia la posibilidad de aplicar el tipo de cálculos presentados en esta tesis a la determinación de transiciones deconfinantes.

En los casos hasta aquí señalados se ha considerado el cálculo de energías libres de Helmholtz como función de la temperatura y del radio de la cavidad. Sin embargo, el fijado del número bariónico en valor medio es un ingrediente necesario en un modelo realista.

En el Capítulo 5 se ha introducido un potencial químico no nulo en un modelo simplificado de fermiones confinados, mediante la imposición de particulares condiciones de contorno en la dirección del tiempo euclídeo. Esto conduce nuevamente a la evaluación de determinantes funcionales mediante las técnicas descritas. Este tipo de cálculo puede, en principio, ser extendido a sistemas más realistas en $3 + 1$ dimensiones.

Capítulo 2

Determinantes y valores de borde

En Teoría Cuántica de Campos el cálculo de ciertas magnitudes físicas está relacionado con la evaluación de determinantes funcionales. Usualmente, éstos corresponden a determinantes de operadores diferenciales definidos en una variedad compacta o compactificada.

La definición de tales determinantes no es una tarea trivial si se considera que el problema de autovalores de un operador diferencial define, en general, una sucesión no acotada para los mismos. Se hace entonces necesaria la introducción de mecanismos de regularización, tanto para la extracción de resultados finitos como para la obtención de magnitudes derivadas de dichos determinantes.

Si bien el análisis de un determinante funcional puede resultar complicado, la consideración de cocientes de los mismos, como se verá en la presente sección, puede ofrecer una dificultad menor. Por ejemplo, R. Forman [3] ha establecido una relación entre el cociente de determinantes (regularizados según el esquema de la función ζ del operador) con los valores de borde de las funciones en el núcleo del operador diferencial en cuestión. Esto representa una considerable simplificación, dado que el conocimiento del núcleo (y de los valores de borde de las funciones del mismo) es, en general, más sencillo que el análisis del problema de autovalores. En esta aproximación todo el estudio del cociente de determinantes se restringe a un análisis en el borde de la variedad considerada.

El resultado de Forman se aplica al caso de operadores diferenciales elípticos cuyos cocientes admiten un determinante de Fredholm, lo cual restringe claramente su campo de aplicación.

Una versión menos restrictiva fue desarrollada por O. Barraza, H. Falomir, R. E. Gamboa Saraví y E. M. Santangelo [2]. En efecto, existe entonces una relación similar entre el determinante de cocientes de operadores elípticos y valores de borde de funciones del núcleo del operador diferencial,

cuando se consideran las versiones regularizadas usualmente denominadas p-determinantes.

A continuación se expondrán tales métodos para la evaluación de cocientes de determinantes de operadores diferenciales en regiones con borde. En la sección 2.2 del presente capítulo se considerará un ejemplo simple para mostrar cómo se aplican estas técnicas. Por último, en la sección 2.3 se analizará un ejemplo más complicado, relacionado con cálculos de interés en Teoría de Campos y Mecánica Estadística.

2.1 Revisión del método del operador de Forman

2.1.1 Operadores elípticos y determinantes

Resulta conveniente hacer una reseña de conceptos generales de los métodos funcionales que se aplicarán.

Se considera una variedad suave Ω de dimensión k , cuyo borde identificaremos con $\partial\Omega$. Sobre tal variedad se dispone un espacio vectorial complejo (fibrado) E . Se identifican por $f(x)$ las funciones de tal espacio vectorial tomadas en el punto x de la variedad.

Un operador diferencial de orden n puede expresarse como

$$Lf = \sum_{|\alpha| \leq n} a_\alpha(x) D_x^\alpha f,$$

donde $a_\alpha(x)$ es una matriz de $r \times r$ (r es el rango de E),

$$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k), \text{ con } \alpha_k \in \mathbf{Z}^+,$$

$$|\alpha| = \sum_{i=1}^k \alpha_i,$$

$$D_x^\alpha = \left(-i \frac{\partial}{\partial x_1^{\alpha_1}} \right) \cdots \left(-i \frac{\partial}{\partial x_k^{\alpha_k}} \right).$$

Conviene definir el símbolo del operador diferencial a través de

$$\sigma(L) = \sum_{j \leq n} \sigma_j(x, \xi) = \sum_{j \leq n} \left(\sum_{|\alpha|=j} a_\alpha(x) \xi^\alpha \right),$$

donde $\xi^\alpha = \xi^{\alpha_1} \xi^{\alpha_2} \dots \xi^{\alpha_k}$. El operador diferencial considerado es elíptico si el símbolo principal, $\sigma_n(x, \xi)$, es invertible para $\xi \neq 0$.

Debe introducirse la noción de condición de contorno. Si ν es un vector ortogonal al borde en cada punto del mismo, se puede definir una aplicación de las funciones $f(x)$ sobre n copias del espacio vectorial E a través de

$$[Tf](x) = \left(f(x), \frac{\partial f(x)}{\partial \nu}, \dots, \frac{\partial^{n-1} f(x)}{\partial \nu^{n-1}} \right) \text{ para } x \in \partial\Omega,$$

llamada traza de la función f .

Se define la condición de contorno B como la pertenencia a un subespacio T_B del definido por la aplicación T . Se dice que f satisface la condición de contorno B si $T(f) \in T_B$.

La noción de elipticidad incluye a las condiciones de contorno. Se define L_B como el operador diferencial L actuando sobre funciones que satisfacen las condiciones de contorno B^1 . Si L_B es elíptico admite una resolvente $(L_B - \lambda)^{-1}$.

En lo que sigue se define el determinante de un operador diferencial elíptico L_B . Si se considera la matriz cuadrada de dimensión finita M , de autovalores λ_i , puede demostrarse

$$-\log \det M = \frac{d}{ds} \left(\sum_i \lambda^{-s} \right) \Big|_{s=0} = \frac{d}{ds} \text{tr} (M^{-s}) \Big|_{s=0}. \quad (2.1)$$

Por analogía con este resultado se define el determinante de un operador diferencial diagonalizable. Dado que los autovalores de un operador de ese tipo crecen sin límite, la suma involucrada no converge cerca de $s = 0$. Sin embargo, la traza $\text{Tr} L^{-s}$ resultará convergente para $\Re(s)$ suficientemente grande. R. Seeley [8] demostró que esta función de s puede continuarse analíticamente como una función meromorfa a todo el plano complejo, eventualmente con polos simples en diferentes valores de s que dependen del orden del operador y de la dimensión de la variedad, pero que (para el caso de condiciones de contorno locales) es regular en $s = 0$ [8].

Para aplicar la definición (2.1) al caso de un operador diferencial (posiblemente no diagonalizable) debe entenderse el significado de su potencia compleja L_B^{-s} de la siguiente manera. Siendo L_B un operador diferencial elíptico, si su espectro no ocupa todo el plano complejo [9], entonces es discreto. En consecuencia, existe un rayo, $\{re^{i\theta} : r \in \mathbf{R}^+\}$, definido de modo que no haya sobre él autovalores. Recordando la formula de Cauchy

$$f(z) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\lambda)}{\lambda - z} d\lambda,$$

donde f es analítica en el interior de la curva cerrada Γ y z está dentro de Γ , se define la función f del operador L_B a través de

$$f(L) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} f(\lambda)(L_B - \lambda)^{-1} d\lambda. \quad (2.2)$$

¹Notar a partir de ahora la diferencia entre L y L_B

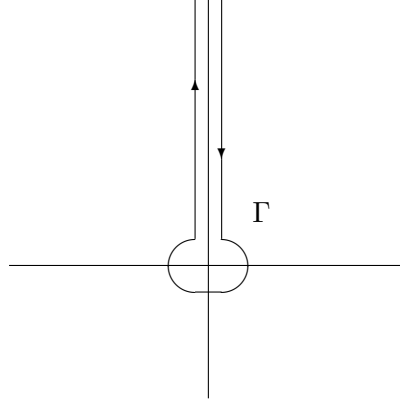


Fig. 2.1: Curva Γ (para semieje imaginario positivo libre de autovalores)

La curva Γ de esta fórmula se muestra en la figura 2.1 y puede entenderse que encierra a todo el espectro de L_B . La ausencia de autovalores sobre el rayo elegido asegura la analiticidad de la resolvente sobre la curva Γ .

En base a (2.2), la potencia compleja del operador diferencial L_B se define como

$$L_B^{-s} = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \lambda^{-s} (L_B - \lambda)^{-1} d\lambda, \quad (2.3)$$

mientras que el determinante queda definido como

$$-\log \text{Det} L_B \equiv \left. \frac{d}{ds} \text{Tr}(L_B^{-s}) \right|_{s=0} = \zeta'_{L_B}(s=0), \quad (2.4)$$

donde se ha sugerido la analogía con la función ζ de Riemann.

La definición del determinante vía su función ζ no es la única posible. En principio, cualquier regularización que preserve las simetrías fundamentales del problema es igualmente aceptable. En efecto, más adelante se introducirán versiones en las que se apela a un mecanismo diferente de regularización, que emplea lo que se denomina p -determinantes. Entre ambas definiciones habrá diferencias atribuibles a renormalizaciones finitas. Se verá que en el caso de los p -determinantes pueden establecerse propiedades formales que facilitan su cálculo.

2.1.2 Problemas de valores de borde

Se analizarán a continuación dos tipos de problemas de condiciones de contorno. En primer lugar se considerará el problema inhomogéneo

$$Lf = g$$

$$BTf = 0 \quad (2.5)$$

cuya solución esta ligada a la existencia de la función de Green del operador L_B . Por otra parte, conviene tener en cuenta el problema homogéneo

$$\begin{aligned} Lf &= 0 \\ BTf &= h \end{aligned} \quad (2.6)$$

relacionado con el núcleo de Poisson del operador L_B , definido como la aplicación P_B que vincula

$$f(x) = P_B h(x) \quad (2.7)$$

En lo que sigue se considerarán familias de operadores diferenciales dependientes de un parámetro que se designará por μ . Se considerarán dos condiciones de contorno, que en notación simplificada se identificarán por A y B , representando la pertenencia del valor de borde Tf a los subespacios T_A y T_B respectivamente.

Conviene reseñar ciertas propiedades interesantes del operador de Poisson, demostradas en el Lema 1.4 de la referencia [3]

Lema 1 (Forman)

1. $\frac{d}{d\mu} P_B = -L_B^{-1} \frac{\partial L}{\partial \mu} P_B$,
2. $P_A A T(-L_B^{-1}) = L_A^{-1} - L_B^{-1}$.

La primera parte del lema es de inmediata demostración, según puede verse en [3]. En cuanto al punto 2, requiere considerar que funciones de Green correspondientes al mismo operador diferencial pero que satisfacen distintas condiciones de contorno difieren a lo sumo en una función en el núcleo del operador.

Ya se ha introducido la definición del determinante- ζ de un operador diferencial. Tal como se ha dicho y se verá a lo largo de la presente sección, resulta más conveniente, para el tipo de desarrollos que se considerarán, la introducción de otras versiones de regularización denominadas p -determinantes.

Para entender su definición conviene ver algunas propiedades, fácilmente verificables, del determinante de una matriz M de dimensión finita. En efecto

$$\log \det(1 - M) = \text{tr} \log(1 - M) = -\text{tr} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{M^n}{n}, \quad (2.8)$$

donde se ha utilizado el desarrollo de Taylor del logaritmo. En este caso matricial, el cálculo del p -determinante consiste en la eliminación de los $(p-1)$ primeros términos en la traza de la serie (2.8). Nótese que si se tratara de operadores (acotados) tales términos resultarían en general divergentes.

Puede escribirse

$$\log \det_p(1 - M) = -\operatorname{tr} \sum_{n=p}^{\infty} \frac{M^n}{n} = -\int_{\gamma} z^{p-1} dz \operatorname{tr} \left\{ M^p (1 - zM)^{-1} \right\}, \quad (2.9)$$

donde γ es una curva del plano complejo que va de 0 a 1 evitando las inversas de los autovalores de M .

Esta última expresión, extendida al caso de un operador acotado $1 - M$ es la definición de su p -determinante [10], siempre que $\operatorname{Tr}|M|^p < \infty$, donde $|M| = (M^\dagger M)^{1/2}$. En esas condiciones puede demostrarse que la serie en (2.9) converge [10].

Si M es una función diferenciable del parámetro μ , de (2.9) puede deducirse

$$\frac{d}{d\mu} \log \det_p(1 - M) = -\operatorname{tr} \left[M^{p-1} (1 - M)^{-1} \frac{d}{d\mu} M \right]. \quad (2.10)$$

Se utilizará la expresión (2.10) para analizar el comportamiento del operador pseudodiferencial $L_B^{-1}(\mu)L_A(\mu)L_A^{-1}(0)L_B(0)$, que resultará interesante por razones que se entenderán más adelante. Puede demostrarse [11, Ec.(7)]

$$\begin{aligned} & \frac{d}{d\mu} \log \det_p \left(L_B^{-1}(\mu)L_A(\mu)L_A^{-1}(0)L_B(0) \right) \\ &= \operatorname{tr} \left[\left(L_A^{-1}(\mu) - L_B^{-1}(\mu) \right) \left(1 - L_A(\mu)L_A^{-1}(0)L_B(0)L_B^{-1}(\mu) \right)^{p-1} L'(\mu)|_{\operatorname{Ker}L} \right]. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Debe notarse que la traza del segundo miembro se calcula con la derivada $L' = \frac{\partial L}{\partial \mu}$ tomada sobre funciones en el núcleo de L . Sabemos que el operador de Poisson establece un isomorfismo entre los valores de borde proyectados y las funciones del núcleo. No resultará extraña entonces la posibilidad del cálculo del determinante en términos de los valores de borde proyectados (resultado principal de la referencia [3]).

De la aplicación de las propiedades del lema 1, siguiendo lo realizado en [2, Ec.(12)], se obtiene la relación que involucra al operador de Poisson del operador diferencial

$$\begin{aligned} & \left(L_A^{-1}(\mu) - L_B^{-1}(\mu) \right) \left[L_A(\mu)L_A^{-1}(0)L_B(0)L_B^{-1}(\mu) \right] \\ &= P_B(\mu)BTP_A(0)AT \left(L_A^{-1}(\mu) - L_B^{-1}(\mu) \right). \end{aligned} \quad (2.12)$$

Reemplazando en (2.11) se obtiene

$$\begin{aligned} & \frac{d}{d\mu} \log \det_p \left(L_B^{-1}(\mu)L_A(\mu)L_A^{-1}(0)L_B(0) \right) = \\ & \operatorname{Tr} \left[P_B(\mu) \left(1 - BTP_A(0)ATP_B(\mu) \right)^{p-1} BT \left(L_A^{-1}(\mu) - L_B^{-1}(\mu) \right) L'(\mu)|_{\operatorname{Ker}L} \right]. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Utilizando nuevamente propiedades del Lema 1, y considerando el isomorfismo entre valores de borde proyectados y las funciones del núcleo,

$$\begin{aligned} & \frac{d}{d\mu} \log \det_p \left(L_B^{-1}(\mu) L_A(\mu) L_A^{-1}(0) L_B(0) \right) \\ &= \text{Tr} \left[\left(1 - BTP_A(0) ATP_B(\mu) \right)^{p-1} \left(BTP_A(\mu) \right) \left(ATP_B(\mu) \right)' \Big|_{T_B} \right]. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Se define finalmente el operador introducido por R. Forman [3]

$$\Phi_{AB}(\mu) = ATP_B(\mu), \quad (2.15)$$

a través del cual se expresa la versión integrada de (2.14) como

Teorema 1 (Barraza et al.)

$$\det_p \left(L_B^{-1}(\mu) L_A(\mu) L_A^{-1}(0) L_B(0) \right) = \det_p \left(\Phi_{AB}^{-1}(0) \Phi_{AB}(\mu) \right).$$

El resultado del Teorema 1 [2, Ec.(17)] es la generalización del de R. Forman en [3]. Este último puede expresarse como

$$\frac{\det_\zeta L_A(\mu) \det_\zeta L_B(0)}{\det_\zeta L_B(\mu) \det_\zeta L_A(0)} = \det_1 \left(\Phi_{AB}^{-1}(0) \Phi_{AB}(\mu) \right), \quad (2.16)$$

que está restringido a la existencia del determinante 1 (de Fredholm).

Si, tal como se hará en las secciones siguientes, el cálculo de determinantes es necesario en el marco de Teorías Cuánticas de Campos, además de introducir un mecanismo de regularización como el estudiado debe considerarse la renormalización de las divergencias encontradas. En el caso en que exista el $\det_p M$, pero no así su $(p-1)$ -determinante, resultan divergentes las $(p-1)$ primeras trazas que se han sustraído del desarrollo formal de la $\text{tr} \log(1-M)$ en serie de potencias de M . Así como el p -determinante del cociente de operadores estudiado puede ponerse en términos del operador de Forman definido en el borde, resultaría interesante una relación formal entre las trazas divergentes y sus similares en términos del operador de Forman.

Si existiese el $(p-1)$ -determinante valdría la relación

$$\det_p(1-M) = \exp \left(\frac{1}{p-1} \text{tr} M^{p-1} \right) \det_{p-1}(1-M), \quad (2.17)$$

de la cual, haciendo uso del resultado del Teorema 1, se concluiría que

$$\text{Tr} \left[\left(1 - L_B^{-1}(\mu) L_A(\mu) L_A^{-1}(0) L_B(0) \right)^{p-1} \right] = \text{Tr} \left[\left(1 - \Phi_{AB}^{-1}(0) \Phi_{AB}(\mu) \right)^{p-1} \right]. \quad (2.18)$$

Ahora bien, si el $(p - 1)$ -determinante de estos operadores no existe, ésta puede entenderse como una relación formal entre trazas divergentes, que permitirá su análisis en términos de Φ_{AB} para la renormalización.

El resultado de Teorema 1 y (2.18) constituyen la base para el análisis del determinante de cocientes de operadores diferenciales que resultan de interés en Teoría de Campos, relacionando estos objetos con operadores pseudodiferenciales definidos enteramente por su acción sobre funciones que son valores de borde de soluciones de ecuaciones homogéneas, proyectados por dos condiciones de contorno diferentes. Partes totalmente finitas se extraen de la utilización del Teorema 1, mientras que ulteriores regularizaciones (por ejemplo regularizaciones analíticas) en (2.18) permiten aislar las singularidades a renormalizar.

En la sección siguiente se utilizará esta técnica, a modo de ejemplo, para el estudio del determinante del laplaciano en un disco bajo distintas condiciones de contorno.

2.1.3 Condiciones de contorno dependientes de un parámetro

Antes de pasar a los ejemplos de aplicación del método desarrollado conviene considerar un caso en el que son los operadores de condiciones de contorno (y no el operador diferencial) los que resultan dependientes del parámetro μ .

Se tiene ahora el problema homogéneo $Lf = 0$ y los valores de borde proyectados por los operadores de condiciones de contorno dados por

$$A(\mu)Tf = AT(\mathcal{U}^{-1}(\mu)f) \quad B(\mu)Tf = BT(\mathcal{U}^{-1}(\mu)f),$$

donde se ha introducido la transformación regular dependiente del parámetro μ , $\mathcal{U}^{-1}(\mu)$.

Para hacer uso de los resultados de la sección anterior conviene considerar la transformación $\varphi = \mathcal{U}^{-1}f$ que da lugar a

$$\begin{aligned} Lf = 0 &\rightarrow \mathcal{U}^{-1}L\mathcal{U}\varphi = 0 \\ AT(\mathcal{U}^{-1}f) = h &\rightarrow AT\varphi = h. \end{aligned} \quad (2.19)$$

Las expresiones de la derecha definen el operador $\mathcal{L}_A(\mu) = (\mathcal{U}^{-1}L\mathcal{U})_A = \mathcal{U}^{-1}L_{A\mathcal{U}^{-1}}\mathcal{U}$. Según está demostrado en [2] y [11, Teor. 2], los resultados de la sección anterior pueden extenderse a operadores del tipo de \mathcal{L}_A .

Reemplazando $\mathcal{L}_A(\mu)$ por su definición, se obtiene

$$\det_p \left[\mathcal{U}^{-1}L_{B\mathcal{U}^{-1}}^{-1}L_{A\mathcal{U}^{-1}}\mathcal{U}L_A^{-1}L_B \right] = \det_p \left[\Phi_{AB}^{-1}(0)\Phi_{AB}(\mu) \right], \quad (2.20)$$

donde ahora el operador de Forman vincula los valores de borde proyectados según

$$\Phi_{AB}(\mu)BT\mathcal{U}^{-1}f = AT\mathcal{U}^{-1}f \quad (2.21)$$

si $Lf = 0$.

2.2 Laplaciano en el disco

Para entender el método desarrollado en la sección 2.1 conviene revisar un ejemplo sencillo de cálculo, tomado de [2].

El operador diferencial que se estudia es el operador de Helmholtz

$$L = -\nabla^2 + \lambda^2 \quad (2.22)$$

definido en un círculo de radio R . Se considera, entonces, la acción de L sobre funciones $f(r, \theta)$.

Las condiciones de contorno corresponden a la proyección de los valores de borde de la función f ,

$$Tf = \begin{pmatrix} f(R, \theta) \\ \partial_r f(R, \theta) \end{pmatrix},$$

por operadores de borde A y B definidos como

$$\begin{aligned} ATf &= (1, a) \cdot Tf = a\partial_r f(R, \theta) + f(R, \theta) \\ BTf &= (1, 0) \cdot Tf = f(R, \theta). \end{aligned}$$

Tal como se sugirió en 2.1.3, se impone la dependencia de las condiciones de contorno en un parámetro μ , a través de la transformación regular $\mathcal{U}^{-1}(r)$, que en este caso se elige de modo que $\mathcal{U}^{-1}(R) = 1$ y $\partial_r \mathcal{U}^{-1}(R) = -\mu$.

La acción de los operadores de condiciones de contorno $A(\mu)$ y $B(\mu)$ es

$$A(\mu)Tf = AT\mathcal{U}^{-1}f = a\partial_r f(R, \theta) + (1 - \mu a)f(R, \theta) \quad (2.23)$$

$$B(\mu)TF = BT\mathcal{U}^{-1}f = f(R, \theta). \quad (2.24)$$

Respecto de estas expresiones, notar que para el problema inhomogéneo $Lf = g$, la imposición de $BT\mathcal{U}^{-1}f = 0$ corresponde a condiciones de contorno del tipo Dirichlet, mientras que $AT\mathcal{U}^{-1}f|_{\mu=1/a} = 0$ está relacionado con las condiciones de contorno tipo Neumann.

Volviendo al cálculo del determinante, según se ha desarrollado en la sección 2.1, se hace necesaria la construcción del operador de Forman, $\Phi_{AB}(\mu)$. Se hará uso de la expresión (2.21) que vincula valores de borde de funciones del núcleo de L .

Un hecho relevante para este ejemplo y las aplicaciones futuras es la determinación de una base discreta para el núcleo de L . Su búsqueda se hace a través del estudio de las simetrías del operador L y de los operadores de condiciones de contorno. Para el cálculo del operador de Forman se puede restringir el análisis a la consideración de los correspondientes subespacios invariantes. Si se logra la separación en bloques del operador de Forman, el

estudio de las trazas singulares (2.18) y del p -determinante del Teorema 1 se simplifica notablemente.

Para el operador diferencial en estudio conviene considerar la base

$$\left\{ \Psi_k(r, \theta) = I_k(\lambda r) e^{ik\theta}, k \in \mathbf{Z} \right\}$$

donde se ha introducido la periodicidad en el ángulo θ . La ecuación radial se reduce a la ecuación diferencial de Bessel, y debido a ésto aparecen las funciones de Bessel modificadas $I_k(\lambda r)$.

De acuerdo a la expresión (2.21), el operador de Forman relaciona valores de borde proyectados por dos operadores de condiciones de contorno. Para el caso de problemas elípticos de borde, el operador de Poisson $P_A(\mu)$ ($P_B(\mu)$) establece un isomorfismo entre el valor de borde proyectado $T_{A(\mu)}$ ($T_{B(\mu)}$) y el núcleo de L . En tal caso, las proyecciones de una base del núcleo dan lugar a bases para $T_{A(\mu)}$ y $T_{B(\mu)}$, que identificaremos por

$$h'_k(\theta) = ATU^{-1}\Psi_k = \left[a\lambda I'_k(\lambda R) + (1 - \mu a)I_k(\lambda R) \right] e^{ik\theta} \quad (2.25)$$

$$h_k(\theta) = BTU^{-1}\Psi_k = I_k(\lambda R) e^{ik\theta}. \quad (2.26)$$

La linealidad del operador de Forman hace que aplique h_k en h'_k , por lo que en esta base resulta diagonal,

$$\Phi_{AB}(\mu) = \sum_{k, k'} \Phi_{AB, k, k'}(\mu) |k\rangle \langle k'|, \quad (2.27)$$

con

$$\Phi_{AB, k, k'}(\mu) = \left[(1 - \mu a) + a\lambda \frac{I'_k(\lambda R)}{I_k(\lambda R)} \right] \delta_{kk'}. \quad (2.28)$$

La combinación que aparece en Teor. 1 y en (2.18), toma la forma

$$\left(\Phi_{AB}^{-1}(0) \Phi_{AB}(\mu) \right)_{kk'} = \left[1 - \frac{\mu a}{1 + a\lambda \frac{I'_k(\lambda R)}{I_k(\lambda R)}} \right] \delta_{kk'}. \quad (2.29)$$

De acuerdo a lo desarrollado en la sección 2.1 habrá que fijar el valor de p para el cual el p -determinante existe. En la referencia [11] se demuestra que ello ocurre para todo $p \geq n$, donde n es la dimensión de la variedad considerada². Para su determinación en el presente caso debe analizarse $\text{tr} \left(1 - \Phi_{AB}^{-1}(0) \Phi_{AB}(\mu) \right)^{p-1}$. Del comportamiento a grandes órdenes de las funciones de Bessel I_k se tiene

$$\left(1 - \Phi_{AB}^{-1}(0) \Phi_{AB}(\mu) \right) \simeq \frac{\mu R}{|k|} \delta_{kk'}. \quad (2.30)$$

²Ocasionalmente, dependiendo del problema, puede ocurrir que también exista para algún valor de $p < n$

De este modo, para $p = 2$ existe el determinante y no existe el determinante de Fredholm. Ese comportamiento asintótico permite incluso separar la parte divergente de $\text{Tr} \left[1 - \Phi_{AB}^{-1}(0)\Phi_{AB}(\mu) \right]^1$ de sus partes finitas (que en un problema físico no deberán ser descartadas).

El análisis anterior podría haberse realizado equivalentemente considerando los términos que conducen a divergencias en la expresión

$$\begin{aligned} \log \det \left[\Phi_{AB}^{-1}(0)\Phi_{AB}(\mu) \right] &= \text{tr} \log \left[\Phi_{AB}^{-1}(0)\Phi_{AB}(\mu) \right] \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \log \left[\left(\Phi_{AB}^{-1}(0)\Phi_{AB}(\mu) \right)_{kk} \right]. \end{aligned} \quad (2.31)$$

En los cálculos que siguen se utilizará esta segunda variante a fin de determinar partes divergentes y el valor de p necesario.

En base a la expresión del Teor. 1

$$\begin{aligned} &\det_2 \left(L_B^{-1}(\mu)L_A(\mu)L_A^{-1}(0)L_B(0) \right) \\ &= \det \left(\Phi_{AB}^{-1}(0)\Phi_{AB}(\mu) \exp \left\{ 1 - (\Phi_{AB}^{-1}(0)\Phi_{AB}(\mu)) \right\} \right) \\ &= \prod_{k=-\infty}^{\infty} \left[1 - \frac{\mu a}{1 + a\lambda \frac{I'_k(\lambda R)}{I_k(\lambda R)}} \right] \exp \left\{ \frac{\mu a}{1 + a\lambda \frac{I'_k(\lambda R)}{I_k(\lambda R)}} \right\}. \end{aligned} \quad (2.32)$$

Si bien en este caso ha resultado $p = n = 2$, tal como se verá en otras aplicaciones existen circunstancias propias de cada problema que pueden hacer menor el valor del p necesario.

Habiendo adquirido experiencia en la construcción del operador de Forman, se atacará en la sección 2.3 un caso de mayor interés en Teoría de Campos: la bolsa quirral en 3 + 1 dimensiones.

2.3 Bolsa quirral en 3 + 1 dimensiones

2.3.1 Energía libre de la bolsa quirral (definición)

En esta sección se aplicarán los métodos descritos al cálculo de la energía libre de un campo fermiónico sin masa confinado en el interior de una cavidad esférica de radio R , en equilibrio a una temperatura $T = 1/\beta$. Como se verá con más detalle en el Capítulo 4, este sistema es uno de los ingredientes del modelo de hadrones conocido como bolsa quirral híbrida.

La función de partición de este sistema puede ser representada por la integral funcional

$$Z = \int \mathcal{D}\bar{\psi}\mathcal{D}\psi e^{-S_E}. \quad (2.33)$$

La integración funcional se realiza sobre funciones que satisfacen condiciones de contorno antiperiódicas en la dirección del tiempo euclídeo, lo que corresponde a campos que satisfacen la estadística de Fermi–Dirac [12, 13]. S_E es la acción euclídea del modelo, que cuenta con un término cinético de volumen y otro término de borde relacionado con las condiciones de contorno espaciales

$$S_E = \int_0^\beta d\tau \int_{r \leq R} d^3x \bar{\psi} i \not{\partial} \psi - \frac{1}{2} \int_0^\beta d\tau \int_{r=R} d^2x \bar{\psi} (e^{-i\theta \vec{\tau} \cdot \mathbf{n} \gamma^5} + i \not{n}) \psi, \quad (2.34)$$

En el modelo de la bolsa quiral las condiciones de contorno acoplan el campo fermiónico a un campo externo. Cuando la configuración de ese campo externo corresponde al solitón que es solución de las ecuaciones clásicas del modelo de Skyrme (llamado skyrmión [14]), dicho acoplamiento se refleja en la presencia del ángulo θ (que dependerá de R) en el término de borde de S_E . Conviene notar que el campo fermiónico está tomado en la representación iso-bispinorial $[(1/2, 0) \oplus (0, 1/2)] \otimes 1/2$, donde el primer término del producto directo se refiere a la representación de $SL(2, C)$, mientras que el segundo a la del grupo $SU(2)$ de isospin.

El término de borde define, en la integral funcional, la delta funcional

$$\delta \left[\left(e^{-i\theta(\tau \cdot \mathbf{n}) \gamma^5} + i \not{n} \right) \psi \right],$$

de modo que la función de partición puede entenderse como

$$Z = e^{-\beta F} = \det(i \not{\partial})_A \quad (2.35)$$

es decir, como el determinante del operador de Dirac calculado sobre funciones que, además de su antiperiodicidad en la variable “temporal”, satisfacen la condición de contorno espacial

$$A\psi = \frac{1}{2} \left(1 + i \not{n} e^{-i\theta(\tau \cdot \mathbf{n}) \gamma^5} \right) \psi = 0. \quad (2.36)$$

Nótese que para operadores diferenciales de primer orden $T\Psi = \Psi|_{\partial\Omega}$.

La expresión (2.35) es una relación formal a la que debe darse sentido mediante la introducción de algún mecanismo de regularización.

En [15] se emplearon las técnicas reseñadas en la sección 2.1, para calcular el cociente del determinante (2.35) con otro determinante de referencia.

Para aplicar el método de la sección 2.1 se necesitan dos operadores de condiciones de contorno y un parámetro que, vía una transformación regular, afecte a éstas o al operador diferencial.

Las condiciones de contorno que se considerarán son

$$A\psi = \frac{1}{2} (1 + i \not{n} e^{-i\theta \vec{\tau} \cdot \mathbf{n} \gamma^5}) \psi = 0 \quad (2.37)$$

$$B\psi = \frac{1}{2}(1 + i \not{\gamma})\psi = A(\theta = 0)\psi = 0, \quad (2.38)$$

en $r = R$.

La transformación regular que se utiliza para introducir el parámetro μ es

$$\mathcal{U}(\mu) = e^{-i\mu\vec{\tau}\cdot\mathbf{n}\gamma_5}. \quad (2.39)$$

La ecuación (2.20) permite escribir

$$\det_p \left[\mathcal{U}^{-1}(i \not{\partial})_{BU^{-1}}^{-1}(i \not{\partial})_{AU^{-1}} \mathcal{U}(i \not{\partial})_A^{-1}(i \not{\partial})_B \right] = \det_p \left[\Phi_{AB}^{-1}(0) \Phi_{AB}(\mu) \right], \quad (2.40)$$

donde el operador de Forman relaciona las funciones del núcleo de $i \not{\partial}$ de la forma en que se ve en la ecuación (2.21).

La expresión (2.35) expresa, al menos formalmente, la función de partición del campo fermiónico con condición de contorno $A\Psi = 0$ o, de manera equivalente, su energía libre. Pensando ahora en el operador de condiciones de contorno modificadas

$$A(\theta)\mathcal{U}^{-1}(\mu)\Psi = 0 \rightarrow A(\theta - 2\mu)\Psi = 0,$$

puede notarse que el espectro de autovalores (y por lo tanto la energía libre) del problema modificado depende de la combinación de parámetros $\theta - 2\mu$.

Formalmente, relaciones como (2.35) dan lugar a

$$\begin{aligned} -\beta F(\theta - 2\mu) &= \log \det(i \not{\partial})_{AU^{-1}} \\ -\beta F(-2\mu) &= -\log \det(i \not{\partial})_{BU^{-1}}^{-1} \\ -\beta F(\theta) &= -\log \det(i \not{\partial})_A^{-1} \\ -\beta F(0) &= \log \det(i \not{\partial})_B. \end{aligned}$$

Tales energías libres son las que aparecerían si se tomara, formalmente, el logaritmo de cocientes de determinantes como el señalado en (2.35). Pero, tal como se dijo en la Sección 2.1, es necesario introducir un esquema de regularización para dar sentido a esos determinantes funcionales.

A partir de la igualdad (2.40) puede definirse la diferencia de energías libres

$$\begin{aligned} &\beta [F(-2\mu) - F(\theta - 2\mu) + F(\theta) - F(0)] \\ &\equiv \log \det_p \left[\Phi_{AB}^{-1}(0) \Phi_{AB}(\mu) \right] - \left(\sum_{q=1}^{p-1} \frac{1}{q} \text{tr} \left\{ \left[1 - \Phi_{AB}^{-1}(0) \Phi_{AB}(\mu) \right]^p \right\} \right)_{\text{renorm.}}. \end{aligned} \quad (2.41)$$

De acuerdo a lo reseñado en la sección 2.1, para todo entero $p \geq 4$ el determinante p existe. Las trazas divergentes (del desarrollo formal del $\log(1 - M)$) que se sustraen en la definición del p -determinante deben ser estudiadas como señala el segundo término, imponiendo algún mecanismo

de regularización (por ejemplo, regularización analítica), aislando las singularidades y considerando su renormalización.

Una elección conveniente del parámetro μ puede simplificar aún más la definición (2.41). En efecto, tomando $\mu = \theta/2$ aparecen $F(\theta)$, $F(-\theta)$ y $F(0)$ en el primer miembro de esa ecuación. Información adicional proveniente del espectro conduce a la expresión definitiva. El problema de autovalores del hamiltoniano de Dirac está definido por

$$\begin{aligned} i \not{\partial} \left[\Psi_n e^{-iE_n t} \right] &\implies E_n(\theta) \gamma_0 \Psi_n + i \vec{\gamma} \cdot \vec{\nabla} \Psi_n = 0 \\ H \Psi_n &= -i \vec{\gamma} \cdot \vec{\nabla} \Psi_n = E_n(\theta) \Psi_n \end{aligned} \quad (2.42)$$

con condiciones de contorno $A(\theta) \Psi_n = 0$. La transformación $\gamma_0 \gamma_5$ cambia

$$\Psi_n \rightarrow \varphi_n = \gamma_0 \gamma_5 \Psi_n$$

$$H \Psi_n = E_n \Psi_n \rightarrow H \varphi_n = -E_n \varphi_n$$

$$\frac{1}{2} \left(1 + i \not{x} e^{-i\theta(\tau \cdot n) \gamma_5} \right) \Psi_n = 0 \rightarrow \frac{1}{2} \left(1 + i \not{x} e^{+i\theta(\tau \cdot n) \gamma_5} \right) \varphi_n = 0.$$

En consecuencia, el cambio $\theta \rightarrow -\theta$ invierte el espectro. Sin embargo, como cada estado contribuye a la función de partición con un factor $Z_n = e^{-\beta E_n/2} + e^{\beta E_n/2}$, tal inversión no afecta la energía libre, que satisface entonces $F(\theta) = F(-\theta)$.

Por su parte, la multiplicación por γ^5 no altera el espectro, mientras que cambia $\theta \rightarrow \theta + \pi$. Por lo tanto, $F(\theta + \pi) = F(\theta)$.

La ecuación (2.41) se reduce entonces a

$$\begin{aligned} &2\beta [F(\theta) - F(0)] \\ &= \log \det_p \left[\Phi_{AB}^{-1}(0) \Phi_{AB}\left(\frac{\theta}{2}\right) \right] - \left(\sum_{q=1}^{p-1} \frac{1}{q} \text{tr} \left\{ \left[1 - \Phi_{AB}^{-1}(0) \Phi_{AB}\left(\frac{\theta}{2}\right) \right]^q \right\} \right)_{\text{renorm.}} \end{aligned} \quad (2.43)$$

De esa manera se puede relacionar la diferencia de la energía libre de fermiones en una bolsa quiral respecto de una energía libre de referencia, $F(0)$, con el logaritmo del p -determinante del operador pseudo-diferencial de Forman. A continuación se construirá ese operador haciendo uso de las simetrías de $i \not{\partial}$ y AU^{-1} .

La energía libre de referencia corresponde a fermiones confinados en una región esférica estática, que satisfacen condiciones de contorno usualmente denominadas de la bolsa de M. I. T. [16]. La energía de referencia es también parte de este trabajo de tesis y será estudiada en el Capítulo 3.

2.3.2 El operador de Forman en la bolsa quirial

La construcción del operador de Forman, tal como se ha visto en el ejemplo presentado en la sección 2.2 comienza por la elección de una base adecuada para las funciones del núcleo del operador diferencial $i \not{D}$. Si tal base se construye tomando sistemas completos de vectores en cada subespacio invariante frente al grupo de simetrías de $i \not{D}$ y de las condiciones de contorno, la determinación de $\Phi_{AB}(\mu)$ se reduce a su construcción dentro de cada subespacio invariante.

En la representación considerada para los fermiones, el operador de Dirac es invariante frente a transformaciones de $SU(2)_{\text{rot}} \otimes SU(2)_{\text{isospin}}$. Sin embargo, el operador de condiciones de contorno $A(\theta)U^{-1}(\mu)$ resulta invariante sólo frente a transformaciones del subgrupo diagonal de tal grupo, isomorfo a $SU(2)$.

Conviene introducir, entonces, $\mathbf{K} = \mathbf{J} + \mathbf{I}$, donde $\mathbf{J} = \mathbf{L} + \mathbf{S}$ e $\mathbf{I} = \tau/2$, y hallar las funciones del núcleo de $i \not{D}$ en términos de autofunciones comunes de los operadores $\{\mathbf{K}^2, K_z, \mathbf{J}^2, \mathbf{L}^2, \mathbf{S}^2, \mathbf{I}^2\}$.

Debe notarse que tanto $i \not{D}$ como AU^{-1} conmutan con el operador de paridad $i\gamma_0 P$ (P es la paridad espacial). Entonces los vectores de la base señalada son también autovectores de $i\gamma_0 P$ con autovalor $(-1)^l$, donde $l(l+1)$ es el autovalor de \mathbf{L}^2 . Se clasifican los elementos de esta base por los números cuánticos k, m, j y l , éste último relacionado con la paridad.

Para $k \neq 0$, $-k \leq m \leq k$, los posibles valores de j y l dan lugar a los 4 vectores

$$\begin{aligned} |1\rangle &= |k, j = k + 1/2, l = k, m\rangle \\ |2\rangle &= |k, j = k - 1/2, l = k, m\rangle \\ |3\rangle &= |k, j = k + 1/2, l = k + 1, m\rangle \\ |4\rangle &= |k, j = k - 1/2, l = k - 1, m\rangle, \end{aligned} \quad (2.44)$$

Si, en cambio $k = 0$ ($m = 0$) sólo hay 2 vectores, correspondientes a las dos paridades

$$\begin{aligned} |1\rangle_0 &= |k = 0, j = 1/2, l = 0, m = 0\rangle \\ |3\rangle_0 &= |k = 0, j = 1/2, l = 1, m = 0\rangle. \end{aligned} \quad (2.45)$$

Para k y m fijos, si $k \neq 0$ el operador de Forman reducido será una matriz de 4×4 , que relacione los vectores de 4 componentes que representan a las funciones del núcleo. Como además preserva la paridad, estas matrices dejan invariantes subespacios bidimensionales. Por otra parte, para $k = m = 0$, el operador de Forman resulta una matriz diagonal de 2×2 .

Funciones del núcleo

Para construir efectivamente las funciones del núcleo, se factoriza la dependencia temporal introduciendo las frecuencias $\omega_n = (2n + 1)\pi/\beta$ que garan-

tizan la antiperiodicidad en la dirección del tiempo euclídeo³. Reducida la ecuación a su parte espacial, se separan las componentes superiores e inferiores del bispinor. A tal efecto, se utiliza la representación para las matrices de Dirac

$$\gamma_0 = i \begin{pmatrix} \mathcal{I} & 0 \\ 0 & -\mathcal{I} \end{pmatrix}; \vec{\gamma} = \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ -\vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix}; \gamma_5 = \begin{pmatrix} 0 & \mathcal{I} \\ \mathcal{I} & 0 \end{pmatrix},$$

Componentes superiores e inferiores están relacionadas por

$$\Psi^{(n)}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} \phi(\vec{x}) \\ \chi(\vec{x}) \end{pmatrix} \longrightarrow \chi(\vec{x}) = \left[\frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{\nabla}}{\omega_n} \otimes \mathcal{I} \right] \phi_n(\vec{x}). \quad (2.46)$$

Usando la base ya descrita, el problema se reduce a la ecuación de Bessel modificada. En este caso se busca una solución regular en el interior de la esfera, incluyendo el origen. Se obtienen, para cada par de valores (k, m) fijos, si $k \neq 0$, 4 soluciones del núcleo, asociadas a componentes superiores proporcionales a cada vector de la base (2.44). Se llamará $\Psi_{k,m}^{(i)}$, $i = I, II, III, IV$ a estas funciones del núcleo. Cuando $k = 0$ hay sólo dos soluciones posibles, $\Psi_{0,0}^{(I)}, \Psi_{0,0}^{(III)}$, cuyas componentes superiores son proporcionales a los vectores de (2.45). La traza de las funciones del núcleo (que por ser el operador diferencial de orden 1 sólo involucra a las funciones tomadas en el borde) está dada, en cada subespacio (k, m) (si $k \neq 0$) por:

$$\begin{aligned} \Psi_{k,m}^I(x_n) &= \begin{pmatrix} |1\rangle \\ iS_n W_+^{k,n} |3\rangle \end{pmatrix} & \Psi_{k,m}^{II}(x_n) &= \begin{pmatrix} |2\rangle \\ -iS_n W_-^{k,n} |4\rangle \end{pmatrix} \\ \Psi_{k,m}^{III}(x_n) &= \begin{pmatrix} iS_n W_+^{k,n} |3\rangle \\ |1\rangle \end{pmatrix} & \Psi_{k,m}^{IV}(x_n) &= \begin{pmatrix} -iS_n W_-^{k,n} |4\rangle \\ |2\rangle \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (2.47)$$

y para $k = 0$

$$\Psi_{0,0}^I(x_n) = \begin{pmatrix} |1\rangle_0 \\ iS_n W_+^{0,n} |3\rangle_0 \end{pmatrix} \quad \Psi_{0,0}^{II}(x_n) = \begin{pmatrix} iS_n W_+^{0,n} |3\rangle_0 \\ |1\rangle_0 \end{pmatrix}. \quad (2.48)$$

En estas expresiones $x_n = |\omega_n|R$,

$$W_{\pm}^{k,n} = \frac{I_{k+1/2 \pm 1}(x_n)}{I_{k+1/2}(x_n)}; S_n = \text{signo}(\omega_n) = \text{signo}(2n + 1) \quad (2.49)$$

³Debe notarse que se elige aquí una base para el núcleo que satisface las condiciones de contorno temporales, que acompañan tanto a la condición espacial A como a la B .

Operador de condiciones de contorno

Para poder calcular el operador de Forman reducido en cada subespacio (k, m) resta construir, en cada uno de ellos, la versión del operador de condiciones de contorno $A(\theta)\mathcal{U}^{-1}(\mu)$, con los cuales proyectar las trazas deducidas en (2.47) y (2.48). El operador de condiciones de contorno puede escribirse, a partir de (2.37) y (2.39) como

$$\begin{aligned} & \mathcal{A}(\theta)\mathcal{U}^{-1}(\mu) \\ &= [1_4 \cos\mu - (i\sigma \cdot n)(i\tau \cdot n)\text{sen}(\theta - \mu); \\ & \quad 1_2 \otimes (i\tau \cdot n)\text{sen}\mu + (i\sigma \cdot n) \otimes 1_2 \cos(\theta - \mu)], \end{aligned} \quad (2.50)$$

donde sólo se ha considerado las dos primeras filas, ya que las otras dos son proporcionales a ellas.

En coincidencia con la discusión en [17]

$$\begin{aligned} (i\sigma \cdot n) \otimes 1_2|_{k,m} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ 1_2 \otimes (i\tau \cdot n)|_{k,m} &= \frac{1}{2\nu} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & \alpha \\ 0 & 0 & -\alpha & -1 \\ 1 & \alpha & 0 & 0 \\ -\alpha & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \alpha &= \sqrt{4\nu^2 - 1}, \quad \nu = k + 1/2. \end{aligned}$$

Reemplazando en (2.50) se obtiene el operador de condiciones de contorno en el subespacio. Este toma la forma

$$\begin{aligned} & \mathcal{A}(\theta)\mathcal{U}^{-1}(\mu)|_{k,m} \\ &= \left[\begin{pmatrix} c - \frac{1}{2\nu}s' & -\frac{\alpha}{2\nu}s' & 0 & 0 \\ -\frac{\alpha}{2\nu}s' & c + \frac{1}{2\nu}s' & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c - \frac{1}{2\nu}s' & \frac{\alpha}{2\nu}s' \\ 0 & 0 & \frac{\alpha}{2\nu}s' & c + \frac{1}{2\nu}s' \end{pmatrix}; \right. \\ & \quad \left. \begin{pmatrix} 0 & 0 & c' - \frac{1}{2\nu}s & \frac{\alpha}{2\nu}s \\ 0 & 0 & -\frac{\alpha}{2\nu}s & -c' - \frac{1}{2\nu}s \\ -c' + \frac{1}{2\nu}s & \frac{\alpha}{2\nu}s & 0 & 0 \\ -\frac{\alpha}{2\nu}s & c' + \frac{1}{2\nu}s & 0 & 0 \end{pmatrix} \right] \quad (2.51) \end{aligned}$$

mientras $k \neq 0$. Por otra parte, para $k = 0$, en la base (2.45),

$$\mathcal{A}(\theta)\mathcal{U}^{-1}(\mu)|_{k=0} = \left[\begin{pmatrix} c - s' & 0 \\ 0 & c - s' \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & c' - s \\ -c' + s & 0 \end{pmatrix} \right]. \quad (2.52)$$

Se ha adoptado la convención

$$\begin{aligned} c &= \cos\mu & s &= \operatorname{sen}\mu \\ c' &= \cos(\theta - \mu) & s' &= \operatorname{sen}(\theta - \mu). \end{aligned}$$

Una vez calculado $\mathcal{A}(\theta)\mathcal{U}^{-1}(\mu)$ pueden considerarse proyecciones sobre T_A , que se denominan $\mathcal{H}_{k,m}^i(\theta, \mu) = \mathcal{A}(\theta)\mathcal{U}^{-1}(\mu)\Psi_{k,m}^{(i)}(x)$, $i = I, II, III, IV$. De la forma de $\mathcal{A}(\theta)\mathcal{U}^{-1}(\mu)$ se concluye que para $i = I, II$ se tienen componentes sobre $\{|1\rangle, |2\rangle\}$ mientras que para $i = III, IV$ hay componentes en $\{|3\rangle, |4\rangle\}$. Separando el comportamiento en estos subespacios ortogonales conviene definir

$$\begin{aligned} H_{k,m}^I(\theta, \mu) &= \left[\mathcal{H}_{k,m}^I(\theta, \mu); \mathcal{H}_{k,m}^{II}(\theta, \mu) \right] = \\ &\left[\begin{array}{cc} c - \frac{1}{2\nu}s' + iS_n W_+^{k,n} \left(c' - \frac{1}{2\nu}s \right) & -\frac{\alpha}{2\nu} \left(s' + iS_n W_-^{k,n} s \right) \\ -\frac{\alpha}{2\nu} \left(s' + iS_n W_+^{k,n} s \right) & c + \frac{1}{2\nu}s' - iS_n W_-^{k,n} \left(-c' - \frac{1}{2\nu}s \right) \end{array} \right], \\ H_{k,m}^{II}(\theta, \mu) &= \left[\mathcal{H}_{k,m}^{III}(\theta, \mu); \mathcal{H}_{k,m}^{IV}(\theta, \mu) \right] = \\ &\left[\begin{array}{cc} iS_n W_+^{k,n} \left(c - \frac{1}{2\nu}s' \right) - c' + \frac{1}{2\nu}s & -\frac{\alpha}{2\nu} \left(-s + iS_n W_-^{k,n} s' \right) \\ -\frac{\alpha}{2\nu} \left(s - iS_n W_+^{k,n} s' \right) & -iS_n W_-^{k,n} \left(c + \frac{1}{2\nu}s' \right) + c' + \frac{1}{2\nu}s \end{array} \right]. \end{aligned} \quad (2.53)$$

El operador de Forman en el subespacio (k, m) , si $k \neq 0$, queda definido como

$$[\Phi_{AB}(\mu)]_{k,m} = \begin{bmatrix} [\Phi_{AB}(\mu)^I]_{k,m} & 0 \\ 0 & [\Phi_{AB}(\mu)^{II}]_{k,m} \end{bmatrix} \quad (2.54)$$

donde, de acuerdo a (2.21), $H_{k,m}^{(i)}(\theta, \mu) = (\Phi_{AB}(\mu))_{k,m}^{(i)} H_{k,m}^{(i)}(0, \mu)$, $i = I, II$, y, en consecuencia,

$$[\Phi_{AB}^i]_{k,m} = H_{k,m}^i(\theta, \mu) \left[H_{k,m}^i(0, \mu) \right]^{-1} \quad i = I, II. \quad (2.55)$$

Consistentemente, se define para $k = 0$

$$\begin{aligned} H_{0,0}^I &= \left[c - s' + iS_n W_+^{1/2}(c - s') \right] \\ H_{0,0}^{II} &= \left[iS_n W_+^{1/2}(c - s') - c' + s \right], \end{aligned} \quad (2.56)$$

siendo en este caso

$$[\Phi_{AB}^i]_{0,0} = H_{0,0}^i(\theta, \mu) \left[H_{0,0}^i(0, \mu) \right]^{-1} \quad i = I, II. \quad (2.57)$$

2.3.3 Evaluación de la energía libre

Habiendo construido el operador de Forman debe retornarse a la expresión (2.43) para el cálculo de la energía libre.

Habrá que evaluar

$$2\beta(F(\theta) - F(0)) = \log \overline{\det} \left[\Phi_{AB}^{-1}(0) \Phi_{AB}(\theta/2) \right] = \overline{\text{tr}} \log \left[\Phi_{AB}^{-1}(0) \Phi_{AB}(\theta/2) \right], \quad (2.58)$$

donde $\overline{\det}$ y $\overline{\text{tr}}$ representan las partes finitas obtenidas del \det_p más las que surgen luego de renormalizar los términos divergentes. Tal como se dijo en la sección 2.2, este procedimiento es equivalente a regularizar directamente (y luego renormalizar) los términos conducentes a divergencias en el cálculo de $\text{tr} \log \left[\Phi_{AB}^{-1}(0) \Phi_{AB}(\theta/2) \right]$.

Sin más que algo de complicación algebraica se obtiene

$$\beta(F(\theta) - F(0)) = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{k,m} \sum_{i,I,II} \log \frac{\det H_{k,m}^i(0,0) \det H_{k,m}^i(\theta,\theta/2)}{\det H_{k,m}^i(\theta,0) \det H_{k,m}^i(0,\theta/2)}. \quad (2.59)$$

A partir de las $H_{k,m}^i$ definidas en (2.53) se calculan los determinantes de la expresión (2.59). Sumando los casos I y II , y sobre los valores de m se obtiene, para las diferencias de energías libres

$$\begin{aligned} \beta(F(\theta) - F(0)) &= \frac{1}{2} \log \overline{\det} \left[\Phi_{AB}^{-1}(0) \Phi_{AB}(\theta/2) \right] \\ &= -\frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} 2\nu \log \frac{\left(1 - X_{k,n}^2 \cos^2 \theta - Y_{k,n}^2 \sin^2 \theta\right)^2 + 4X_{k,n}^2 \cos^2 \theta}{\left(1 + X_{k,n}^2\right)^2} \\ &\quad - \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \log \frac{\left(1 - (W_+^{0,n})^2\right)^2 \cos^2 \theta + 4(W_+^{0,n})^2}{\left(1 + (W_+^0)^2\right)^2}, \end{aligned} \quad (2.60)$$

donde

$$\begin{aligned} X_{k,n} &= \frac{1 - W_+^{k,n} W_-^{k,n}}{W_+^{k,n} + W_-^{k,n}} & Y_{k,n} &= \frac{1}{2\nu} \frac{W_+^{k,n} - W_-^{k,n}}{W_+^{k,n} + W_-^{k,n}} \\ W_{\pm}^{k,n} &= \frac{I_{k+1/2 \pm 1}(x_n)}{I_{k+1/2}(x_n)} & x_n &= (2n+1)\pi z & z &= RT. \end{aligned} \quad (2.61)$$

Nótese que, por razones dimensionales, z y θ son las únicas variables del problema.

Las sumas resultantes son divergentes. Tal como se ha dicho, se obtienen resultados finitos si se considera el p -determinante con $p \geq 4$. esto significa sustraer de estas series aquellos términos que correspondan a trazas divergentes con $q < p$ en (2.43). Para ello se introducirán desarrollos asintóticos de las funciones de Bessel involucradas. Tales desarrollos serán capaces de

aislar un número finito de términos conducentes a divergencias, para cuyo tratamiento se introducirá una regularización analítica.

Se estudiarán por separado las contribuciones de $k \geq 1$ y $k = 0$.

Contribución a la energía libre de los subespacios con $k \geq 1$

Para $k \geq 1$ se considera el desarrollo de Debye de las funciones de Bessel [18], que resulta válido para grandes valores del orden y del argumento. Este desarrollo se utilizará para dar sentido al primer término de la ecuación (2.60).

Resulta útil introducir

$$\rho = \sqrt{\nu^2 + x_n^2}, \quad (2.62)$$

variable “radial” en el plano de las sumas dobles en n y k . El desarrollo de Debye, por ser válido para grandes valores de ν y x_n , resulta una serie de potencias en ρ^{-1} .

El argumento de la suma doble del primer término de (2.60) puede escribirse como $2\nu \log(1 + C_{k,n} \text{sen}^2 \theta + D_{k,n} \text{sen}^4 \theta)$, donde $C_{k,n}$ y $D_{k,n}$ son funciones de la variable ρ . Con el desarrollo de Debye de las funciones de Bessel y el desarrollo de Taylor del logaritmo se obtiene una serie de potencias de ρ^{-1} , Δ_M , reteniendo hasta términos del orden ρ^{-M} . Si M es suficientemente grande, todos los órdenes del desarrollo conducentes a divergencias cuando la suma doble es realizada se encuentran en Δ_M .

Se considera una regularización analítica, consistente en introducir en la suma doble un factor ρ^{-s} , con $\Re(s)$ suficientemente grande de modo que la suma doble converja. Tal regularización conduce a funciones meromorfas del parámetro s , que eventualmente tendrán polos simples para ciertos valores del mismo. Los resultados físicos se obtendrán de tomar el límite $s \rightarrow 0$ al final del cálculo y renormalizar adecuadamente las divergencias remanentes.

Mientras el regulador está presente la serie es absolutamente convergente; puede sumarse y restarse Δ_M , en cada término y separarla en dos series. Si esto se realiza en la versión adimensionalizada del aporte a la (diferencia de) energía libre de los subespacios con $k \geq 1$ se obtiene

$$\begin{aligned} \Delta f_d(z, \theta) &= [RF(R, T; \theta) - RF(R, T; \theta = 0)]_{k \geq 1} \\ &= \Delta f_d^{(C)} + \Delta f_d^{(D)} \\ &= -\frac{1}{2}z \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \left[2\nu \log(1 + C_{k,n} \text{sen}^2 \theta + D_{k,n} \text{sen}^4 \theta) - \Delta_M \right] \\ &\quad - \frac{1}{2}z \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \Delta_M \rho^{-s} \Big|_{s \rightarrow 0} \end{aligned} \quad (2.63)$$

donde

$$C_{k,n} = \frac{(\rho^2 - d_{n,j}^2)^2 \left[4x_n^2 d_{n,j}^2 + (\rho^2 - d_{n,j}^2)^2 \right] + (\rho^2 - \nu^2) \left[4x_n^2 d_{n,j}^2 - (\rho^2 - d_{n,j}^2)^2 \right]}{\left[4x_n^2 d_{n,j}^2 + (\rho^2 - d_{n,j}^2)^2 \right]^2} \quad (2.64)$$

$$D_{k,n} = \frac{\left[(\rho^2 - d_{n,j}^2)^2 - (\rho^2 - \nu^2) \right]^2}{\left[4x_n^2 d_{n,j}^2 + (\rho^2 - d_{n,j}^2)^2 \right]^2} \quad (2.65)$$

$$d_{n,j} = x_n \frac{d}{dx_n} \ln I_\nu(x_n). \quad (2.66)$$

Nótese que si M es suficientemente grande, el primer término de (2.63), $\Delta f_d^{(C)}$ (corrección al desarrollo de Debye), es finito. Por lo tanto, en él puede removerse el regulador tomando el límite $s \rightarrow 0$ dentro de la suma. Este término da lugar a series dobles finitas que serán estudiadas mediante cálculos numéricos, cuyos resultados se presentarán en el capítulo 4. En lo que resta de este capítulo se mantendrá la atención sobre el segundo término de (2.63), $\Delta f_d^{(D)}$, realizando cálculos analíticos a los efectos de estudiar el comportamiento de los términos singulares.

Por último, conviene destacar que toda la dependencia con las funciones de Bessel en (2.66) se da a través de la derivada logarítmica $d_{n,j}$, que en el desarrollo de Debye resulta [18]

$$d_{n,j} = \rho - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{\nu^2}{\rho^2} + x D_{n,j} \quad (2.67)$$

$$x D_{n,j} = x \frac{d}{dx} \log \left[1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{u_k(\nu/\rho)}{\nu^k} \right],$$

donde u_k son polinomios que se obtienen recursivamente [18].

En el Apéndice A se construye el desarrollo de Debye a orden $M = 6$, Δ_6 , que se reemplaza en el segundo término de (2.63). Si bien para $M \geq 3$ el primer término ya resulta finito, se ha tomado el valor $M = 6$ para hacer más rápidamente convergente la suma doble finita del primer término de (2.63), a los efectos de simplificar las evaluaciones numéricas.

Se estudiará el segundo término de (2.63),

$$\Delta f_d^{(D)}(z, \theta) = -\frac{1}{2} z \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \Delta_M \rho^{-s} \Big|_{s \rightarrow 0} \quad (2.68)$$

El desarrollo de Debye del Apéndice A puede introducirse en la expresión (2.68). Se obtiene

$$\Delta f_d^{(D)}(z, \theta) = -\frac{1}{2}z \left[a_2(z)\text{sen}^2\theta + a_4(z)\text{sen}^4\theta + a_6(z)\text{sen}^6\theta \right]. \quad (2.69)$$

Los coeficientes de esta expresión sólo dependen de z , y pueden ser escritos como

$$\begin{aligned} a_2(z) &= a^{(2,1)} + a^{(2,2)} + a^{(2,3)} + a^{(2,4)} + a^{(2,5)} + a^{(2,6)} \\ a_4(z) &= a^{(4,3)} + a^{(4,4)} + a^{(4,5)} + a^{(4,6)} \\ a_6(z) &= a^{(6,5)} + a^{(6,6)}, \end{aligned} \quad (2.70)$$

donde

$$a^{(i,j)} = \sum_{m,d} C_{m,d} \sigma_{m,d}, \quad (2.71)$$

siendo $C_{m,d}$ los coeficientes determinados por el desarrollo de Debye, (ver Apéndice A), y $\sigma_{m,d}$ las sumas dobles

$$\sigma_{m,d} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \nu^d \rho^{-(m+s)} \Big|_{s \rightarrow 0}. \quad (2.72)$$

Para completar el análisis de los términos divergentes aislados en el segundo término de (2.63) se estudiará esta suma doble. Para ello puede tenerse en cuenta que, utilizando la definición de la función Γ [18]

$$\rho^{-(m+s)} = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{m+s}{2}\right)} \int_0^{\infty} d\tau \tau^{\frac{m+s}{2}-1} e^{-\tau[x_n^2 + \nu^2]}. \quad (2.73)$$

La expresión (2.73) se relaciona habitualmente con lo que se denomina transformada de Mellin. Reemplazándola en (2.72) se tiene

$$\sigma_{m,d} = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{m+s}{2}\right)} \int_0^{\infty} d\tau \tau^{\frac{m-d+s}{2}-1} \left(\sum_{j=1}^{\infty} (\tau\nu^2)^{d/2} e^{-\tau\nu^2} \right) \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\tau x^2} \right). \quad (2.74)$$

La ecuación (2.74) es la base para el análisis de las divergencias. Se avanza en su comprensión estudiando el comportamiento de la segunda sumatoria, que puede escribirse como

$$\mathcal{S}_n = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\tau(2\pi z)^2(n+1/2)^2} = \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-\tau(2\pi z)^2 x^2} \delta_a(x), \quad (2.75)$$

donde por δ_a se entiende la extensión periódica de la función delta con soporte en los valores semienteros,

$$\delta_a(x) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} (-1)^l e^{2\pi l x i},$$

que reemplazada en (2.75) da lugar a

$$\mathcal{S}_n = \frac{1}{2\sqrt{\pi\tau z}} \sum_{l=-\infty}^{\infty} (-1)^l e^{-\frac{l^2}{4\tau z^2}}. \quad (2.76)$$

La expresión (2.76) es especialmente adecuada para el estudio de $\sigma_{m,d}$ en la región de pequeños valores del parámetro z . En particular, para $z \rightarrow 0$ (que corresponde al límite $T \rightarrow 0$, con lo que Δf^D se reduce a un aporte a la energía de Casimir del modelo) sólo sobrevive el término de la sumatoria de (2.76) con $l = 0$. Conviene aislar su contribución para tener

$$\mathcal{S}_n = \mathcal{S}_n^{(1)} + \mathcal{S}_n^{(2)} = \frac{1}{2\sqrt{\pi\tau z}} + \frac{1}{\sqrt{\pi\tau z}} \sum_{l=1}^{\infty} (-1)^l e^{-\frac{l^2}{4\tau z^2}}. \quad (2.77)$$

Cada término da lugar a un aporte diferente a $\sigma_{m,d}$. En efecto,

$$\sigma_{m,d} = \sigma_{m,d}^{(1)} + \sigma_{m,d}^{(2)}, \quad (2.78)$$

donde

$$\sigma_{m,d}^{(1)} = \frac{1}{2\sqrt{\pi z}} \frac{\Gamma\left(\frac{m-1+s}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m+s}{2}\right)} \left[\zeta(m-d-1+s, 1/2) - 2^{m-d-1+s} \right] \quad (2.79)$$

$$\sigma_{m,d}^{(2)} = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{1}{2z}\right)^{\frac{m+1}{2}} \frac{1}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)} \sum_{k=1}^{\infty} \nu^{-\frac{m-2d-1}{2}} \sum_{l=1}^{\infty} (-1)^l l^{\frac{m-1}{2}} K_{\frac{m-1}{2}}\left(\frac{l\nu}{z}\right). \quad (2.80)$$

Debe notarse que en la segunda se ha removido el regulador debido a que la suma doble considerada es finita en $s = 0$. Todas las divergencias del problema han quedado aisladas en el término de $\sigma_{m,d}^{(1)}$, que, por otra parte, corresponde a un término independiente de la temperatura en la energía libre (2.63). Este punto resulta particularmente importante. Se acaba de ver que las únicas divergencias remanentes cuando el regulador es removido son independientes de la temperatura. Es así si que el modelo puede ser renormalizado a temperatura cero, no se presentarán nuevas divergencias a temperatura finita.

La contribución a la energía libre de los subespacios con $k \geq 1$ puede escribirse entonces como

$$\Delta f_d(z, \theta) = \Delta f_d^{(1)}(\theta) + \Delta f_d^{(2)}(z, \theta) + \Delta f_d^{(C)}(z, \theta), \quad (2.81)$$

donde se puso de manifiesto la independencia de z del término proveniente de $\sigma_{m,d}^{(1)}$,

$$\begin{aligned} & \Delta f_d^{(1)}(\theta) \\ &= -\frac{1}{2} \left(\left[\frac{2515}{4096} + \frac{534557}{546975\pi} - \frac{4\gamma}{15\pi} + \frac{55\pi^2}{2048} - \frac{323\pi^4}{393216} - \frac{4}{15\pi s} \right] \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left[-\frac{4 \log(2)}{5 \pi} - \frac{7 \zeta(3)}{45 \pi} + \frac{88753 \zeta(5)}{437580 \pi} \right] \text{sen}^2 \theta \\
& + \left[\frac{129}{2048} + \frac{29696}{45045 \pi} - \frac{21 \pi^2}{512} + \frac{181 \pi^4}{65536} - \frac{28768 \zeta(5)}{45045 \pi} \right] \text{sen}^4 \theta \\
& + \left[\frac{143}{512} - \frac{2048}{6435 \pi} - \frac{143 \pi^4}{49152} + \frac{1984 \zeta(5)}{6435 \pi} \right] \text{sen}^6 \theta \\
& = \frac{1}{4\pi} \left[\left(-5.604 + \frac{8}{15 s} \right) \text{sen}^2 \theta + 0.463 \text{sen}^4 \theta + 0.023 \text{sen}^6 \theta \right]. \quad (2.82)
\end{aligned}$$

La expresión (2.82), que representa el aporte de los 6 primeros términos del desarrollo de Debye a la energía de Casimir del sistema, debe compararse con los resultados publicados en [19]. Obviamente no puede esperarse que las partes finitas del término en $\text{sen}^2 \theta$ sean iguales, debido a que tal término es el que resulta afectado por el método de regularización.

Tal como se verá más adelante, la renormalización del modelo completo permite eliminar el término divergente mediante la introducción en el lagrangiano del modelo híbrido, de una integral sobre el borde de una densidad local que es función del campo externo. La renormalización deja un aporte arbitrario a la energía libre de la forma $\frac{K}{R} \text{sen}^2 \theta$, donde la constante K debe ser determinada a través de alguna condición adicional (eventualmente impuesta por la experiencia). En el Capítulo 4 se fijará esta constante imponiendo la continuidad del flujo de la corriente axial en el borde de la cavidad, en el límite de radio cero.

Por otra parte, los términos proporcionales a $\text{sen}^4 \theta$ y $\text{sen}^6 \theta$ son finitos y no están afectados por la regularización. El término de $\text{sen}^4 \theta$ es comparable con el obtenido por Zahed, Wirzba y Meissner en [19]. La pequeña diferencia en el coeficiente surge del hecho de que los citados autores sólo estudian el desarrollo de Debye hasta el orden finito dominante, mientras que aquí se han considerado mayor número de términos. Por la misma razón esos autores no incluyen aportes proporcionales a $\text{sen}^6 \theta$.

Para completar el cálculo de la contribución a la diferencia de energías libres de los subespacios con $k \geq 1$ deben realizarse numéricamente las sumas dobles finitas señaladas como $\Delta f_d^{(2)}(z, \theta)$ y $\Delta f_d^{(C)}(z, \theta)$. Los resultados de tales sumas se mostrarán en el Capítulo 4 en el marco del estudio del modelo de bolsa quirral híbrida. Para su evaluación se cortarán las sumas dobles para grandes valores de los índices, de modo que el aporte de la “cola” de tales series resulte despreciable. También allí se completará la energía de Casimir del modelo, compuesta por el término estudiado $\Delta f_d^{(1)}(\theta)$ y por el límite $z \rightarrow 0$ de la corrección al desarrollo de Debye, $\Delta f_d^{(C)}$. En particular, $\lim_{T \rightarrow 0} f_d^{(2)} = 0$ como se verifica fácilmente de (2.80).

Para completar la descripción de los fermiones bajo condiciones de contorno quirales debe considerarse el aporte del subespacio con $k = 0$.

Contribución a la energía libre del subespacio $k = 0$

Se ha estudiado el primer término de (2.60) que corresponde al aporte de los subespacios con $k \geq 1$ a la diferencia de energías libres Δf . Se debe considerar ahora el segundo término de tal expresión, correspondiente al subespacio $k = 0$. Se llama

$$\Delta f_0(z, \theta) = -\frac{1}{2} \overline{\sum_{n=-\infty}^{\infty}} \log \frac{\left(1 - (W_+^{0,n})^2\right)^2 \cos^2 \theta + 4(W_+^{0,n})^2}{\left(1 + (W_+^{0,n})^2\right)^2}, \quad (2.83)$$

donde se entiende por $\overline{\sum_{n=-\infty}^{\infty}}$ a la suma en la que han sido sustraídos (y regularizados) los términos que conducen a divergencias (si es que tales términos existen). Es importante notar que

$$W_+^{0,n} = \coth(x_n) - \frac{1}{x_n}.$$

Conviene entonces separar los términos exponencialmente decrecientes con el argumento. De esta forma, si se realizan desarrollos asintóticos no se pierde información de los mismos.

Llamando

$$a_n = \coth x_n = \coth(2\pi z(n + 1/2)) \quad \alpha_n = 2a_n - \frac{1}{x_n}$$

puede escribirse

$$\begin{aligned} & \Delta f_0(z, \theta) \\ &= -\frac{1}{2} z \sum_{n=-\infty}^{\infty} \log \frac{4a_n^2 + (1 - a_n^2)^2 \cos^2 \theta}{(1 + a_n^2)^2} \\ & -\frac{1}{2} z \sum_{n=-\infty}^{\infty} \log \left[\frac{1 + \frac{\alpha_n}{x_n} \frac{-4 + [2(1 - a_n^2)^2 + \frac{\alpha_n}{x_n}] \cos^2 \theta}{4a_n^2 + (1 - a_n^2)^2 \cos^2 \theta}}{\left(1 - \frac{\alpha_n}{x_n} \frac{1}{1 + a_n^2}\right)^2} \right]. \end{aligned} \quad (2.84)$$

No resulta difícil relacionar el primer término del segundo miembro de (2.84) con funciones ϑ_3 de Jacobi [20]. Así se obtiene

$$\Delta f_0^{(\text{exp})}(z, \theta) = -z \log \frac{\vartheta_3(\theta, \tau = 4iz)}{\vartheta_3(\theta = 0, \tau = 4iz)}. \quad (2.85)$$

El segundo término de (2.84) merece un análisis un poco más detallado. Si hubiera divergencias provenientes del subespacio $k = 0$ deberían estar presentes en él. Tal como se ha realizado para los subespacios con $k \geq 1$, se introducirá un desarrollo asintótico del término general de la sumatoria, que se denominará δ_M , conteniendo hasta términos del orden de x_n^{-M} . Si M es suficientemente grande todas las divergencias (si es que existen) están contenidas en δ_M y pueden separarse de partes finitas (a calcular numéricamente

y tanto más rápidamente convergentes según sea mayor el valor de M). Con este mecanismo

$$\begin{aligned} & \Delta f_0^{(2)}(z, \theta) \\ &= -z \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \log \left[\frac{1 + \frac{\alpha_n}{x_n} \frac{-4 + [2(1-a_n^2)^2 + \frac{\alpha_n}{x_n}] \cos^2 \theta}{4a_n^2 + (1-a_n^2)^2 \cos^2 \theta}}{\left(1 - \frac{\alpha_n}{x_n} \frac{1}{1+a_n^2}\right)^2} \right] - \delta_M \right\} - z \sum_{n=0}^{\infty} \delta_M. \end{aligned} \quad (2.86)$$

Nótese que se ha mantenido la notación \sum sólo en el segundo término debido a que el primer término ya es finito. Puede verse que el desarrollo asintótico δ_M comienza con términos de orden x_n^{-2} . De este modo el segundo término de (2.86) también es finito y la regularización pasa a ser innecesaria. En este caso, el haber realizado la suma sobre paridades elimina todas las eventuales divergencias provenientes del subespacio $k = 0$.

Por razones de consistencia y para facilitar los cálculos numéricos posteriores se tomará $M = 5$. La suma del segundo término de (2.86) se realiza fácilmente para obtener

$$\begin{aligned} & \Delta f_0^{(2)}(z, \theta) \\ &= -z \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \log \left[\frac{1 + \frac{\alpha_n}{x_n} \frac{-4 + [2(1-a_n^2)^2 + \frac{\alpha_n}{x_n}] \cos^2 \theta}{4a_n^2 + (1-a_n^2)^2 \cos^2 \theta}}{\left(1 - \frac{\alpha_n}{x_n} \frac{1}{1+a_n^2}\right)^2} \right] \right. \\ & \quad \left. - \left[\left(-\frac{1}{x_n^2} - \frac{1}{x_n^3} - \frac{1}{4x_n^4} + \frac{1}{2x_n^5} \right) \text{sen}^2 \theta + \left(-\frac{1}{2x_n^4} - \frac{1}{x_n^5} \right) \text{sen}^4 \theta \right] \right\} \\ & \quad - z \left[\left(-\xi_2 - \xi_3 - \frac{1}{4}\xi_4 + \frac{1}{2}\xi_5 \right) \text{sen}^2 \theta + \left(-\frac{1}{2}\xi_4 - \xi_5 \right) \text{sen}^4 \theta \right], \end{aligned} \quad (2.87)$$

donde

$$\xi_n = \left(\frac{1}{2\pi z} \right)^n \zeta(n, 1/2).$$

Para comparar con los resultados señalados en [19] habrá de estudiarse el límite $T \rightarrow 0$. En [19] se muestran los aportes provenientes de $\Delta f_0^{(\text{exp})}(z, \theta)$ y no se mencionan los correspondientes a $\Delta f_0^{(2)}(z, \theta)$, que se calcularán numéricamente más adelante. Sin demasiado trabajo puede demostrarse que

$$\lim_{T \rightarrow 0} \Delta f_0^{(\text{exp})}(z, \theta) = \Delta e_0^{(\text{exp})} = \frac{1}{4\pi} \left\{ \begin{array}{ll} \theta^2 & 0 < \theta \leq \pi/2 \\ (\pi - \theta)^2 & \pi/2 < \theta < \pi \end{array} \right\} \quad (2.88)$$

que coincide con lo señalado en [19].

Se dejará para el Capítulo 4 la presentación de los resultados de los cálculos numéricos señalados.

2.4 Resumen del Capítulo 2

En el presente capítulo se ha presentado el método de evaluación de determinantes de cocientes de operadores diferenciales elípticos en términos de p -determinantes del operador de Forman. Este método, desarrollado por R. Forman [3] y ampliado por O. Barraza, H. Falomir, R. E. Gamboa Saraví y E. M. Santangelo [2] tiene la ventaja de referir todo el cálculo a relaciones entre los valores de borde proyectados por distintas condiciones de contorno de funciones del núcleo del operador diferencial considerado.

Luego de un ejemplo simple de aplicación (Laplaciano en el disco), donde se puso de manifiesto la importancia de la elección de una base adecuada para el núcleo del operador diferencial, se atacó un caso de interés en Teoría de Campos: la bolsa quirral en $3 + 1$ dimensiones.

El método del operador de Forman permite, cuando se estudian fermiones confinados en una esfera de radio R , a temperatura $\beta = 1/T$, el cálculo de la diferencia de energía libre respecto del caso en el que el ángulo quirral es nulo (bolsa M. I. T.). Se construyó el operador de Forman, en base a las simetrías del operador diferencial y de los de condiciones de contorno. Con éste se separó el aporte a la (diferencia de) energía libre proveniente de los subespacios con $k \geq 1$ y $k = 0$.

Para $k \geq 1$, la introducción de desarrollos asintóticos, inspirados en el desarrollo de Debye de las funciones de Bessel, permitió el aislamiento de las singularidades que, una vez regularizadas analíticamente, demostraron ser independientes de la temperatura. Esto es de gran importancia, debido a que permite la renormalización del modelo a temperatura cero.

Por otra parte, para $k = 0$, si se efectúa en primera instancia la suma sobre paridades (lo que está justificado en la serie regularizada), no se observan singularidades. En este subespacio se separó el aporte de términos exponencialmente decrecientes con el índice de suma.

Los límites de temperatura cero del aporte del desarrollo de Debye ($k \geq 1$) y de los términos exponenciales ($k = 0$) son comparables con los señalados en la literatura [19]. Sin embargo no son éstos los únicos aportes a la energía de Casimir del modelo. Los resultados de los cálculos numéricos de las sumas convergentes se presentarán en el Capítulo 4, en el marco general de la bolsa quirral híbrida.

Cabe señalar que una vez renormalizadas las singularidades, magnitudes derivadas de la energía libre o la energía de Casimir (tales como el flujo de la corriente axial, según se verá en Cap. 4) resultan cantidades finitas. En intentos previos, tales como [19], la introducción de reguladores ad-hoc hacía que magnitudes derivadas resultaran nuevamente divergentes.

Capítulo 3

Determinantes y Función de Green

En el Capítulo 2 se ha estudiado y aplicado el método del operador de Forman, útil para el estudio de cocientes de determinantes (diferencias de energías libres). La consideración de los determinantes (energías) de referencia genera la necesidad de contar con métodos de evaluación complementarios.

El conocimiento de los autovalores de un operador diferencial diagonal permite definir su ζ -determinante de la manera descrita en el Capítulo 2. Sin embargo, el cálculo de los autovalores en el caso general (en particular en presencia de bordes) puede ser muy complicado.

Por otra parte, la construcción de Seeley de las potencias complejas de operadores elípticos provee una poderosa herramienta para la evaluación de estos determinantes regularizados. En el caso de problemas sobre variedades sin borde [21], este método ha sido ampliamente aplicado a casos de interés para la Física (ver, por ejemplo, [22] y las referencias allí citadas).

Para variedades con borde, las potencias complejas de operadores elípticos sometidos a condiciones de contorno locales (como las que son consideradas en esta tesis) fueron introducidas en [23]. En general, los determinantes así regularizados resultan ser funcionales no locales, que no pueden ser expresadas en términos de un número finito de coeficientes de Seeley únicamente.

Sin embargo, estos determinantes pueden ser obtenidos de las correspondientes funciones de Green mediante relaciones que involucran un número finito de tales coeficientes. En el caso de variedades sin borde, eso fue probado en [24], mientras que para condiciones de contorno locales el procedimiento fue introducido en [25] y demostrado de manera general para operadores de primer orden en [26].

Cabe señalar que en el marco de otras regularizaciones también ha sido posible obtener (derivadas de) determinantes funcionales a partir de la función de Green que satisface las condiciones de contorno apropiadas en

problemas de interés físico [27, 28].

Esto muestra que, si bien no es posible reconstruir la resolvente (o bien los autovalores) de un operador a partir del conocimiento de la función de Green únicamente, ella igualmente contiene suficiente información como para permitir el cálculo de (derivadas respecto de ciertos parámetros de) los determinantes funcionales que interesan.

En lo que sigue se empleará un método de regularización que permite expresar las energías de referencia del Capítulo 2 en términos de la función de Green del problema considerado. Sin ser el método de la función ζ , éste consiste en la regularización analítica de trazas que involucran a la función de Green del operador.

En el Capítulo 2 se aplicó el método del operador de Forman al cálculo de la diferencia de la energía libre de una bolsa quirral respecto de la de una bolsa en la que las condiciones de contorno corresponden a las del modelo del M. I. T.

En el modelo de la bolsa de M. I. T. [16, 29], quarks y gluones se encuentran confinados en una región acotada del espacio. De esta forma, se incluyen de manera efectiva los comportamientos esperados en la descripción de hadrones y sus interacciones fuertes: Libertad asintótica y Confinamiento.

Las condiciones de contorno se eligen de modo que, en el borde de la cavidad, se conserve la corriente asociada a la simetría de gauge del modelo. Existe una vasta literatura acerca del estudio del modelo de la bolsa a $T = 0$ [30, 31, 32], sobre todo en lo concerniente a la energía de Casimir. Mediante la aplicación de los métodos funcionales que se están presentando es posible su estudio a temperatura finita.

A modo de ejemplo de cálculo, se estudiará en primera instancia el caso de un campo escalar real, confinado en una esfera estática de radio R , y sometido a condiciones de contorno generales. Estas reproducen como casos particulares las usualmente denominadas como de Dirichlet, Neumann y Robin. Tal modelo de prueba fue desarrollado en [33] y muestra la técnica de cálculo sin incorporar las dificultades algebraicas de sistemas más realistas.

Como aplicación a modelos efectivos de las interacciones fuertes, se ha obtenido la energía libre de fermiones confinados en una esfera y bajo condiciones de contorno tipo M. I. T., energía de referencia del cálculo del capítulo anterior.

Por otra parte, se estudió un campo de gauge (abeliano), también confinado en la esfera, con condiciones de contorno adecuadas al modelo de la bolsa. En este caso han sido tratadas las complicaciones adicionales que surgen de la simetría de gauge, pudiendo demostrarse que ghosts, modos temporales y longitudinales dan un aporte neto nulo a la energía libre.

Estos últimos resultados han sido presentados en [34].

3.1 Campo escalar real

3.1.1 Energía libre y Función de Green

Se considera un campo escalar real, confinado dentro de una esfera estática de radio R . El campo se encuentra en equilibrio a una temperatura $\beta = 1/T$. La función de partición para este problema está dada por

$$Z = \int_{C.C.} \mathcal{D}\varphi e^{-S_E} \quad (3.1)$$

donde S_E es la acción euclídea

$$S_E = \frac{1}{2} \int_0^\beta d\tau \int_V d^3x \partial_\mu \varphi \partial_\mu \varphi . \quad (3.2)$$

Por tratarse de un campo bosónico, la integración funcional debe realizarse sobre funciones que satisfacen condiciones de contorno periódicas en la dirección del tiempo euclídeo. Por otra parte, las funciones deberán satisfacer la condición de contorno espacial que se considere.

Definiendo la integral funcional mediante un determinante,

$$-\beta F = -\frac{1}{2} \log \text{Det} [\partial^2]_B = -\frac{1}{2} \text{Tr} [\log (\partial^2)]_B \quad (3.3)$$

donde B representa a las condiciones de contorno.

La periodicidad en la dirección del tiempo euclídeo permite simplificar el cálculo de la traza. En efecto,

$$-\beta F = -\frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \text{Tr}_{\vec{x}} \left[\log \left(-\omega_n^2 + \nabla^2 \right) \right]_B \quad \omega_n = \frac{2\pi n}{\beta} , \quad (3.4)$$

donde el problema ha quedado restringido a la traza “espacial” del logaritmo del operador de Helmholtz. Si la geometría es simple, se puede intentar resolver el problema de autovalores de tal operador y, una vez diagonalizado, atacar el cálculo de las trazas involucradas. Sin embargo, en el caso de la esfera, este procedimiento conduce a ecuaciones trascendentes que exigirían la realización de cálculos numéricos. Como se intenta un análisis detallado, al menos de las singularidades que aparecen en el problema y de su regularización, se desarrollarán vías alternativas que permitan la aplicación de métodos analíticos.

Al menos formalmente, puede tomarse la derivada de la expresión (3.4) respecto de la temperatura, para luego integrar en la misma variable. Se obtiene

$$-\beta F = K - \frac{1}{2} \int \frac{dT}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(-2\omega_n^2 \right) \text{Tr}_{\vec{x}} G(\vec{x}, \vec{x}'; \omega_n)|_B . \quad (3.5)$$

En (3.5), K es una constante de integración, a ser determinada por alguna consideración adicional. Se ha introducido en esta expresión la función de Green del operador de Helmholtz que satisface las condiciones de contorno espaciales. Ésta queda definida por

$$\begin{aligned} (-\omega_n^2 + \nabla^2) G(\vec{x}, \vec{x}'; \omega_n) &= \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}'); & x \in \Omega_R \\ BTG(\vec{\alpha}, \vec{x}'; \omega_n) &= 0; & \alpha \in \partial\Omega_R \end{aligned} \quad (3.6)$$

A continuación se estudiará la solución de esta ecuación.

3.1.2 Función de Green del campo escalar

Se ha definido en (3.6) la función de Green del operador de Helmholtz con condiciones de contorno B . La forma general de las condiciones de contorno locales elípticas para el problema de Helmholtz es

$$BTG(\vec{\alpha}, \vec{x}'; \omega_n) = pG(\vec{\alpha}, \vec{x}'; \omega_n) + qR \frac{\partial}{\partial n} G(\vec{\alpha}, \vec{x}'; \omega_n) = 0; \quad \alpha \in \partial\Omega_R. \quad (3.7)$$

Los parámetros p y q , adecuadamente seleccionados, determinan las condiciones de contorno:

	p	q
Dirichlet	1	0
Neumann	0	1
Robin	1	1

Se mantendrá por ahora la condición de contorno general. Más adelante se tomará el ejemplo de la condición de contorno tipo Dirichlet.

La función de Green para este problema ha sido previamente calculada en la referencia [35] (aunque a $T = 0$). Sin embargo conviene revisar la forma de cálculo porque será útil en casos de mayor complicación algebraica.

Antes que nada conviene tener en cuenta que tanto el operador diferencial como el de condiciones de contorno tienen simetría rotacional. Esto significa que la función de Green puede escribirse en la base de autoestados comunes de \mathbf{J}^2 y J_z , es decir en la base de armónicos esféricos.

Por tratarse de un operador diferencial lineal, se propone para la función de Green una suma de dos términos

$$G(\vec{x}, \vec{x}') = G_0(\vec{x}, \vec{x}'; \omega_n) + \tilde{G}(\vec{x}, \vec{x}'; \omega_n) \quad (3.8)$$

El primero corresponde a una solución de la ecuación inhomogénea

$$(-\omega_n^2 + \nabla^2) G_0(\vec{x}, \vec{x}'; \omega_n) = \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}'),$$

donde G_0 es la función de Green libre, regular en el origen y en el infinito. En la base propuesta

$$G_0(\vec{x}, \vec{x}'; \omega_n) = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{m=-j}^j S_n \omega_n j_j(i|\omega_n|r_<) h_j^{(1)}(i|\omega_n|r_>) Y_{jm}(\Omega) Y_{jm}^*(\Omega'). \quad (3.9)$$

En la expresión (3.9)

$$S_n = \text{signo}(n).$$

Por otra parte j_j y $h_j^{(1)}$ son funciones esféricas de Bessel [18] e $Y_{lm}(\Omega)$ son los armónicos esféricos. Se ha tomado

$$r_> = \text{máx}(r, r') \quad r_< = \text{mín}(r, r').$$

El segundo término de (3.8) corresponde a una solución de la ecuación homogénea

$$(-\omega_n^2 + \nabla^2) \tilde{G}(\vec{x}, \vec{x}'; \omega_n) = 0 \quad (3.10)$$

que debe ser regular en el origen, y que se ajusta de modo que la suma (3.8) satisfaga las condiciones de contorno (3.7).

Corresponde proponer, en la base de los armónicos esféricos,

$$\tilde{G}(\vec{x}, \vec{x}'; \omega_n) = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{m=-j}^j a_j j_j(i|\omega_n|r) j_j(i|\omega_n|r') Y_{jm}(\Omega) Y_{jm}^*(\Omega'). \quad (3.11)$$

La imposición de la condición de contorno (3.7) conduce luego de álgebra simple al coeficiente a_j

$$a_j = -S_n \omega_n \frac{p h_j^{(1)}(ix_n) + i q x h_j'^{(1)}(ix_n)}{p j_j(ix_n) + i q x j_j'(ix_n)}, \quad (3.12)$$

donde $x_n = |\omega_n|R$.

Habiendo utilizado la base discreta de los armónicos esféricos para la función de Green, la traza en la ecuación (3.5) pasa a ser

$$Tr_{\vec{x}} \rightarrow \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{m=-j}^j \int_0^R r^2 dr \Big|_{r=r'}, \quad (3.13)$$

donde la integral radial puede ser realizada exactamente en todos los casos.

Introduciendo el parámetro

$$\alpha = \frac{q}{p - q/2}, \quad (3.14)$$

la traza espacial de la función de Green resulta

$$Tr_{\vec{x}} [G(\vec{x}, \vec{x}'; \omega_n)]_B =$$

$$\frac{1}{2\omega_n^2} \sum_{j=0}^{\infty} 2\nu \left[-\alpha\rho^2 + \nu + (\alpha\nu - 1) d_{n,j} \right] (\alpha d_{n,j} + 1)^{-1}, \quad (3.15)$$

donde

$$\begin{aligned} \nu &= j + 1/2 & \rho &= \sqrt{x_n^2 + \nu^2}; \\ x_n &= |\omega_n| R & d_{n,j} &= x_n \frac{d}{dx} \log I_\nu(x) \Big|_{x=x_n}. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Reemplazando (3.15) en (3.5) se obtiene la expresión de la energía libre

$$\begin{aligned} -\beta F &= \\ K + \frac{1}{2} \int \frac{dT}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} 2\nu \left[-\alpha\rho^2 + \nu + (\alpha\nu - 1) d_{n,j} \right] (\alpha d_{n,j} + 1)^{-1}. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Si bien las complicaciones pueden ser mayores, la línea seguida en estas últimas expresiones es la que se utilizará para el campo fermiónico y el campo de gauge en las secciones que siguen.

El argumento de la integral del lado derecho de (3.17) es una suma doble divergente a la cual debe darse algún sentido imponiendo un mecanismo de regularización. Tal como se ha realizado en el Capítulo 2, se introducirá una regularización analítica utilizando la variable “radial” ρ . Esta prescripción conduce a funciones meromorfas del parámetro s , cuya extensión a $s \rightarrow 0$ aísla las divergencias como polos simples y permite extraer resultados finitos.

Para que tal separación sea posible se introducirá el desarrollo de Debye de las funciones de Bessel tal como en la sección 2.3.

3.1.3 Cálculo de la energía libre

Así como se hizo en la sección 2.3.3 se dará sentido a las sumas dobles de (3.17) mediante la introducción del desarrollo de Debye.

En efecto, mientras el regulador está presente, en cada término de la sumatoria puede sumarse y restarse Δ_M , desarrollo del Debye del término general en el que se retienen términos hasta la potencia ρ^{-M} . De este modo

$$\begin{aligned} -\beta F &= K \\ &+ \frac{1}{2} \int \frac{dT}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \left[2\nu \left(-\alpha\rho^2 + \nu + (\alpha\nu - 1) d_{n,j} \right) (\alpha\nu + 1)^{-1} - \Delta_M \right] \rho^{-s} \\ &+ \frac{1}{2} \int \frac{dT}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \Delta_M \rho^{-s}. \end{aligned} \quad (3.18)$$

El segundo término de (3.18) resulta finito si M es suficientemente grande ($M \geq 3$). En tal caso puede removerse el regulador tomando el límite $s \rightarrow 0$ dentro de la suma doble. Ese término corresponde a sumas dobles finitas

que se calcularán numéricamente. Conviene señalar que cuanto mayor es el valor de M , más rápidamente convergen estas sumas. Para simplificar las evaluaciones numéricas se ha tomado $M = 6$.

El tercer término de (3.18) contiene las singularidades del problema. Su tratamiento será similar al del Capítulo 2. Las únicas diferencias corresponden al límite inferior del índice de suma j y a la expresión de las frecuencias, que ahora corresponden a valores enteros de n por tratarse de un sistema bosónico.

Resulta natural, entonces, la introducción de las series dobles $\sigma_{m,d}$ como en (2.72) (donde ahora $\sum_{j=0}^{\infty}$ reemplaza a $\sum_{k=1}^{\infty}$).

$$\sigma_{m,d} = \left. \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \nu^d \rho^{-(m+s)} \right|_{s \rightarrow 0}. \quad (3.19)$$

Nuevamente, a partir de las propiedades de la función Γ , puede escribirse la potencia $\rho^{-(m+s)}$ como en (2.73) para obtener

$$\sigma_{m,d} = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{m+s}{2}\right)} \int_0^\tau d\tau \tau^{\frac{m+s}{2}-1} \left[\sum_{j=0}^{\infty} \nu^d e^{-\tau\nu^2} \right] \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\tau(2\pi|n|z)^2} \right]. \quad (3.20)$$

Debe recordarse que la suma doble del desarrollo de Debye Δ_M resulta una combinación lineal de $\sigma_{m,d}$. Se estudiarán estas últimas en las regiones en las que la variable adimensional $z = RT$ (único parámetro del problema) resulta grande o pequeña. Se verá que a grandes valores de z se obtiene analíticamente una serie de potencias decrecientes de z , lo que corresponde a sucesivas correcciones por tamaño finito al comportamiento de un gas libre de bosones. En cambio a bajos z son necesarios cálculos numéricos, tanto más trabajosos cuanto mayor sea z . En la región intermedia ambas aproximaciones pueden empalmarse para obtener la descripción completa.

Región de grandes z

Cuando $z \gg 1$ los valores grandes de la variable de integración τ son suprimidos por el factor exponencial $e^{-\tau(2\pi z)^2}$ (salvo para $n = 0$ que se estudia separadamente). De este modo, la sumatoria de índice j puede estudiarse mediante el denominado desarrollo de Euler–MacLaurin [20]. Este desarrollo, de pequeños valores de τ , es útil para la evaluación de sumas mediante integrales y derivadas del término general, dando lugar a

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_j(\tau) &= \sum_{j=0}^{\infty} (\tau\nu^2)^{d/2} e^{-\tau\nu^2} \\ &= \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{\tau}} \Gamma\left(\frac{d+1}{2}\right) + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(k+1)!} \left[\frac{1}{2^k} - 2B_{k+1} \right] \tau^{k/2} \frac{d^k}{dx^k} (x^d e^{-x^2}) \Big|_{x=\frac{\sqrt{\tau}}{2}}. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Reemplazando en (3.20) y resolviendo la integral en τ se obtiene

$$\begin{aligned} \sigma_{m,d} &= \zeta(m-d+s, 1/2) \\ &+ \left(\frac{1}{2\pi z}\right)^{m-d-1+s} \frac{\Gamma\left(\frac{m-d-1+s}{2}\right) \Gamma\left(\frac{d+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m+s}{2}\right)} \zeta(m-d-1+s) \\ &+ 2 \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{(-1)^\ell}{\ell!} \left(\frac{1}{2\pi z}\right)^{m+2\ell+s} \frac{\Gamma\left(\frac{m+2\ell+s}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m+s}{2}\right)} \zeta(m+2\ell+s) \zeta[-(d+2\ell), 1/2] . \end{aligned} \quad (3.22)$$

A la vista de la igualdad (3.22) conviene recordar la expresión de la energía libre (3.18). Si z es grande el segundo término puede estimarse mediante el orden $M+1$ del desarrollo de Debye. De acuerdo a (3.22) esto corresponde a un aporte de la forma z^{-M} . Si en el desarrollo del tercer término de (3.18) se consideran contribuciones hasta $z^{-(M-1)}$, el segundo resulta despreciable. Se retendrán en el desarrollo (3.22) todos los órdenes hasta z^{-5} y con éstos se construirá la energía libre en la región de grandes valores de la variable z .

A manera de ejemplo se estudiará el caso de condiciones de contorno tipo Dirichlet. Reemplazando (3.22) en (3.18) y realizando la integral en la temperatura (o, a radio fijo, en la variable z) se obtiene la energía libre a grandes z

$$\begin{aligned} -\beta F &= K_H + \frac{\pi^2}{90} \frac{4\pi}{3} z^3 + \frac{\pi}{2} \zeta'(-2) 4\pi z + \frac{1}{9} \pi z - \frac{1}{48} \log(z) - \beta E(z) \\ &+ \frac{1}{315} \frac{1}{\pi z} \log(z) - \frac{1}{11520} \frac{1}{2} \frac{1}{z^2} - \frac{1}{9009} \zeta(3) \frac{1}{2} \frac{1}{(\pi z)^3} - \frac{47}{116121600} \frac{1}{2} \frac{1}{z^4} \\ &\quad - \frac{3196}{1993993800} \zeta(5) \frac{1}{2} \frac{1}{(\pi z)^5} + O\left(\frac{1}{z^6}\right) , \end{aligned} \quad (3.23)$$

donde

$$-\beta E(z) = \frac{1}{2\pi z} \left[\frac{69569}{3175200} - \frac{2}{315} (C - \log(2\pi)) - \frac{2}{315} \frac{1}{s} \right] , \quad (3.24)$$

y C es la constante de Euler [20].

K_H es la constante de integración, a ser fijada imponiendo una condición adicional a grandes valores de z . Una variante consiste en ajustarla de modo que las aproximaciones para $z \gg 1$ y $z \ll 1$ coincidan en la zona intermedia.

En la ecuación (3.24) se encuentra el único término que resulta divergente cuando el regulador es removido, el cual, como puede verse, contribuye a la energía libre con un aporte independiente de la temperatura. Esto será confirmado al estudiar la región $z \ll 1$. Tal divergencia puede ser eliminada, renormalizando la teoría a $T = 0$, mediante la imposición de alguna condición física sobre la energía de vacío.

Esta aproximación de grandes z está de acuerdo con resultados previos presentados en las referencias [36, 37], en los que fue considerado el desarrollo asintótico de la densidad de energía.

Región de pequeños z

Para la discusión de la región de pequeños z debe analizarse el segundo factor de (3.20),

$$\mathcal{S}_n = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\tau(2\pi n z)^2} = \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-\tau(2\pi z)^2 x^2} \delta_p(x) , \quad (3.25)$$

donde se ha introducido la extensión periódica de la función delta, con soporte en los enteros

$$\delta_p(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{2\pi i k x} . \quad (3.26)$$

Reemplazando (3.26) en (3.25) e intercambiando la suma y la integral se obtiene

$$\mathcal{S}_n = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\tau(2\pi n z)^2} = \frac{1}{2\sqrt{\pi}z} \frac{1}{\sqrt{\tau}} \sum_{l=-\infty}^{\infty} e^{-\frac{l^2}{4\tau z^2}} , \quad (3.27)$$

expresión en la cual la variable z aparece en el denominador del argumento de la exponencial. Debido a ésto, (3.27) es adecuada para el análisis de la región $z \ll 1$. En particular, en el límite $z \rightarrow 0$ la única contribución proviene del término $l = 0$, que conviene mantener aislado. Con la separación propuesta

$$\sigma_{m,d} = \sigma_{m,d}^{(1)} + \sigma_{m,d}^{(2)} , \quad (3.28)$$

donde se ha definido

$$\sigma_{m,d}^{(1)} = \frac{1}{2\sqrt{\pi}z} \frac{\Gamma\left(\frac{m-1+s}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m+s}{2}\right)} \zeta(m-d-1+s, 1/2) \quad (3.29)$$

y

$$\sigma_{m,d}^{(2)} = \frac{2}{\sqrt{\pi}z} \frac{1}{\Gamma\left(\frac{m+s}{2}\right)} \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \nu^d \left(\frac{l}{\nu}\right)^{\frac{m-1+s}{2}} \left(\frac{1}{2z}\right)^{\frac{m-1+s}{2}} K_{\frac{m-1+s}{2}}\left(\frac{l\nu}{z}\right) . \quad (3.30)$$

En (3.30) $K_{\frac{m-1+s}{2}}$ son funciones modificadas de Bessel. Las expresiones (3.29) y (3.30) son similares a las del Capítulo 2. Tal como se señaló allí, $\sigma_{m,d}^{(1)}$ contribuye sólo a la energía de Casimir del sistema. Otros aportes a esa energía se obtendrán tanto del cálculo numérico de $\sigma_{m,d}^{(2)}$ como del segundo término de (3.18).

Siguiendo con el ejemplo de condiciones de contorno tipo Dirichlet, de $\sigma_{m,d}^{(1)}$ se obtiene

$$-\beta F^{(1)} = \frac{1}{2\pi z} \left[\frac{52211}{12700800} + \frac{229}{20160} \mathcal{C} - \frac{35\pi^3}{65536} + \frac{565\pi^5}{6291456} - \frac{2}{315} \frac{1}{s} + \right. \\ \left. \frac{11}{672} \log(2) - \frac{8429}{549120} \zeta(3) + \frac{230852753}{5959489536} \zeta(5) + \right. \\ \left. \zeta'(-3, 1/2) - \frac{1}{4} \zeta'(-1, 1/2) \right]. \quad (3.31)$$

Debe enfatizarse que el cálculo analítico desarrollado ha conseguido aislar el único término divergente presente en la energía libre, en la ecuación (3.31). Éste resulta independiente de la temperatura y coincide exactamente con el obtenido en la ecuación (3.24) en el desarrollo de grandes z . Si estas divergencias son removidas a $T = 0$, la energía libre permanece finita a toda T .

A partir de $\sigma_{m,d}^{(2)}$ se obtienen otros aportes, dependientes de la temperatura y finitos, a la energía libre del modelo. En estos, que son exponencialmente decrecientes cuando $z \rightarrow 0$, puede tomarse $s \rightarrow 0$ dentro de la serie doble y proceder a su evaluación numérica. Deben efectuarse, entonces, sumas dobles y la integral respecto de la temperatura señalada en (3.18). En los términos correspondientes a valores pares de m , las funciones de Bessel corresponden a exponenciales fácilmente integrables en z .

No ocurre lo mismo cuando se consideran los valores impares de m . En efecto, en tal caso ha debido utilizarse el método de evaluación numérica de integrales de Gauss-Laguerre [18].

Para el ejemplo de condiciones de contorno de Dirichlet, se evalúa el aporte total a la energía libre de $\sigma_{m,d}^{(2)}$ cortando las sumas dobles correspondientes a grandes valores L y J , elegidos de modo de mantener acotada una estimación del error proveniente de la "cola" de la serie en valores menores que 10^{-6} .

Cuando z es pequeño, el aporte del tercer término de (3.18) resulta fuertemente oscilante, tal como lo muestra la línea continua de la Figura 3.1. Este comportamiento no es físicamente aceptable y proviene de la utilización del desarrollo de Debye en una región en la que es evidentemente mal comportado. Se hace entonces necesario calcular las correcciones provenientes del segundo término de (3.18).

En el ejemplo de condiciones de contorno Dirichlet este término se escribe

$$-\beta F^C = \int \frac{dz}{z} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} [2\nu(\nu - d_{n,j}) - \Delta_M]. \quad (3.32)$$

Mientras $z \neq 0$ ($M \geq 3$), la suma doble es absolutamente convergente. De este modo, un número finito de términos, (los primeros en n y j), pueden

Fig. 3.1: Contribuciones a la energía libre del campo escalar Dirichlet; —: $-\beta F^{(2)}(z)$; - · - : $-\beta F^{(C)}(z)$, como función de $z = RT$

ser separados de la suma doble, y los restantes, la cola de la serie, ser considerados como un error. Cuanto mayor sea el valor de M será menor el número de términos necesarios para la estimación de la suma doble. Es por esto que se ha tomado $M = 6$. Así

$$-\beta F^C = \int \frac{dz}{z} \sum_{n=1}^N \sum_{j=0}^{J(n,N)} [2\nu(\nu - d_{n,j}) - \Delta_6] + \mathcal{E} . \quad (3.33)$$

La determinación de N se realiza exigiendo que $|\mathcal{E}| \leq 10^{-6}$.

La línea cortada de la Figura 3.1 muestra el resultado de las correcciones al desarrollo de Debye. Puede verse claramente que las oscilaciones antes mencionadas se compensarán cuando el desarrollo de Debye sea adecuadamente complementado.

Se tiene ahora todos los elementos para la construcción de la energía libre completa del campo escalar real confinado a la esfera, bajo condiciones de contorno tipo Dirichlet. En efecto,

$$-\beta F = K_L - \beta F^{(1)} - \beta F^{(2)} - \beta F^C . \quad (3.34)$$

la cual necesita de una condición adicional para la determinación de la constante de integración K_L .

Si el estado de vacío es no degenerado, la entropía debe ser nula a temperatura cero. La entropía puede calcularse a partir de (3.34) como

$$S = - \left. \frac{\partial F}{\partial T} \right|_R = \frac{\partial}{\partial z} \left(z \left[-\beta F^{(1)} - \beta F^{(2)} - \beta F^C \right] \right) + K_L, \quad (3.35)$$

de modo que de la condición de su anulación a $T = 0$ resulta

$$K_L = - \left. \frac{\partial}{\partial z} \left(z \left[-\beta F^{(1)} - \beta F^{(2)} - \beta F^C \right] \right) \right|_{z=0}. \quad (3.36)$$

Mediante un ajuste por cuadrados mínimos del comportamiento (lineal) a pequeños z , el límite $z \rightarrow 0$ pudo ser estimado, obteniéndose

$$K_L = 0.029906. \quad (3.37)$$

Del mismo análisis surge la energía de Casimir del modelo, que en la presente regularización es

$$E_C = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi R} \left(\frac{2}{315} \frac{1}{s} + 0.001969 \right). \quad (3.38)$$

Naturalmente, la arbitrariedad de la receta de regularización hace que no pueda asignarse mayor significado a la expresión (3.38). En efecto, si se hubiera considerado un regulador dependiente de un parámetro de escala μ (con dimensiones de masa), como sería, por ejemplo,

$$\left[\left(\frac{\nu}{\mu R} \right)^2 + \left(\frac{2\pi}{\mu\beta} \right)^2 n^2 \right]^{-s/2},$$

la energía libre diferiría del segundo miembro de la ecuación (3.18) en un factor $(\mu R)^s$. El término singular en (3.24) o (3.31) conduce a la aparición (en el límite $s \rightarrow 0$) de un término adicional que se suma a la energía de Casimir (3.38)

$$- \frac{1}{2\pi R} \frac{2}{315} \log(\mu R), \quad (3.39)$$

dependiente de la escala μ . Este término, que da a la constante renormalizada asociada a la energía de Casimir una dependencia logarítmica con la escala, ha sido previamente estudiado en [38], donde ha sido interpretado en términos de constantes “running”. En todo caso, al sumar la energía de “cero loops”, la energía total debe resultar independiente de esta escala.

La Figura 3.2 resume lo calculado hasta ahora en la presente sección. La línea sólida muestra los resultados obtenidos a pequeños valores de z (eliminando el término singular de (3.31)). Las líneas de trazos muestran desarrollos para grandes z con $M = 2$ y $M = 6$ (con evidente mal comportamiento si z es pequeño). Por otra parte, ambas aproximaciones se

Fig. 3.2: Campo escalar Dirichlet; —: Aproximación de z pequeño; - · - : Aproximación de z grande

encuentran desplazadas en una constante, producto de no haber fijado aún el valor de K_H . Ajustando ambas aproximaciones resulta $K_H = 0.135599$.

Reuniendo los resultados se completa el comportamiento de la energía libre del campo escalar con condiciones de contorno de Dirichlet. Este resultado se muestra en la Figura 3.3

Para cerrar la presente sección conviene recordar que el conocimiento de la energía libre del sistema asegura la descripción termodinámica completa del modelo. Por ejemplo, utilizando la variable z propuesta, la energía interna se escribe

$$\beta U(T, R) = z \frac{\partial}{\partial z} (-\beta F)_R \quad (3.40)$$

y el calor específico a volumen constante

$$C_V = \frac{\partial}{\partial z} \left[z^2 \frac{\partial}{\partial z} (-\beta F) \right]_R \quad (3.41)$$

donde las derivadas se toman a R constante.

3.2 Campo fermiónico

Habiendo adquirido experiencia en la determinación de la energía libre con el ejemplo simple del campo escalar, se aplicará el método desarrollado a la energía de referencia del Capítulo 2.

Fig. 3.3: $-\beta F$ – Campo escalar Dirichlet

Se estudia entonces la energía libre de un sistema fermiónico confinado en una cavidad esférica estática de radio R , en equilibrio a temperatura T y sometido a condiciones de contorno tipo bolsa M. I. T.. Los cálculos a realizar para atacar este problema son muy similares a los desarrollados en la sección 3.1.

La acción efectiva del modelo viene dada por

$$S_E = \int_0^\beta d\tau \int_V d^3x \bar{\psi} i\gamma^\mu \partial_\mu \psi \quad (3.42)$$

y su función de partición se calculará a partir de

$$Z = \int_{C.C.} \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi e^{-S_E} \equiv \det (i \not{\partial})_B , \quad (3.43)$$

donde B está dado en (2.38).

Utilizando la antiperiodicidad de las funciones sobre las que debe calcularse el determinante (sistema fermiónico), pueden introducirse las frecuencias

$$\omega_n = \frac{2\pi}{\beta} \left(n + \frac{1}{2} \right) , \quad (3.44)$$

reduciendo el cálculo del determinante a

$$-\beta F = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \text{tr} \left[\log \left(\omega_n \gamma^0 + i \vec{\gamma} \cdot \vec{\nabla} \right) \right]_B . \quad (3.45)$$

Tal como en el caso del campo escalar, la derivada respecto de la temperatura resulta útil para vincular el cálculo con el de una traza que involucra a la función de Green. De este modo

$$-\beta F = K + \int \frac{dT}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \omega_n \text{tr} \left[G(\vec{x}, \vec{x}'; \omega_n) \gamma^0 \right], \quad (3.46)$$

donde “tr” se refiere a las variables espaciales y matriciales, y se introdujo la función de Green

$$\begin{aligned} (i\omega_n \gamma^0 + i\vec{\gamma} \cdot \vec{\nabla}) G(\vec{x}, \vec{x}'; \omega_n) &= \mathcal{I}_4 \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}'); & x \in \Omega_R \\ (\mathcal{I} + i \not{n}) G(\vec{\alpha}, \vec{x}'; \omega_n) &= 0; & \alpha \in \partial\Omega_R \end{aligned}, \quad (3.47)$$

que satisface las condiciones de contorno correspondientes a la bolsa de M. I. T.

En el apéndice B se muestran las funciones de Green necesarias (para esta sección y la siguiente), las que se obtienen de la extensión del cálculo presentado en [19] al caso de temperatura no nula. Para su obtención se utiliza la base de los armónicos esféricos spinoriales, de modo que la traza involucrada en (3.46) se reduce a una suma sobre los subespacios invariantes frente al grupo de rotaciones $SU(2)$ ¹. Se tiene, entonces,

$$\begin{aligned} & \text{tr} \left[G(\vec{x}, \vec{x}'; \omega_n) \gamma^0 \right] \\ &= -\frac{1}{\omega_n} \sum_{j=0}^{\infty} (2\nu + 1) \left[2\nu - x \frac{d}{dx} \log \left(I_\nu^2(x_n) + I_{\nu+1}^2(x_n) \right) \right] \\ &= -\frac{2}{\omega_n} \sum_{j=0}^{\infty} (2\nu + 1) \\ & \times \left[2\nu\rho^2 + \nu^2 - 2\nu^2 d_{n,j} - 2\rho^2 d_{n,j} - 2\nu d_{n,j} + 2\nu d_{n,j}^2 + d_{n,j}^2 \right] \\ & \times \left(\rho^2 - 2\nu d_{n,j} + d_{n,j}^2 \right)^{-1}, \end{aligned} \quad (3.48)$$

donde ν , ρ , x_n y $d_{n,j}$ coinciden con las definidas en la ecuación (3.16) de la sección 3.1.

Reemplazando (3.48) en la energía libre (3.46)

$$\begin{aligned} -\beta F &= \\ & K + \int \frac{dT}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} (-2) (2\nu + 1) \\ & \times \left[2\nu\rho^2 + \nu^2 - 2\nu^2 d_{n,j} - 2\rho^2 d_{n,j} - 2\nu d_{n,j} + 2\nu d_{n,j}^2 + d_{n,j}^2 \right] \end{aligned}$$

¹Nótese que en este caso el isospin juega un papel secundario, contribuyendo sólo con un factor de degeneración igual a 2

$$\times \left(\rho^2 - 2\nu d_{n,j} + d_{n,j}^2 \right)^{-1}. \quad (3.49)$$

Las serie doble de (3.49) es divergente y, para que tenga algún sentido, debe ser regularizada. En presencia del regulador analítico ρ^{-s} , sumando y restando los primeros órdenes del desarrollo de Debye del término general, puede aislarse un término que contiene las divergencias. Se obtiene

$$\begin{aligned} -\beta F = & \\ K + \int \frac{dT}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} & \left\{ (2\nu + 1) \left[2\nu - x \frac{d}{dx} \log \left(I_{\nu}^2(x_n) + I_{\nu+1}^2(x_n) \right) \right] - \Delta_6 \right\} \\ & + \int \frac{dT}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \Delta_6 \rho^{-s}. \end{aligned} \quad (3.50)$$

Como en la sección anterior, el término divergente será estudiado analíticamente de modo de aislar las singularidades como polos dependientes del parámetro regulador s . Como antes, el desarrollo de Debye sugiere la introducción de las sumas dobles $\sigma_{m,d}$, a ser combinadas linealmente según los coeficientes de los desarrollos asintóticos del Apéndice A, que pueden ser estudiadas en los límites de grandes y pequeños valores de la variable adimensional z .

En la región de $z \gg 1$ se tiene

$$\begin{aligned} & \sigma_{m,d} \\ = & \left(\frac{1}{2\pi z} \right)^{m-d-1+s} \frac{\Gamma\left(\frac{m-d-1+s}{2}\right) \Gamma\left(\frac{d+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m+s}{2}\right)} \zeta\left(m-d-1+s, \frac{1}{2}\right) \\ & + 2 \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{(-1)^{\ell}}{\ell!} \left(\frac{1}{2\pi z} \right)^{m+2\ell+s} \frac{\Gamma\left(\frac{m+2\ell+s}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m+s}{2}\right)} \\ & \times \zeta\left(m+2\ell+s, \frac{1}{2}\right) \zeta[-(d+2\ell), 1/2]. \end{aligned} \quad (3.51)$$

Al igual que en la sección 3.1, si se retienen términos hasta el orden z^{-5} , el aporte del segundo término de (3.50) es despreciable. Así, integrando respecto de la temperatura, se obtiene la energía libre en la región de grandes z como un desarrollo en potencias de z^{-1}

$$\begin{aligned} -\beta F = & K_H + \frac{7\pi^2}{180} \frac{4\pi}{3} z^3 - \frac{1}{9} \pi z - \beta E(z) \\ & + \frac{1}{63} \frac{1}{\pi z} \log(z) - \frac{1}{3840} \frac{1}{2} \frac{1}{z^2} - \frac{1}{660} \zeta(3) \frac{1}{2} \frac{1}{(\pi z)^3} - \frac{1}{1290240} \frac{1}{2} \frac{1}{z^4} \\ & - \frac{8587}{2327925600} \zeta(5) \frac{1}{2} \frac{1}{(\pi z)^5} + O\left(\frac{1}{z^6}\right), \end{aligned} \quad (3.52)$$

donde el término independiente de la temperatura, que contiene la única singularidad remanente, es

$$-\beta E(z) = \frac{1}{2\pi z} \left[\frac{\pi}{512} + \frac{3523}{793800} - \frac{2}{63} \left(C - \log\left(\frac{\pi}{2}\right) \right) - \frac{2}{63} \frac{1}{s} \right]. \quad (3.53)$$

Los resultados (3.52) y (3.53) coinciden con cálculos previos en [39, 40], basados en desarrollos asintóticos de la densidad de energía. Tal como se señala en esos trabajos, el desarrollo de grandes z para el campo fermiónico no cuenta con un término proporcional a la superficie de la bolsa (como el que si aparecía en caso del campo escalar Dirichlet(3.23)). La anulación del mismo proviene de la suma sobre las dos paridades de este caso.

Por otra parte, en la región de pequeños z conviene proceder, como en la secciones 3.1 y 2.3.3, introduciendo la delta con soporte en los semienteros en el segundo factor de la expresión de $\sigma_{m,d}$ dada en (2.74). Esto permite aislar el aporte de $z = 0$ (que contiene la parte divergente) del resto, que será calculado numéricamente. Separando de esa manera la expresión de $\sigma_{m,d}$ se obtiene

$$\sigma_{m,d} = \sigma_{m,d}^{(1)} + \sigma_{m,d}^{(2)},$$

donde cada término viene dado por

$$\sigma_{m,d}^{(1)} = \frac{1}{2\sqrt{\pi}z} \frac{\Gamma\left(\frac{m-1+s}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m+s}{2}\right)} \zeta(m-d-1+s, 1/2) \quad (3.54)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{m,d}^{(2)} = \\ \frac{2}{\sqrt{\pi}z} \frac{1}{\Gamma\left(\frac{m+s}{2}\right)} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^k \nu^d \left(\frac{k}{\nu}\right)^{\frac{m-1+s}{2}} \left(\frac{1}{2z}\right)^{\frac{m-1+s}{2}} K_{\frac{m-1+s}{2}}\left(\frac{k\nu}{z}\right). \end{aligned} \quad (3.55)$$

Como en el caso escalar, $\sigma_{m,d}^{(1)}$ aporta sólo a la energía de Casimir del sistema. Su contribución es

$$\begin{aligned} -\beta F^{(1)} = \frac{1}{2\pi z} \left[-\frac{7\pi}{512} - \frac{384803}{3175200} + \frac{323}{5040} C - \frac{71\pi^2}{20160} - \frac{29\pi^3}{16384} + \frac{\pi^4}{532224} \right. \\ \left. - \frac{1015\pi^5}{6291956} - \frac{2}{63} \frac{1}{s} + \frac{27}{280} \log(2) - \frac{203\pi}{8192} \zeta(3) + \frac{17}{2112} \zeta(3) \right. \\ \left. - \frac{26071\pi}{524288} \zeta(5) - \frac{2442397}{827706880} \zeta(5) - 4\zeta'(-3, 1/2) \right. \\ \left. - 6\zeta'(-2, 1/2) - 3\zeta'(-1, 1/2) - \frac{1}{2} \zeta'(0, 1/2) \right], \quad (3.56) \end{aligned}$$

único término divergente cuando $s \rightarrow 0$. Tal divergencia es independiente de la temperatura y permite la renormalización del modelo a $T = 0$.

Fig. 3.4: $-\beta F$ – Campo fermiónico M. I. T.

La contribución de $\sigma_{m,d}^{(2)}$ se calcula numéricamente de la manera señalada en la sección 3.1. Nuevamente han debido considerarse integraciones numéricas por el método de Gauss–Laguerre. Asimismo, las sumas dobles se han cortado para valores de sus índices suficientemente grandes de modo que la cola de la serie resulte despreciable. El mal comportamiento del desarrollo de Debye cuando z es pequeño da origen a fuertes oscilaciones que se compensan cuando se suma la corrección al desarrollo de Debye, que surge del segundo término de (3.50).

Mediante regresión lineal se ajustó el comportamiento de la suma de las contribuciones a la energía libre $z \left(-\beta F^{(1)} - \beta F^{(2)} - \beta F^C \right)$ a pequeños z . Esto permitió, vía la imposición de la anulación de la entropía a temperatura cero, la determinación de la constante de integración K_L .

En el marco de la presente regularización, la energía de Casimir del modelo es

$$E_C = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi R} \left(\frac{2}{63} \frac{1}{s} + 0.033667 \right) . \quad (3.57)$$

Finalmente, ajustando la constante K_H , las aproximaciones de grandes y pequeños z pueden conectarse para dar lugar a la energía libre mostrada en la Figura 3.4.

3.3 Campo de gauge (Abeliano)

Para completar el presente Capítulo se estudiará el caso de un campo de gauge abeliano. El interés en tal ejemplo surge de que la energía libre de ese modelo coincide con la energía libre a 1-loop del campo de gluones. Los gluones son introducidos como partículas vectoriales libres en el modelo de la bolsa de M. I. T. En el mismo, las condiciones de contorno son tales que mantienen confinada la corriente de gauge.

La presencia de la simetría de gauge complica el análisis en este caso. En efecto, las técnicas de Fadeev–Popov deben ser utilizadas para evitar el sobreconteo en la integración funcional. Esto da lugar a la aparición de campos “fantasmas” (ghosts) cuyo aporte a la energía libre debe analizarse cuidadosamente. Se verá que la contribución de estos campos se cancela con la proveniente de los modos temporal y longitudinal.

Así, los aportes relevantes a la energía libre del campo de gauge abeliano surgen de los modos transversales, eléctrico y magnético.

3.3.1 Tratamiento de la simetría de gauge

Se considera el campo de gauge abeliano, cuya acción euclídea está dada por

$$S_E = \int_0^\beta d\tau \int_V d^3x \left[-\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \right], \quad (3.58)$$

donde $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$. Este tensor resulta invariante si se realiza la transformación

$$A_\mu \rightarrow A_\mu + \partial_\mu \varphi. \quad (3.59)$$

La presencia de la simetría de gauge hace que la integración funcional que define la función de partición deba tomarse con precaución. En efecto, debe evitarse el múltiple conteo de trayectorias que se relacionan mediante transformaciones de gauge. Como es usual en estos casos, se introduce una delta funcional y el correspondiente determinante de Fadeev y Popov [41].

La función de partición se escribe entonces

$$Z = \int \mathcal{D}A_\mu \delta[\mathcal{F}[A]], \text{Det}(M_{FP}) e^{-S_E}, \quad (3.60)$$

donde $\text{Det}(M_{FP})$ es el determinante de Fadeev–Popov correspondiente a la condición de gauge $\mathcal{F}[A] = 0$. El determinante de Fadeev–Popov puede escribirse en términos de campos de Grassman, llamados fantasmas, como

$$\text{Det}M_{FP} = \int \mathcal{D}\bar{\eta} \mathcal{D}\eta e^{-\int d^4x \bar{\eta} M \eta}, \quad (3.61)$$

donde

$$\int d^4x \bar{\eta} M \eta = -\frac{1}{2} \int d^4x \bar{\eta} \frac{\partial \mathcal{F}[A]}{\partial A^\mu} \partial^\mu \eta. \quad (3.62)$$

Por otra parte, una representación exponencial de la delta funcional da lugar a

$$Z = \int \mathcal{D}[A, \bar{\eta}, \eta] e^{-S_{\text{eff}}}, \quad (3.63)$$

donde la acción efectiva es

$$S_{\text{eff}} = \int_0^\beta \int d^3x \left[\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{1}{2} (\mathcal{F}[A])^2 - \bar{\eta} M \eta \right].$$

Se utilizará la condición de Lorentz $\mathcal{F}[A] = \partial_\mu A^\mu$, resultando en tal caso

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial A^\mu} = \partial^\mu.$$

El término de los campos fantasmas involucra entonces al operador de D'Alembert ∂^2 .

De ese modo, en la anterior representación, llamada gauge de Feynman, la función de partición se factoriza como

$$Z = Z_G \cdot Z_A, \quad (3.64)$$

donde

$$Z_G = \int \mathcal{D}\eta \mathcal{D}\bar{\eta} e^{-\frac{1}{2} \int_0^\beta d\tau \int_V d^3x \bar{\eta} \partial^2 \eta} \approx \det^{+1} (\partial^2)_{B_G} \quad (3.65)$$

$$Z_A = \int \mathcal{D}A_\mu e^{-\frac{1}{2} \int_0^\beta d\tau \int_V d^3x A^\mu \partial^2 \delta^{\mu\nu} A^\nu} \approx \det^{-1/2} [\partial^2 \delta^{\mu\nu}]_{B_A}. \quad (3.66)$$

De acuerdo a (3.65), la acción de los campos fantasmas corresponde a la de un campo escalar complejo. Pero la potencia +1 del determinante refleja el hecho de que se trata de campos escalares a valores en un álgebra de Grassmann.

3.3.2 Cálculo de la energía libre

La energía libre es suma de dos términos, correspondientes a ghosts y campo vectorial

$$-\beta F = -\beta F_G - \beta F_A, \quad (3.67)$$

donde

$$-\beta F_G = \log \det (\partial^2)_{B_G} \quad (3.68)$$

y

$$-\beta F_A = -\frac{1}{2} \log \det (\partial^2 \otimes \mathcal{I}_4)_{B_A}. \quad (3.69)$$

Para entender el aporte de los ghosts, conviene señalar que, tal como se demuestra en [42, Apéndice B], esos campos satisfacen las condiciones de contorno de Neumann. La energía libre del campo escalar fue estudiada en la Sección 3.1. El hecho de que los “ghost” toman valores en un álgebra

de Grassmann se traduce, en la energía libre, en el cambio del factor $-1/2$ en el segundo miembro de la ecuación (3.3) (que proviene de la potencia del determinante) por un factor $+1$. Esta diferencia hará que el aporte de los ghosts sea compensado por dos campos escalares “c-numbers” que se identificarán más adelante.

Para el estudio de la energía libre proveniente del campo vectorial A_μ se procede como anteriormente. En efecto, derivando e integrando respecto de la temperatura se obtiene

$$-\beta F_A = K - \frac{1}{2} \int \frac{dT}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(-2\omega_n^2\right) \text{Tr} G(\vec{x}, \vec{x}'; \omega_n)|_{B_A}, \quad (3.70)$$

donde se ha utilizado la periodicidad de los campos bosónicos en la dirección del tiempo euclídeo para la introducción de las frecuencias ω_n .

La función de Green señalada en (3.70) satisface

$$\left(-\omega_n^2 + \nabla^2\right) \delta^{\mu\rho} G_\rho^\sigma(\vec{x}, \vec{x}'; \omega_n) = \delta^{\mu\sigma} \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}'); \quad x \in \Omega_R \quad (3.71)$$

y la condición de contorno que surge de la conservación (anulación) en el borde de la corriente asociada a la simetría de gauge. Esta condición de contorno impone, sobre el tensor de campo

$$n_\mu F^{\mu\nu}|_{r=R} = 0. \quad (3.72)$$

Si bien se ha fijado la condición de gauge mediante la introducción de la delta funcional y el determinante de Fadeev y Popov, aún queda una libertad adicional, que surge de la indeterminación en el gauge de Lorentz

$$A_\mu \rightarrow A_\mu + \partial_\mu \chi; \quad \partial^2 \chi = 0. \quad (3.73)$$

Nótese que en una región acotada la última ecuación tendrá soluciones no triviales. Esta indeterminación puede ser eliminada [35] mediante el agregado de una condición de contorno adecuada, compatible con (3.72). Esta es

$$n_\mu A^\mu|_{r=R} = 0. \quad (3.74)$$

Considerando la componente $\nu = 0$ de la ecuación (3.72), junto con (3.74), resulta inmediato que la componente temporal del campo vectorial, A_0 , tiene una contribución igual a la de un campo escalar (c-number) que satisface condiciones de contorno de Neumann. Esta cancela la mitad del aporte de ghosts.

Las componentes tipo espacio de la función de Green del campo vectorial son la solución del problema (ver Apéndice B)

$$\left(-\omega_n^2 + \nabla^2\right) \delta^{ij} G^{jk}(\vec{x}, \vec{x}'; \omega_n) = \delta^{ij} \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}'); \quad x \in \Omega_R$$

$$P_{\perp}^{ij} G^{jk}(\vec{\alpha}, \vec{x}'; \omega_n) = 0$$

$$\left(1 + R \frac{\partial}{\partial r} \Big|_{r=R}\right) P_{\parallel}^{ij} G^{jk}(\vec{\alpha}, \vec{x}'; \omega_n) = 0, \quad (3.75)$$

donde P_{\perp} y P_{\parallel} son proyectores perpendicular y paralelo, respectivamente, a la superficie de la cavidad. Las condiciones de contorno señaladas se obtienen fácilmente de las componentes espaciales de (3.72) y de (3.74). G^{jk} fue calculada en [19] (a $T = 0$), utilizando la base de los armónicos esféricos vectoriales, combinada adecuadamente para separar los modos longitudinal, transversal eléctrico y transversal magnético.

Resumiendo, cuando se calcula la traza de la función de Green del campo vectorial, se obtiene

$$Tr [G(\vec{x}, \vec{x}'; \omega_n)]_B = 2Tr [G(\vec{x}, \vec{x}'; \omega_n)]_{\text{escalarNeumann}}$$

$$+ \frac{1}{\omega_n^2} + \frac{1}{2\omega_n^2} \sum_{j=1}^{\infty} 2\nu \left[(\nu - d_{n,j}) + \left(\nu - \frac{d_{n,j} + 2\rho^2}{1 + 2d_{n,j}} \right) \right]. \quad (3.76)$$

El primer término cancela totalmente el aporte de los campos fantasma. De los restantes se obtiene la energía libre total para el campo de gauge abeliano,

$$-\beta F = K + \frac{1}{2} \int \frac{dT}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \left\{ 2\delta_{j,0} + (1 - \delta_{j,0}) 2\nu \left[(\nu - d_{n,j}) + \left(\nu - \frac{d_{n,j} + 2\rho^2}{1 + 2d_{n,j}} \right) \right] \right\}. \quad (3.77)$$

que, como en las versiones anteriores de los campos escalar y fermiónico, sólo toma sentido en el marco de alguna regularización. La introducción del regulador analítico ρ^{-s} hace que el segundo término de (3.77) se anule. En efecto,

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \delta_{j,0} \rho^{-s} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{1}{4} + \left(\frac{2\pi Rn}{\beta} \right)^2 \right\}^{-s/2}$$

$$= 2^s + 2 \left(\frac{2\pi R}{\beta} \right)^{-s} \zeta(s) + o(s) \xrightarrow{s \rightarrow 0} 1 + 2\zeta(0) = 0. \quad (3.78)$$

Los aportes restantes (salvo por el hecho de que ahora las sumatorias partirán de $j = 1$) corresponden a campos escalares que satisfacen condiciones de contorno tipo Dirichlet y tipo Robin, como se ve fácilmente de las ecuaciones (3.14) y (3.15).

La estrategia desarrollada previamente para aislar las singularidades puede repetirse. Se introduce el desarrollo de Debye de las funciones de Bessel y consistentemente el desarrollo de Taylor del término general de la suma doble, sumando y restando los primeros órdenes en ρ . En presencia del

regulador, se aislan partes finitas (en las que el límite $s \rightarrow 0$ puede tomarse en cada término de la sumatoria) de partes divergentes a regularizar. Así

$$\begin{aligned}
-\beta F &= K + \frac{1}{2} \int \frac{dT}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} 2\nu \\
&\times \left\{ \left[2\nu - x_n \frac{d}{dx_n} \log \left[(2\nu + 1) I_\nu^2(x_n) + 2x_n I_{\nu+1}(x_n) I_\nu(x_n) \right] \right] - \Delta_6 \right\} \\
&+ \frac{1}{2} \int \frac{dT}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \Delta_6 \rho^{-s}. \quad (3.79)
\end{aligned}$$

Nuevamente, el estudio del desarrollo de Debye sugiere la introducción de sumas dobles $\sigma_{m,d}$, similares a las de los casos anteriores, pero teniendo en cuenta los cambios en los índices de suma.

En el desarrollo de grandes z se tiene

$$\begin{aligned}
\sigma_{m,d} &= \zeta(m-d+s, 1/2) \\
&+ \left(\frac{1}{2\pi z} \right)^{m-d-1+s} \frac{\Gamma\left(\frac{m-d-1+s}{2}\right) \Gamma\left(\frac{d+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m+s}{2}\right)} \zeta(m-d-1+s) \\
&+ 2 \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{(-1)^\ell}{\ell!} \left(\frac{1}{2\pi z} \right)^{m+2\ell+s} \frac{\Gamma\left(\frac{m+2\ell+s}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m+s}{2}\right)} \zeta(m+2\ell+s) \\
&\times \left[\zeta[-(d+2\ell), 1/2] - \frac{1}{2^{d+2\ell}} \right], \quad (3.80)
\end{aligned}$$

que puede reemplazarse en el tercer término de (3.79), para obtener la energía libre a orden z^{-5}

$$\begin{aligned}
-\beta F &= K_H + \frac{\pi^2}{45} \frac{4\pi}{3} z^3 - \frac{4}{9} \pi z + \frac{5}{8} \log(z) - \beta E(z) \\
&+ \frac{16}{315} \frac{1}{\pi z} \log(z) + \frac{1}{3840} \frac{1}{2} \frac{1}{z^2} - \frac{1}{3465} \zeta(3) \frac{1}{2} \frac{1}{(\pi z)^3} + \frac{1}{38707200} \frac{1}{2} \frac{1}{z^4} \\
&- \frac{376}{2429225} \zeta(5) \frac{1}{2} \frac{1}{(\pi z)^5} + O\left(\frac{1}{z^6}\right). \quad (3.81)
\end{aligned}$$

En esta expresión

$$-\beta E(z) = \frac{1}{2\pi z} \left[\frac{110629}{217520} - \frac{16}{315} (\mathcal{C} - \log(2\pi)) - \frac{16}{315} \frac{1}{s} \right]. \quad (3.82)$$

Este resultado es similar al publicado en las referencias [43, 40], en las que se utiliza el desarrollo asintótico de la densidad de energía. Así como se ha visto en el caso fermiónico, tampoco en este caso aparece un término

proporcional a la superficie de la cavidad, ahora debido a que se han sumado contribuciones de los dos estados de polarización del campo de gauge.

Para completar el estudio del campo de gauge habrá que analizar el comportamiento en la región de pequeños z . Nuevamente, el aporte de las sumas dobles $\sigma_{m,d}$ puede separarse dando, en primera instancia, un término que contribuye a la energía de Casimir del sistema

$$\begin{aligned}
 -\beta F^{(1)} = \frac{1}{2\pi z} & \left[\frac{35431\pi}{1270080} - \frac{31}{2016}\mathcal{C} + \frac{9\pi^3}{32768} + \frac{677\pi^5}{4194304} - \frac{16}{315} \frac{1}{s} - \right. \\
 & \frac{137}{1680} \log(2) - \frac{481\pi}{21120}\zeta(3) + \frac{188682709\pi}{14898723840}\zeta(5) + \\
 & \left. 2\zeta'(-3, 1/2) - \frac{1}{2}\zeta'(-1, 1/2) \right]. \quad (3.83)
 \end{aligned}$$

Por otra parte se calcula numéricamente el aporte de $\sigma_{m,d}^{(2)}$, cortando las sumas dobles a valores suficientemente grandes de los índices de modo que la contribución de la cola de la serie resulte despreciable. En estos cálculos numéricos, las integrales en la variable z de los términos con m impar se realizaron por el método de Gauss-Laguerre. Nuevamente, el mal comportamiento del desarrollo de Debye para z pequeños fue señalado por la presencia de fuertes oscilaciones, que se cancelan al introducir las correcciones a tal desarrollo (segundo término de (3.79)). Finalmente se determinaron las constantes K_L y K_H , la primera imponiendo la anulación de la entropía a temperatura cero, la segunda ajustando las aproximaciones de grandes y pequeños z en la zona intermedia. Como resultado de estos cálculos se obtuvo la energía de Casimir del sistema, que en el marco de la regularización utilizada es

$$E_C = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi R} \left(\frac{16}{315} \frac{1}{s} + 0.004597 \right), \quad (3.84)$$

y la energía libre que se muestra en la Figura 3.5 como función de la variable adimensional z

3.4 Resumen del Capítulo 3

Habiendo introducido en el Capítulo 2 métodos para la evaluación de determinantes de cocientes de operadores elípticos (directamente relacionados con diferencias de energías libres de sistemas de interés físico) se puso en evidencia la necesidad de considerar mecanismos complementarios para el cálculo de los determinantes (o bien de las energías) de referencia.

Tal como se ha dicho, la función de Green contiene suficiente información como para permitir este cálculo, evitando la resolución del problema de autovalores del hamiltoniano (que en los casos de interés conduce a ecuaciones

Fig. 3.5: $-\beta F$ – Campo de gauge (abeliano) M. I. T.

trascendentes). De este modo se han obtenido los determinantes de referencia, relacionando sus valores con las funciones de Green que satisfacen las condiciones de contorno de cada problema.

En el Capítulo 2 se calculó la diferencia de la energía libre de fermiones confinados en una región esférica, sujetos a condiciones de contorno de bolsa quiral, respecto de la energía libre de una bolsa de M. I. T. En el presente capítulo, previo desarrollo del método de cálculo utilizando el modelo de prueba del campo escalar, se calculó la energía libre correspondiente a los términos de la bolsa M. I. T. Asimismo, para completar ese modelo, se estudió el caso del campo de gauge (abeliano) necesario para introducir los gluones en la bolsa.

En todos los casos se relacionó la energía libre con la traza regularizada de expresiones que contienen la función de Green. La utilización de las simetrías presentes en cada caso permitió la introducción de bases discretas que condujeron a la aparición de sumas dobles divergentes. En el marco de una regularización analítica, la introducción del desarrollo de Debye de las funciones de Bessel permitió el aislamiento de términos singulares que, a diferencia de otros finitos (calculados numéricamente), pudieron ser estudiados de forma analítica. Las singularidades resultaron independientes de la temperatura. En consecuencia, una vez renormalizado el problema (por la introducción de contratérminos independientes del campo en la energía de cero loop) a $T = 0$, la introducción de los efectos de temperatura finita no

da lugar a nuevas divergencias.

Fueron considerados desarrollos válidos en las regiones de $z = RT$ (única variable del problema) grande y pequeño. En la región de grandes z sólo el desarrollo de Debye resulta relevante, conduciendo a una serie de potencias de z^{-1} . Tal serie, coincidente con resultados de la literatura previa, puede entenderse como sucesivas correcciones por tamaño finito al comportamiento de gases libres. Por otra parte, en la región de pequeños z la corrección al desarrollo de Debye resultó de vital importancia. De la vinculación de ambas aproximaciones se obtuvo la energía libre para todo z .

Consideraciones especiales fueron necesarias para el estudio del campo de gauge. En efecto, la presencia de la simetría de gauge exige un tratamiento cuidadoso, correspondiente a la introducción de campos fantasmas mediante la técnica de Fadeev y Popov. Se ha demostrado que tales campos no aportan, al menos en el caso abeliano (o a 1-loop en el no abeliano), a la energía libre de tal sistema. Su contribución se cancela con la de los modos temporal y longitudinal, dejando sólo los términos correspondientes a los modos transversales, eléctrico y magnético.

En el Capítulo 4 se utilizarán todos estos resultados en el marco de modelos de interés en Teoría de Campos. En particular, se introducirán el modelo de la gota de plasma [40], simple extensión de la bolsa de M. I. T., y la bolsa quirral híbrida [44].

Capítulo 4

Aplicación a Modelos de Teoría de Campos

En el presente Capítulo se estudiará la aplicación de los métodos desarrollados para la evaluación de determinantes funcionales en regiones con borde a problemas de interés en Teoría Cuántica de Campos.

Más precisamente, las técnicas y cálculos desarrollados tienen una aplicación natural en el estudio de modelos efectivos para la descripción de hadrones, a temperatura finita.

Si bien la Cromodinámica Cuántica ha demostrado ser la base teórica para la descripción de las interacciones fuertes, existen enormes dificultades para deducir de ella la conocida propiedad de confinamiento, por ser éste de un fenómeno no perturbativo. Esto ha motivado la introducción de modelos efectivos, con confinamiento explícito, tales como los denominados de la bolsa [16, 45].

Los modelos de la bolsa han sido extensamente estudiados en los años 70 y 80, obteniéndose resultados resonantes tales como el ajuste de las masas de los bariones [46] a partir de la bolsa de M. I. T. En una aproximación al problema totalmente distinta, propiedades de bajas energías de los bariones han sido deducidas a partir de solitones del modelo de Skyrme. La combinación de ambas descripciones en modelos de dos fases (interna-quarks + externa-skyrmión) ha dado lugar al modelo llamado bolsa quiral híbrida.

Recientemente se ha despertado gran interés en el estudio de estos sistemas a temperatura finita [36, 47, 48]. En efecto, existe la posibilidad de que ocurra una transición de fase deconfinante a temperaturas suficientemente “bajas” como para ser alcanzadas en experimentos de altas energías. Se espera que la materia hadrónica pueda pasar a un nuevo estado, denominado plasma de quarks y gluones, a temperaturas entre 100 y 200 MeV.

Tales energías no parecen lejanas en la actualidad. En colisiones de iones pesados a altas energías se espera la formación del deconfinado plasma de quarks y gluones en la región de la colisión. A medida que éste se expande y

enfría, la materia se hadroniza, obteniéndose nuevamente la fase ordinada confinada [48].

La posibilidad de estudio de este tipo de transiciones de fase está relacionada con emprendimientos experimentales tales como RHIC (Relativistic Heavy Ion Collider - Brookhaven National Laboratory) donde se espera alcanzar energías de 100 GeV/nucleón en el sistema del centro de masa, o bien LHC (Large Hadron Collider - CERN) donde se estima disponer de 3 TeV/nucleón.

En este capítulo se estudiarán, como ejemplos de aplicación, los modelos de la gota de quarks y gluones, estrechamente relacionado con la bolsa de M. I. T. , y el de la bolsa quiral híbrida.

4.1 Cromodinámica Cuántica (Aspectos generales)

La descripción actual de las interacciones fuertes se basa en la cromodinámica cuántica (Q. C. D.). Un conjunto de campos fermiónicos sin masa, con grados de libertad internos de color y sabor, representan a los quarks. El lagrangiano libre para esas partículas es

$$\mathcal{L}_D = \bar{\Psi}_a^f i \partial_\mu \gamma^\mu \Psi_a^f \quad (4.1)$$

donde $a = 1, 2, 3$ es el índice de color, $f = u, d, s, \dots$ el de sabor y el campo $\Psi(x)$ está en la representación $(1/2, 0) \oplus (0, 1/2)$ del grupo de Lorentz.

El lagrangiano (4.1) resulta invariante frente a transformaciones globales del grupo $SU(3)_C$ de color

$$\mathcal{U} = e^{ig\theta_a t^a}$$

donde θ_a , $a = 1, 2, \dots, 8$ son los parámetros globales de la transformación, mientras que t^a son los generadores del grupo, conocidos como matrices de Gell-Mann.

Para extender esta simetría a una invarianza local, hay que introducir interacciones entre los fermiones y nuevos campos bosónicos. En efecto, los campos (de gauge) que mediarán las interacciones entre las partículas, se acoplan a éstas a través de la derivada covariante

$$(D_\mu)_{ij} = \delta_{ij} \partial_\mu - ig (t^a)_{ij} A_\mu^a(x) \quad (4.2)$$

El lagrangiano invariante de gauge local es

$$\mathcal{L}_1 = \bar{\Psi}_a^f i \gamma^\mu (D_\mu)_{ab} \Psi_b^f = \bar{\Psi}_a^f i \not{D}_{ab} \Psi_b^f \quad (4.3)$$

Para considerar la dinámica de los campos de gauge se introduce el tensor de intensidades de campo (covariante frente a transformaciones locales)

$$F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + f^{abc} A_\mu^b A_\nu^c, \quad (4.4)$$

y, de la construcción de un término cuadrático invariante de Lorentz, se obtiene el lagrangiano clásico de la Q. C. D.

$$\mathcal{L}_{Q. C. D.} = \bar{\Psi}_a^f i \not{D}_{ab} \Psi_b^f - \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F^{a,\mu\nu} \quad (4.5)$$

No se han considerado hasta ahora términos de masa para las partículas. Si, tal como se hará mas adelante, se restringe el estudio a los sabores u y d , la aproximación de masa nula resulta razonable.

Algunos aspectos fundamentales de esta teoría se detallan a continuación [49]

Renormalizabilidad: Demostrada por t'Hooft [50, 51] para las teorías de gauge no abelianas.

Universalidad: La simetría de gauge exige que los acoplamientos se expresen en términos de una única constante “g”.

Libertad Asintótica: Mostrada por Gross y Wilczek [52], y por Politzer [53]. La constante de acoplamiento efectiva se anula con la distancia. En tal régimen cobran sentido los cálculos perturbativos.

Confinamiento: La constante de acoplamiento efectiva crece con la distancia. No se encuentran entonces quarks ni gluones libres. Éste es un fenómeno claramente no perturbativo.

La deducción analítica del confinamiento del color a partir de la Q. C. D. ofrece formidables dificultades matemáticas en razón de su carácter no perturbativo. Esto ha conducido a la introducción de modelos efectivos donde se simula esta propiedad. Una forma de obtener explícitamente el confinamiento mediante la imposición de condiciones adicionales, que ha despertado gran interés [16, 54, 19, 55], corresponde a los llamados modelos de la “bolsa”. Estos tienen la ventaja de ser formulaciones covariantes (a diferencia, por ejemplo, de la consideración de potenciales confinantes), y han sido aplicados con gran éxito al ajuste de las masas de los hadrones [46].

El objeto de este Capítulo es utilizar los resultados de los Capítulos 2 y 3 para el estudio de algunas magnitudes referidas a modelos relacionados con la bolsa de M. I. T. [16] y la bolsa quiral híbrida [45].

4.2 Modelo de la bolsa de M. I. T.

El modelo de la bolsa de M. I. T. fue introducido por primera vez en 1974 [16], para la descripción de hadrones y sus interacciones fuertes en una teoría explícitamente confinante. Su descripción ha sido ampliamente discutida en la literatura [49, 16, 54] por lo que sólo se hará una breve reseña de sus características principales.

La idea fundamental consiste en suponer que los campos con grados de libertad de color son no nulos sólo en regiones acotadas del espacio. En consecuencia, han de estar sometidos a condiciones de contorno en el borde de esas regiones, que impidan su flujo al exterior.

Se considera un campo fermiónico sin masa, $\Psi_r(x)$, confinado en una cavidad, en cuyo interior satisface la ecuación de Dirac libre

$$i\gamma^\mu \partial_\mu \Psi_r(x) = 0, \quad (4.6)$$

donde r representa a los índices de color y sabor (se considerarán sólo dos sabores).

La simetría del problema frente a transformaciones de $SU(2)_f \otimes SU(3)_C$ da lugar a la conservación local, en el interior de la bolsa, de las corrientes

$$j_{rs}^\mu(x) = \bar{\Psi}_r(x) \gamma^\mu \Psi_s(x). \quad (4.7)$$

La conservación del color en el interior de la bolsa se satisface si la componente normal de estas corrientes se anula en el borde

$$n_\mu j_{rs}^\mu|_{\partial\Omega} = 0 \quad \Rightarrow \quad \bar{\Psi}_r(x) n_\mu \gamma^\mu \Psi_s(x)|_{\partial\Omega} = 0 \quad (4.8)$$

Si bien la simple anulación del campo Ψ_r daría lugar al cumplimiento de (4.8), tal condición de contorno resulta incompatible con la ecuación de primer orden (4.6), ya que no define un problema elíptico de borde [26].

Teniendo en cuenta que la normal a la bolsa es tipo espacio, $(\vec{\gamma} \cdot \vec{n})^2 = -1$, se obtiene una condición de contorno alternativa que también conduce a (4.8)

$$i n_\mu \gamma^\mu \Psi_r(x) = -\Psi_r(x) \quad x \in \partial\Omega \quad (4.9)$$

En efecto, si $(1 + i \not{n}) \Psi_r = 0$, puede proponerse $\Psi_r = (1 - i \not{n}) \chi_r$ en el borde. Evidentemente, $\bar{\Psi}_r = \bar{\chi}_r (1 + i \not{n})$ que conduce a $\bar{\Psi}_r \not{n} \Psi_s = 0$.

Por otra parte, el tensor de energía impulso

$$T_D^{\mu\nu}(x) = \sum_r \left[-\frac{i}{2} \left(\bar{\Psi}_r \gamma^\mu \partial^\nu \Psi_r - \partial^\nu \bar{\Psi}_r \gamma^\mu \Psi_r \right) \right] \quad (4.10)$$

también resulta localmente conservado. Para que no haya flujo de energía-impulso a través del borde de la cavidad debería imponerse $n_\mu T^{\mu\nu}(x)|_{\partial\Omega} =$

0. La condición de contorno (4.9) no alcanza para que ésto se cumpla. En efecto, en el borde se obtiene

$$n_\mu T^{\mu\nu}|_{\partial\Omega} = n_\nu \frac{1}{2} \partial^\nu \left(\sum_r \bar{\Psi}_r(x) \Psi_r(x) \right) \Big|_{\partial\Omega}, \quad (4.11)$$

Se introduce entonces una presión sobre la superficie de la bolsa, B , que se ajusta de modo de asegurar su estabilidad,

$$B = n_\mu T^{\mu\nu}|_{\partial\Omega}. \quad (4.12)$$

Si bien hasta ahora se ha considerado sólo el sector de quarks de la bolsa de M.I.T., un modelo realista debe involucrar también a los gluones. De hecho, es la interacción de los fermiones con estos campos la que debe prevenir en la Q. C. D. la existencia de hadrones cuyos números cuánticos puedan ser simplemente los de un quarks. Se acoplan entonces las variables de color a un campo de Yang–Mills. Como éste también transporta carga de color, debe imponerse que sea no nulo sólo en el interior de la bolsa [54]. Su tensor de intensidades es

$$F_a^{\mu\nu} = \partial^\mu A_a^\nu - \partial^\nu A_a^\mu + g f_{abc} A_b^\mu A_c^\nu, \quad (4.13)$$

donde f_{abc} son las constantes de estructura del grupo $SU(3)$ de color.

En esas condiciones, la corriente de color es suma de las contribuciones de quarks y gluones,

$$j_\nu^a = g \left[\bar{\Psi}_r^f (t^a)_{rs} \gamma_\nu \Psi_s^f + f^{abc} F_{\mu\nu}^b A^{c,\mu} \right]. \quad (4.14)$$

La anulación propuesta para la componente normal de la corriente de color del sector fermiónico exige su contraparte en la corriente de color de los gluones. De este modo surge la condición de contorno para el campo $F_a^{\mu\nu}$

$$n_\mu F_a^{\mu\nu}|_{\partial\Omega} = 0. \quad (4.15)$$

Para la conservación del tensor de energía–impulso habrá que considerar también el aporte del campo de gauge. De este modo, en el borde de la cavidad, la presión B queda definida a partir de

$$B = \frac{1}{2} n_\nu \partial^\nu \left(\sum_r \bar{\Psi}_r(x) \Psi_r(x) \right) - \frac{1}{4} F^{a,\mu\nu}(x) F_{\mu\nu}^a(x) \Big|_{\partial\Omega}. \quad (4.16)$$

La corriente de color del modelo completo es localmente conservada en el interior de la cavidad. La correspondiente carga es conservada en virtud de las condiciones de contorno en el borde, y debe ser nula como corresponde a estados físicamente aceptables.

4.2.1 Gota de quarks y gluones

Como ejemplo de aplicación de los cálculos realizados en el Capítulo 3 se estudiará la energía libre de un modelo que contiene campos fermiónicos y de gauge confinados en una cavidad esférica estática de radio R , y sometidos a las condiciones de contorno discutidas en la sección anterior.

Los determinantes funcionales considerados en el Capítulo 3 corresponden a tomar la energía libre del modelo a primer orden en el desarrollo en “loops”. En esta aproximación se desprecia el acoplamiento entre quarks y gluones, así como la autointeracción de estos últimos. De este modo, los índices de color y sabor dan lugar simplemente a factores de degeneración, $N_q = 3 \times 2$ para el campo fermiónico y $N_g = 8$ para un campo de gauge abeliano. Podrán utilizarse entonces los resultados del Capítulo 3.

El modelo se completa con la introducción de la presión estabilizadora B , y de un campo escalar sin masa en el exterior de la bolsa, que representa a los piones. Resulta razonable considerar que la contribución de este último corresponde a la energía libre de un gas libre a temperatura T , que es proporcional al volumen que ocupa,

$$-\beta F_\pi = N_\pi \left(\frac{1}{90} \right) \pi^2 \left(V_\infty - \frac{4\pi}{3} R^3 \right) T^3, \quad (4.17)$$

donde $N_\pi = 3$ es el factor de degeneración del campo de piones. El primer término (divergente) puede ser sustraído refiriendo esta energía a la del campo ocupando todo el espacio [40].

Así, se tiene

$$-\beta F = -\beta [6F_f + 8F_g + F_\pi + BV], \quad (4.18)$$

donde $V = \frac{4}{3}\pi R^3$.

Resta fijar el valor de la constante B . A diferencia la determinación que se realiza para el ajuste de las masas de los hadrones [46], el cálculo de esta constante se hará como en [40], imponiendo (en el límite termodinámico) el equilibrio de presiones a la temperatura crítica a la que se espera el deconfinamiento. Utilizando los términos proporcionales al volumen de los desarrollos de grandes $z = RT$, (3.52) y (3.81), el equilibrio de presiones corresponde a

$$\begin{aligned} 6P_f + 8P_g + P_\pi + B = \\ -6 \frac{7\pi^2}{180} T_C^4 - 8 \frac{\pi^2}{45} T_C^4 + 3 \frac{\pi^2}{90} T_C^4 + B = 0, \end{aligned} \quad (4.19)$$

de donde se obtiene

$$B = \frac{34}{90} \pi^2 T_C^4.$$

Se fijará arbitrariamente $T_C = 150\text{MeV}$, del orden del valor esperado para la temperatura de deconfinamiento.

Fig. 4.1: Energía libre para la gota de quarks y gluones – De arriba a abajo: $T = 147, 150, 152, 154\text{MeV}$

Sumando las cuatro contribuciones del segundo miembro de (4.18) se obtiene la energía libre del modelo de la gota de quarks y gluones, mostrada en la Figura 4.1. En ella se grafica la energía libre en función del radio R de la cavidad, para temperaturas $T = 147, 150, 152, 154\text{MeV}$.

Se observa que a temperaturas inferiores a T_C la energía libre del modelo presenta un mínimo absoluto, sugiriendo la existencia de un radio de equilibrio no nulo. A mayores temperaturas que la crítica el mínimo deja de ser absoluto y el estado del hadrón es inestable, ya que la fase de quarks y gluones tiende a ocupar todo el espacio. Esto puede ser interpretado como una transición de deconfinamiento.

Los resultados obtenidos son comparables con los señalados en [40], donde se calculan las energías libre en base a los autovalores del hamiltoniano. El tipo de cálculo numérico allí realizado no permite un análisis detallado de las singularidades de la energía de Casimir. Más bien, sólo se retienen términos proporcionales al volumen, a los que se suman las contribuciones dependientes de la temperatura. Como consecuencia, el radio de equilibrio señalado en [40] corresponde a $R = 0$.

Del análisis realizado en esta tesis surge el comportamiento cualitativamente aceptable de la Figura 4.1. No obstante, debe señalarse que la posición del radio de equilibrio está indeterminada en este modelo. En efecto, a pequeños radios resulta dominante el término de la energía de

Casimir, proporcional a $1/R$, que es el que contiene las singularidades. Los polos en $1/s$ en las ecuaciones (3.57) y (3.84) deben ser eliminados sumando contratérminos al hamiltoniano clásico, procedimiento que deja indeterminado un coeficiente, que debe ser fijado mediante una condición adicional (o medida experimental).

Para construir la curva de la Figura 4.1 se han introducido contratérminos que sólo remueven los polos en $1/s$, sin modificar las partes finitas.

4.3 Bolsa quirral híbrida

Se ha dicho en este Capítulo que el lagrangiano de la Q. C. D. presenta simetría frente a transformaciones globales de $SU(2)_f$. En los modelos de la bolsa esta simetría da lugar a la conservación local de corrientes en el interior de la región de confinamiento. En el borde dicha conservación debe realizarse mediante la imposición de adecuadas condiciones de contorno.

Cuando las masa de los fermiones son nulas el lagrangiano (4.5) tiene una simetría global más amplia: la simetría quirral $SU(2)_L \otimes SU(2)_R$. Sin embargo, las condiciones de contorno impuestas al modelo de la bolsa de M. I. T. rompen la simetría axial (aquella para la cual $\mathcal{U}_L = \mathcal{U}_R^\dagger$).

Resulta deseable que el modelo efectivo tenga todas las simetrías de la Q. C. D. . Esto da lugar al modelo de la bolsa quirral híbrida, el cual será revisado en sus conceptos fundamentales en la presente sección. Descripciones más extensas pueden encontrarse en [49, 55].

Para la bolsa quirral híbrida se consideran quarks y gluones confinados en una cavidad que, por simplicidad, se supondrá esférica estática y de radio R . El sector de gluones corresponde al descrito en la bolsa de M. I. T.

Para los fermiones se introduce un acoplamiento con un campo externo por medio de las condiciones de contorno. La selección de las mismas corresponde a la imposición de la conservación de la corriente axial en el borde de la cavidad.

Si se considera la condición de contorno señalada en (2.36)

$$A\Psi = \frac{1}{2} \left(1 + i \not{n} e^{-i\theta(\tau \cdot n)\gamma^5} \right) \Psi = 0,$$

se mantiene la conservación de la corriente vectorial en el borde, ya que $\bar{\Psi}_r(x) \not{n} \Psi = 0$, como puede verificarse fácilmente. Ahora bien, el acoplamiento de los fermiones con el campo externo, representado en esa expresión por el ángulo quirral θ , hace posible la conexión del flujo no nulo de la corriente axial de los fermiones con el correspondiente al campo externo. Puede entonces proponerse un modelo de dos fases [6, 44, 7], una interna a la cavidad, con grados de libertad de quarks y gluones, y la otra, externa a la misma, donde se utiliza el modelo bosónico de Skyrme [14, 56].

En la presente sección se reseñará, en primera instancia, el llamado modelo de Skyrme. Se considerará una solución clásica con simetría “esférica”, usualmente denominada skyrmión. Esta solución queda completamente descrita en términos del llamado ángulo quirral $\theta(r)$. Las ecuaciones de movimiento del modelo conducen a una ecuación diferencial no lineal para $\theta(r)$ que debe ser resuelta numéricamente. Alternativamente, se utilizará el perfil de Atiyah y Manton, que da una expresión analítica muy aproximada para el ángulo quirral y admite una extensión a temperatura no nula, que se utilizará para el análisis de la energía libre del modelo híbrido completo.

Por otra parte, se expondrán los resultados para la energía de Casimir y la energía libre de los fermiones acoplados al campo externo, en función del radio, la temperatura y el valor del ángulo quiral. Para la completa determinación de estas magnitudes debe analizarse la renormalización de las divergencias del modelo. Se considerarán condiciones que permitan fijar los valores de las constantes indeterminadas que resultan de la sustracción de las singularidades, así como de las constantes que aparecen en el lagrangiano de Skyrme.

Se emplearán los resultados de los Capítulos 2 y 3 para obtener la energía total de temperatura cero de este modelo híbrido, que muestra una marcada independencia del radio de la cavidad, dando sustento a la hipótesis del “gato de Cheshire” [57].

Finalmente se analizará la aplicación de los resultados para la energía libre al estudio de transiciones de fase deconfinantes.

4.3.1 Modelo de Skyrme

El modelo de Skyrme corresponde al intento de descripción de los bariones a través de solitones de un modelo sigma no lineal bosónico efectivo. Correspondiendo a una teoría no renormalizable, no admite un tratamiento cuántico completo. En realidad debe ser entendido como un modelo a ser truncado, reteniendo de él los grados de libertad de bajas energías únicamente.

Esta idea fue introducida por T. H. Skyrme en [14, 56] y posteriormente retomada por E. Witten en [4], quien complementó este modelo de modo de reproducir el spin semientero de estas partículas.

Así, a partir de solitones del modelo de Skyrme, que tienen precisamente los números cuánticos de los bariones, puede reproducirse su comportamiento a bajas energías (ver por ejemplo [5] para un ajuste de masas, momentos magnéticos y constante de acoplamiento axial).

El lagrangiano de Skyrme es

$$\mathcal{L} = \frac{1}{16} F_\pi^2 \text{Tr} \left(\partial_\mu U \partial^\mu U^\dagger \right) + \frac{1}{32e^2} \text{Tr} \left[(\partial_\mu U) U^\dagger, (\partial_\nu U) U^\dagger \right]^2, \quad (4.20)$$

donde el campo $U(x)$ toma valores en el grupo $SU(2)$. En el término cinético, F_π es la constante de decaimiento del pión (su valor experimental $F_\pi = 186 \text{ MeV}$). El segundo término resulta necesario para la estabilización del solitón, y su intensidad viene dada por el parámetro e .

Introduciendo $L_\mu = U^\dagger \partial_\mu U$ y $R_\mu = U \partial_\mu U^\dagger$, las ecuaciones clásicas de movimiento que se obtienen de (4.20) son

$$\partial_\mu \left\{ F_\pi^2 L_\mu - \frac{1}{e^2} [[L^\nu, L_\mu], L_\nu] \right\} = 0. \quad (4.21)$$

Resulta evidente que el lagrangiano (4.20) es invariante frente a transformaciones globales de la forma

$$U \rightarrow AUB^{-1},$$

por lo que este sistema presenta una simetría $SU(2)_L \otimes SU(2)_R$. Esto da lugar a la existencia de corrientes localmente conservadas. La corriente vectorial, correspondiente a transformaciones con $A = B$,

$$V_\mu^a = i\text{Tr} \left[\frac{1}{8} \left\{ F_\pi^2 (R_\mu + L_\mu) - \frac{1}{e^2} [R^\nu, [R_\mu, R_\nu]] - \frac{1}{e^2} [L^\nu, [L_\mu, L_\nu]] \right\} \tau^a \right], \quad (4.22)$$

y la corriente axial, correspondiente a $A = B^{-1}$,

$$A_\mu^a = i\text{Tr} \left[\frac{1}{8} \left\{ F_\pi^2 (R_\mu - L_\mu) - \frac{1}{e^2} [R^\nu, [R_\mu, R_\nu]] + \frac{1}{e^2} [L^\nu, [L_\mu, L_\nu]] \right\} \tau^a \right]. \quad (4.23)$$

Se llama ansatz de Skyrme a la proposición de una solución clásica de (4.21), estática y de simetría esférica, de la forma

$$U_0(\vec{x}) = e^{i\theta(r)(\vec{\tau} \cdot \vec{x})}, \quad (4.24)$$

donde τ_k son la matrices de Pauli, con las condiciones de contorno

$$\theta(r=0) = \pi \quad \theta(r) \rightarrow_{r \rightarrow \infty} 0. \quad (4.25)$$

La correlación entre índices espaciales e internos en el exponente del segundo miembro de (4.24) hacen topológicamente estable a esta configuración. Recuérdese que $\Pi_3(SU(2)) \approx \mathbf{Z}$; la clase de homotopía de la solución se identifica con el número bariónico que, en consecuencia, corresponde a una magnitud conservada (en este caso $\mathcal{B} = 1$).

De la introducción de (4.24) en las ecuaciones de movimiento se obtiene una ecuación diferencial para la determinación de la función angular $\theta(r)$,

$$\begin{aligned} \theta'' + \frac{2}{r}\theta' - \frac{1}{r^2}\text{sen}(2\theta) + \frac{4}{(eF_\pi)^2} \left[-\frac{\text{sen}^2\theta\text{sen}(2\theta)}{r^4} \right. \\ \left. + \frac{\theta'^2\text{sen}(2\theta)}{r^2} + 2\frac{2\theta''\text{sen}^2\theta}{r^2} \right] = 0, \end{aligned} \quad (4.26)$$

que debe ser resuelta numéricamente [5, 6].

De la resolución de la ecuación diferencial no lineal (4.26) se obtiene el perfil $\theta(r)$. Alternativamente, esta ecuación puede deducirse de la minimización de la energía de la configuración estática (4.24),

$$M_{Sk} = - \int d^3x \mathcal{L} =$$

$$4\pi \int_0^\infty dr \left\{ \frac{F_\pi^2}{8} (r^2\theta'^2 + 2\text{sen}^2\theta) + \frac{1}{2e^2} \frac{\text{sen}^2\theta}{r^2} \{2r^2\theta'^2 + \text{sen}^2\theta\} \right\}. \quad (4.27)$$

Por otra parte, conviene analizar el flujo de la corriente axial a través de una esfera de radio r que rodea al origen, expresión que resultará de utilidad más adelante. Reemplazando (4.24) en (4.23) e integrando su componente normal a la superficie de la esfera, $n_a n_i A^{a,i}$, se obtiene

$$A_{Sk}(r) = \int_{|\vec{x}|=r} d\sigma n_a n_i A^{a,i} = \pi F_\pi^2 R^2 \theta' \left[1 + \frac{8}{e^2 F_\pi^2 R^2} \text{sen}^2\theta \right] \quad (4.28)$$

Para los cálculos que seguirán conviene introducir la variable adimensional

$$\hat{r} = \frac{eF_\pi}{2} r \quad (4.29)$$

En función de ésta, la expresión de la energía del skyrmión resulta

$$M_{Sk} = \frac{F_\pi}{4e} \hat{M} = \frac{F_\pi}{4e} 4\pi \int_0^\infty d\hat{r} \left[\hat{r}^2 \theta'^2 + 2\text{sen}^2\theta + \frac{\text{sen}^2\theta}{\hat{r}^2} (2\hat{r}^2 \theta'^2 + \text{sen}^2\theta) \right], \quad (4.30)$$

y la del flujo de la corriente axial

$$A_{Sk}(\hat{r}) = \frac{2\pi F_\pi}{e} \hat{r}^2 \theta' \left[1 + \frac{2}{\hat{r}^2} \text{sen}^2\theta \right]. \quad (4.31)$$

En lugar de la resolución numérica de (4.26) se utilizará la aproximación debida a M. F. Atiyah y N. S. Manton [58], en la que se propone una forma analítica para el perfil $\theta(r)$, sobre la base de argumentos topológicos. En efecto, en [58] se construyen configuraciones para el campo $U(x)$ mediante la holonomía (loop de Wilson–Polyakov) de campos de Yang–Mills con carga topológica k ($k \in \mathbf{Z}$), calculada sobre rectas paralelas al eje del tiempo euclídeo,

$$U(x) = \mathbf{T} e^{-\int_{-\infty}^\infty dt A_0(\vec{x}, t)}, \quad (4.32)$$

donde $U(x) \rightarrow_{|\vec{x}| \rightarrow \infty} 1$ si $A_0(x)$ decrece suficientemente rápido. Puede mostrarse que esta configuración tiene número bariónico $\mathcal{B} = k$.

El campo de Yang–Mills con $k = 1$ deriva del instantón de t'Hooft,

$$A_0 = \frac{i}{2\rho} \vec{\nabla} \rho \cdot \vec{\tau}$$

$$\rho = 1 + \frac{\lambda^2}{x^2}, \quad (4.33)$$

donde λ (arbitrario) mide el ancho de esta solución.

Fig. 4.2: Perfil de Atiyah y Manton para el ángulo quiral $\theta(\hat{r})$

Ahora bien, en la recta $t \in \mathbf{R}$, con \vec{x} constante, $A_0(x)$ es proporcional a un elemento fijo del álgebra de Lie de $SU(2)$, y la integral ordenada en (4.32), se resuelve trivialmente para dar

$$U(\vec{x}) = e^{i\theta(r)(\vec{x}\cdot\vec{\tau})} \quad \text{con} \quad \theta(\hat{r}) = \pi \left[1 - \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\hat{\lambda}}{\hat{r}}\right)^2}} \right], \quad (4.34)$$

donde $\hat{\lambda} = \frac{eF\pi}{2}\lambda$. Esta configuración satisface las condiciones de contorno correctas y, para una adecuada elección del parámetro $\hat{\lambda}$ constituye una muy buena aproximación a la solución numérica de la ecuación (4.26). Esto ocurre para $\hat{\lambda} = 1,45225$, valor para el que se hace mínima la energía de la configuración, ecuación (4.27).

Esta aproximación tiene la ventaja de dar una expresión analítica para el perfil del skyrmión. Otra ventaja consiste en que esta formulación admite una extensión al caso de temperatura no nula.

En efecto, K. J. Eskola y K. Kajantie han introducido una configuración para el campo de Skyrme a temperatura no nula [59], partiendo de un instantón térmico, es decir, de una superposición de instantones que da lugar a una configuración periódica de período β en la dirección del tiempo euclídeo,

$$\rho(\vec{x}, t) = 1 + \lambda^2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(t - n\beta)^2 + |\vec{x}|^2}$$

$$= 1 + \frac{\mu\lambda^2}{2r} \frac{\sinh(\mu r)}{\cosh(\mu r) - \cos(\mu t)}, \quad (4.35)$$

donde $\mu = 2\pi\hat{T}$, siendo la temperatura adimensional $\hat{T} = \frac{2}{eF_\pi}T$. En este caso, el loop de Wilson–Polyakov también se calcula exactamente,

$$U(x) = \mathbf{T}e^{-\int_0^\beta dt A_0(\vec{x}, t)} = e^{i\theta(r, \mu)(\vec{x} \cdot \vec{\tau})}, \quad (4.36)$$

donde

$$\theta(\hat{r}, \mu) = \pi \left[1 - \frac{1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\hat{\lambda}}{\hat{r}}\right)^2 [\mu\hat{r} \coth(\mu\hat{r}) - 1]}{\sqrt{1 + \frac{1}{4} (\mu\hat{r})^2 \left(\frac{\hat{\lambda}}{\hat{r}}\right)^4 + (\mu\hat{r}) \left(\frac{\hat{\lambda}}{\hat{r}}\right)^2 \coth(\mu\hat{r})}} \right] \quad (4.37)$$

La función $\theta(\hat{r}, \mu)$, para $\hat{r} > 0$, es decreciente con la temperatura. Nótese que la aproximación de “gas de instantones” de la ecuación (4.35) sólo tiene sentido para temperaturas $\hat{T} < 1/\hat{\lambda}$ ($\lambda < \beta$); para temperaturas mayores los instantones (de ancho λ) se superponen apreciablemente, y sus interacciones no son despreciables. Esto no constituye una seria limitación para su aplicación al modelo de Skyrme, ya que este mismo es un modelo efectivo para bajas energías.

Por otra parte, el parámetro $\hat{\lambda}$ puede ser fijado a cada temperatura de manera de minimizar la funcional energía, (4.27). La forma de la función $\hat{\lambda}(\mu)$ así obtenida se muestra en la Figura 4.3.

Habiendo reseñado las principales características del modelo de Skyrme, y su extensión a temperatura no nula, en la siguiente sección se lo introducirá como la fase externa del modelo de bolsa quiral híbrida. Tal como se verá, el flujo de la corriente axial del sector de los fermiones confinados puede ser ajustado con el correspondiente al skyrmión, garantizando su conservación en el límite de separación de ambas fases.

4.3.2 Modelo de dos fases

Hasta ahora se han considerado dos modelos que describen distintos aspectos del comportamiento de los hadrones. Por un lado el modelo de Skyrme, reseñado en la sección anterior, que describe a los bariones como solitones topológicos de un lagrangiano efectivo que involucra sólo los grados de libertad de bajas energías (piones). Por otra parte, el modelo de la bolsa de M. I. T. que, según se ha visto, combina el confinamiento con la libertad asintótica de manera explícita.

La combinación de ambos modelos en la llamada bolsa quiral híbrida ofrece una imagen de los bariones muy interesante. En efecto, introduciendo condiciones de contorno adecuadas sobre los fermiones es posible recuperar la simetría axial (perdida en el caso de las condiciones de contorno de M. I. T.) mediante el ajuste del flujo de la corriente axial de fermiones, desde el interior

Fig. 4.3: Parámetro de perfil $\hat{\lambda}$ como función de \hat{T}

de la bolsa, con el correspondiente al skyrmión en el exterior, ecuación (4.31). Por otra parte, la presencia en el interior de la bolsa de los grados de libertad fundamentales de la Q. C. D. dota al modelo de mayor realismo.

Las condiciones de contorno para este modelo híbrido son

$$A\Psi = \frac{1}{2} \left(1 + i \not{x} e^{-i\theta(\tau \cdot n)\gamma^5} \right) \Psi = 0,$$

donde θ representa el valor que toma el perfil del skyrmión (centrado en el origen) sobre el borde de la bolsa.

Distintas magnitudes físicas asociadas a estos modelos han sido estudiadas previamente. Así, por ejemplo, J. Goldstone y R. L. Jaffe [60] mostraron que el número bariónico del vacío del campo fermiónico confinado en el interior de la bolsa depende de θ

$$N_q(\theta) = \begin{cases} -\frac{1}{\pi} \left[\theta(R) - \frac{\text{sen}2\theta(R)}{2} \right] & 0 \leq \theta < \frac{\pi}{2} \\ 1 - \frac{1}{\pi} \left[\theta(R) - \frac{\text{sen}2\theta(R)}{2} \right] & \frac{\pi}{2} < \theta \leq \pi \end{cases}. \quad (4.38)$$

En este modelo híbrido resta aún considerar el aporte de la “cola” del skyrmión exterior [60, 14]

$$N_{Sk} = \frac{1}{\pi} \left[\theta(R) - \frac{\text{sen}2\theta(R)}{2} \right] \quad (4.39)$$

Fig. 4.4: Energía (adimensionalizada) del estado fundamental del hamiltoniano de Dirac como función de θ

Sumando las contribuciones de las dos fases, (4.38) y (4.39) se obtiene que el número bariónico es

$$N = N_q + N_{Sk} = \begin{cases} 0 & 0 \leq \theta < \frac{\pi}{2} \\ 1 & \frac{\pi}{2} < \theta \leq \pi \end{cases} . \quad (4.40)$$

Nótese que el comportamiento discontinuo de N proviene de la contribución del mar de Dirac de los fermiones confinados.

En la Figura 4.4 se muestra cómo el primer autovalor positivo del hamiltoniano de Dirac [61] (para $\theta < \pi/2$) cambia de signo en $\theta = \pi/2$, situación que se mantiene hasta $\theta = \pi$. En consecuencia, el mar de Dirac para $\frac{\pi}{2} < \theta \leq \pi$ incluye los “quarks de valencia” del barión. Por el contrario, para $0 \leq \theta < \pi/2$ esos quarks de valencia deben ser incluidos explícitamente.

De ese modo, el estado de vacío de este modelo tiene, a pequeños radios de la bolsa ($\theta > \pi/2$ en la Figura 4.2), los números cuánticos de un barión. A partir del radio en el que θ toma el valor $\pi/2$ es necesario incluir explícitamente los quarks de valencia para describir correctamente esas partículas.

Un comportamiento similar al del número bariónico se observará más adelante en el estudio de la energía de Casimir.

Los resultados de los capítulos anteriores permiten realizar el análisis de

la energía del modelo completo a $T = 0$. Según se ha visto en el Capítulo 3, la energía de Casimir de la bolsa de M. I. T. , proveniente tanto del campo fermiónico (ecuación (3.57)) como del campo de gauge (ecuación (3.84)), tiene una dependencia con el radio de la cavidad de la forma $1/R$. El correspondiente coeficiente es indeterminado debido al procedimiento de sustracción de las singularidades.

Ahora bien, en este modelo de dos fases resulta natural esperar que, cuando $R \rightarrow 0$, la energía (masa) del barión tienda a la correspondiente al skyrmión puro (que, como se ha dicho, representa convenientemente a estas partículas). Esto hace inaceptable todo término divergente en el límite $R \rightarrow 0$, sugiriendo una condición adicional para la determinación del coeficiente arbitrario de $1/R$ en la energía de Casimir total (que, en consecuencia, deberá tomarse como nulo).

En lo que se refiere al aporte que surge de cambiar las condiciones de contorno a las correspondientes a la bolsa quirral, en el Capítulo 2 también se encontró un término singular (ver ecuación (2.82)). En efecto se ha visto que

$$\frac{1}{R} \Delta f_d^{(1)} = \frac{1}{4\pi R} \left(\frac{8}{15s} - 5.604 \right) \text{sen}^2\theta + \text{términos finitos.} \quad (4.41)$$

Dicha singularidad puede ser removida incorporando al lagrangiano del campo de Skyrme un término de superficie

$$\frac{K_0}{16\pi R} \int_{r=R} d^2x \text{tr} \left\{ L_\alpha L_\alpha - (n_\alpha L_\alpha)^2 \right\} = \frac{K_0}{R} \text{sen}^2\theta, \quad (4.42)$$

donde $L_\alpha = U^\dagger \partial_\alpha U = e^{-i\theta(\vec{\tau} \cdot \vec{\tau})} \partial_\alpha e^{i\theta(\vec{\tau} \cdot \vec{\tau})}$.

Éste término, que preserva la simetría $SU(2)_L \otimes SU(2)_R$ del modelo, representa la introducción de una “tensión superficial” K_0 , como se describe en [19]. La eliminación del polo en (4.41) corresponde a la renormalización de K_0 , lo que supone la presencia de una nueva constante fenomenológica, K , a ser determinada mediante una condición adicional.

Una vez eliminadas las singularidades, la diferencia de energías libres de Helmholtz entre la bolsa quirral y la bolsa de M. I. T. , se construye como

$$\begin{aligned} & F(z, \theta) - F_{\text{MIT}}(z, \theta = 0) \\ &= \frac{1}{R} \left\{ \left(\Delta f_d^{(1)} + \Delta f_d^{(2)} + \Delta f_d^{(C)} \right) + \left(\Delta f_0^{\text{exp}} + \Delta_0^{(2)} \right) + K \text{sen}^2\theta \right\} \end{aligned} \quad (4.43)$$

donde los distintos términos han sido obtenidos en la Sección 2.3.3. Esta expresión (una vez fijado el valor de K de la forma que se discute más adelante), multiplicada por R para adimensionalizar, puede verse en la Figura 4.5 como función de z y θ

El flujo de la corriente axial de los fermiones a través de la superficie de la bolsa puede obtenerse derivando $-\beta F$, ecuación (4.43), respecto del

Fig. 4.5: Corrección a la energía libre por condiciones de contorno quirales. Se muestra $R\Delta F$ como función de z y θ

ángulo quiral. En efecto, de las ecuaciones (2.33) y (2.34) se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial\theta}(-\beta F) &= \frac{\partial}{\partial\theta} \ln Z \\ &= \frac{1}{Z} \int \mathcal{D}\bar{\Psi} \mathcal{D}\Psi \left[-\frac{1}{2} \int_{r=R} d^3x \bar{\Psi} \left(-i(\vec{\tau} \cdot \vec{n}) \gamma^5 \right) e^{-i\theta(\vec{\tau} \cdot \vec{n})\gamma^5} \Psi \right] \\ &\quad \times e^{-\int_{\Omega} d^4x \bar{\Psi} \not{\theta} \Psi} \delta \left[\left(e^{-i\theta(\vec{\tau} \cdot \vec{n})\gamma^5} + i \not{\eta} \right) \Psi \right] \end{aligned} \quad (4.44)$$

Cálculos directos conducen a

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial\theta}(-\beta F) &= - \int_{r=R} d^3x n_{\mu} n_a \left\langle \bar{\Psi} \frac{\tau_a}{2} \gamma^5 \gamma^{\mu} \Psi \right\rangle \\ &= -\beta \int_{r=R} d\Omega n_{\mu} n_a \langle j_5^{\mu,a} \rangle = -\beta \phi^f(z, \theta). \end{aligned} \quad (4.45)$$

Es evidente que, luego de las sustracciones antes discutidas, tanto la energía libre como las magnitudes de ella derivadas resultan finitas (en particular, el flujo de la ecuación anterior). Esto marca una diferencia con aproximaciones previas al problema [19], donde la introducción de reguladores ad-hoc, si bien da resultados finitos en la energía de Casimir mantiene la presencia de singularidades en el flujo de la corriente axial.

Considérese el flujo de la corriente axial a $T = 0$ proveniente del sector fermiónico, límite de la expresión anterior. En el modelo híbrido, su valor debe coincidir con el flujo de la corriente axial del skyrmión a través de una esfera coincidente con el borde del defecto, $A_{Sk}(R)$, que fue dado en la ecuación (4.28). Es fácil ver que $A_{Sk} \rightarrow 0$ cuando $R \rightarrow 0$ ($\theta \rightarrow \pi$ — Ver Figura 4.32). Esto impone la anulación del flujo del sector fermiónico a $R = 0$, condición que determina el valor de la constante K [44].

Con las sustracciones realizadas, la energía de Casimir del defecto (bolsa de quarks y gluones) se obtiene del límite de temperatura cero de la ecuación (4.43), donde cada término está dado por

$$\begin{aligned} \lim_{T \rightarrow 0} \frac{1}{R} \Delta f_d^{(1)}(\theta) &= \frac{1}{R} \Delta f_d^{(1)} \\ &= \frac{1}{4\pi R} \left[(-5.604) \text{sen}^2\theta + 0.463 \text{sen}^4\theta + 0.023 \text{sen}^6\theta \right] \\ \lim_{T \rightarrow 0} \frac{1}{R} \Delta f_d^{(2)}(z, \theta) &= 0 \\ \lim_{T \rightarrow 0} \frac{1}{R} \Delta f_d^C(z, \theta) &= -\frac{1}{2\pi R} \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^{\infty} dx \left[2\nu \log \left(1 + C_k(x) \text{sen}^2\theta + D_k(x) \text{sen}^4\theta - \Delta_6(k, x) \right) \right] \\ \lim_{T \rightarrow 0} \frac{1}{R} \Delta f_0^{\text{exp}}(z, \theta) &= \frac{1}{4\pi R} \left\{ \begin{array}{ll} \theta^2 & 0 < \theta \leq \pi/2 \\ (\pi - \theta)^2 & \pi/2 < \theta < \pi \end{array} \right\} \\ \lim_{T \rightarrow 0} \frac{1}{R} \Delta f_0^{(2)}(z, \theta) &= -\frac{1}{2\pi R} \int_0^{\infty} dx \log \left[\frac{1 + \frac{\alpha(x)}{x} \frac{-4 + [2(1-a^2(x))^2 + \frac{\alpha(x)}{x}] \cos^2\theta}{4a^2(x) + (1-a^2(x))^2 \cos^2\theta}}{\left(1 - \frac{\alpha(x)}{x} \frac{1}{1+a^2(x)}\right)^2} \right] \end{aligned}$$

Nótese que, por razones dimensionales, el producto de R por la energía de Casimir del defecto sólo es función de θ . En lo que sigue se considerará entonces la energía adimensionalizada de esa manera. Por otra parte, las propiedades mostradas en la Sección 2.3 implican que esta energía es simétrica respecto de $\theta = \pi/2$. En la Figura 4.5 se ve este comportamiento (para $z = 0$), así como la presencia de una discontinuidad de la derivada primera en $\theta = \pi/2$.

Finalmente, si el radio de la bolsa es suficientemente grande como para que $\theta < \pi/2$, para obtener la energía total del defecto debe sumarse a la anterior, la energía correspondiente a los quarks de valencia. Los cálculos numéricos realizados muestran que esta energía total resulta continua y con derivada primera continua en $\theta = \pi/2$.

Teniendo en cuenta que la derivada de la energía del quark de valencia es

$$\left. \frac{d}{d\theta} e_{qv}(\theta) \right|_{\theta \rightarrow \frac{\pi}{2}|_-} = -\frac{3}{2}, \quad (4.46)$$

como puede verificarse de la ecuación para este autovalor del hamiltoniano [61], se propone el siguiente ajuste para la energía de Casimir del defecto calculada numéricamente:

$$\begin{aligned} & \frac{3}{4\pi} \left(\left\{ \begin{array}{ll} \theta^2 & 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \\ (\pi - \theta)^2 & \frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi \end{array} \right\} - \text{sen}^2\theta \right) \\ & + C_2 \text{sen}^2\theta + C_4 \text{sen}^4\theta + C_6 \text{sen}^6\theta + C_8 \text{sen}^8\theta \end{aligned} \quad (4.47)$$

Los resultados de este ajuste se escriben como

$$\begin{aligned} C_2 &= -0,13381 \\ C_4 &= 0,05085 \\ C_6 &= -0,01257 \\ C_8 &= 0,01241 \end{aligned} \quad (4.48)$$

Finalmente, derivando (4.47) respecto de θ se obtiene el valor numérico de la constante K

$$\phi^f(\theta) \rightarrow_{R \rightarrow 0} -2(C_2 + K) \frac{\pi}{\lambda} + O(R^2)$$

expresión en la que se ha recurrido al comportamiento del perfil de Atiyah y Manton a bajos R , $\theta(R) \sim \pi - \frac{\pi}{\lambda}R$. Esto fija $K = 0,13381$.

De ese modo, la energía libre completa del sector fermiónico del modelo de dos fases es

$$\begin{aligned} E_f(\theta) &= \frac{3}{R} \left[\frac{3}{4\pi} \left(\left\{ \begin{array}{ll} \theta^2, & 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \\ (\pi - \theta)^2, & \frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi \end{array} \right\} - \text{sen}^2\theta \right) + \right. \\ & \left. C_4 \text{sen}^4\theta + C_6 \text{sen}^6\theta + C_8 \text{sen}^8\theta + \left\{ \begin{array}{ll} e_{qv}(\theta), & 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \\ 0, & \frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi \end{array} \right\} \right] \end{aligned} \quad (4.49)$$

que corresponde a la línea continua de la Figura 4.6. La gráfica señalada es coincidente con la que se muestra en [44].

Luego de la determinación completa del aporte del defecto al modelo de bolsa quiral híbrida resta calcular (numéricamente) la contribución del skyrmión truncado del exterior. Para ésto debe resolverse la integral señalada en (4.27) considerando ahora como límite inferior el radio R del defecto. Para ello, es necesario adoptar valores para los parámetros del lagrangiano de Skyrme, F_π y e .

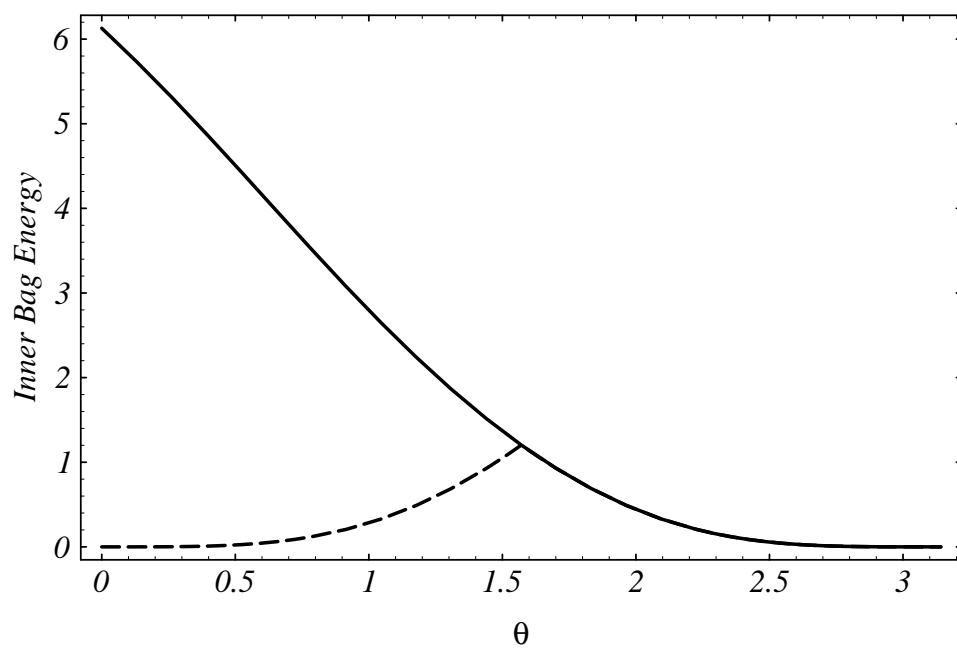


Fig. 4.6: Energía (adimensionalizada) de la bolsa en el modelo híbrido como función de θ

Fig. 4.7: $\epsilon^2(\theta)$

La anulaci3n del flujo axial de los fermiones a $R = 0$ (que se utiliz3 en la determinaci3n de la constante K), no es suficiente para asegurar la continuidad de ese flujo a todo radio. Por ello, siguiendo [7], se determinar3 el par3metro e como funci3n de R de modo que se satisfaga esa condici3n. Luego se calcular3 F_π de manera que la energ3a del skyrm3n puro (a $R = 0$), conduzca a la masa del nucle3n [5].

Haciendo uso del perfil de Atiyah y Manton para parametrizar los flujos en funci3n del 3ngulo quiral, se obtiene

$$\epsilon^2(\theta) \equiv \frac{1}{8e^2} = -\frac{N_C \pi}{32 \hat{\lambda}^2 (\pi - \theta)^3} \frac{\frac{dE_f}{d\theta}}{\left[1 + \frac{2}{\hat{\lambda}^2} \frac{\theta(2\pi - \theta)}{(\pi - \theta)^2} \text{sen}^2 \theta\right]}, \quad (4.50)$$

donde ϵ fue introducido siguiendo la notaci3n de la referencia [7].

La Figura 4.7 muestra la intensidad del t3rmino de estabilizaci3n del modelo de Skyrme, medida por el valor del par3metro ϵ^2 , en funci3n del 3ngulo quiral $\theta(R)$. De la extrapolaci3n a $\theta \rightarrow \pi$ se obtiene

$$e(R = 0) = 4.21581 \quad \epsilon^2(R = 0) = 0.00703 \quad (4.51)$$

El valor de $e(R = 0)$ debe compararse con el calculado en [5], donde se ha considerado la soluci3n cl3sica de Skyrme y sus excitaciones rotacionales, lo que se pone en correspondencia con los bariones. En este modelo puramente

skyrmiónico, las constantes e y F_π se ajustan de modo de reproducir las masa del nucleón y la Δ a partir de las expresiones

$$M_N = \frac{F_\pi}{4e} \hat{M} + \frac{3}{8} \frac{1}{\frac{2}{3}\pi \left(\frac{1}{e^3 F_\pi}\right) \hat{\Lambda}} \quad M_\Delta = \frac{F_\pi}{4e} \hat{M} + \frac{15}{8} \frac{1}{\frac{2}{3}\pi \left(\frac{1}{e^3 F_\pi}\right) \hat{\Lambda}}, \quad (4.52)$$

donde \hat{M} es la energía (adimensional) del skyrmión (4.30) y

$$\hat{\Lambda} = \int_0^\infty d\hat{r} \hat{r}^2 \text{sen}^2\theta \left[1 + 4 \left(\theta'^2 + \frac{\text{sen}^2\theta}{\hat{r}^2} \right) \right].$$

A partir de cálculos numéricos para \hat{M} y $\hat{\Lambda}$ (donde se hace uso de la solución numérica de la ecuación (4.26)) Adkins, Nappi y Witten determinan $e = 5,45$ y $F_\pi = 129\text{MeV}$.

La aproximación aquí presentada es diferente. En efecto, el valor de e corresponde a la extrapolación a $R = 0$ de la función $e(R)$ antes determinada. Empleando el perfil de Atiyah y Manton $\hat{M} = 147,239$ y $\hat{\Lambda} = 19,8141$, las cuales se utilizan para la determinación de F_π ajustando la masa del nucleón, $M_N = 938\text{MeV}$. Se obtiene

$$F_\pi = 99,591\text{MeV} \quad \text{con} \quad e = 4.2158. \quad (4.53)$$

Si bien éste está alejado del valor experimental, no difiere demasiado del presentado en [5].

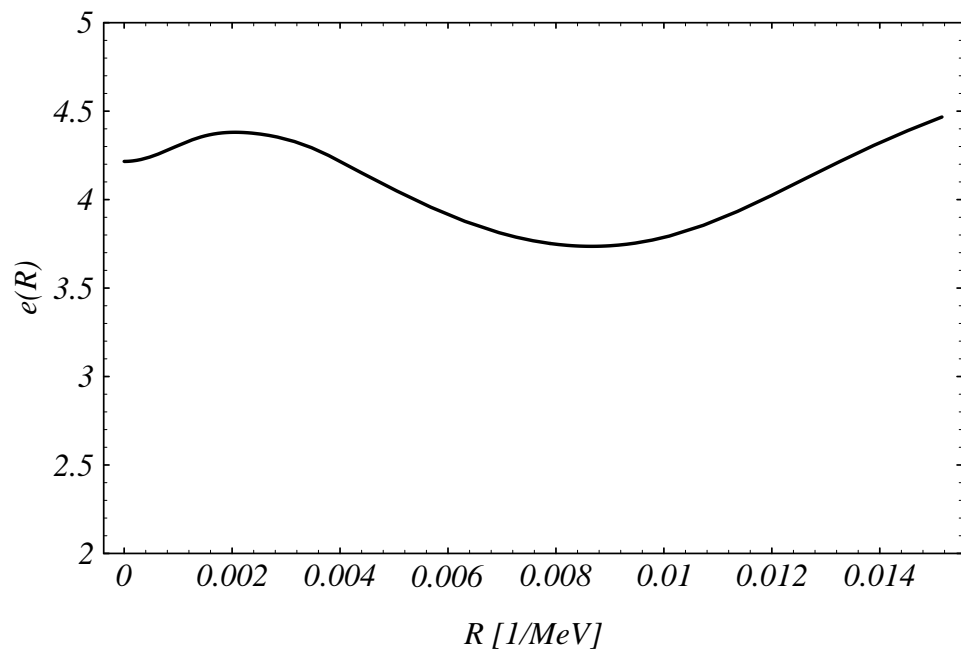
Con estos parámetros puede hacerse la predicción de la masa de la Δ , resultando $M_\Delta = 1206,73\text{MeV}$, muy próximo del valor experimental $M_\Delta^{(\text{exp})} = 1230\text{MeV}$.

Con ese valor de F_π , la función $e(R)$ (donde $[R] = 1/\text{MeV}$) se muestra en la Figura 4.8.

Una vez determinados los parámetros del lagrangiano de Skyrme F_π y $e(R)$, puede obtenerse $\hat{\lambda}(\hat{T})$ (que minimiza la masa del skyrmión térmico) como función de la temperatura dimensional $T = \frac{eF_\pi}{2} \hat{T}$ (ver Figura 4.3).

Con ella, a partir del perfil de Eskola y Kajantie (4.37), se obtiene la energía contenida en el skyrmión truncado ((4.27) con el límite inferior de la integral tomado en R). Su límite de temperatura nula corresponde a la contribución del sector externo a la energía del vacío del modelo, que debe ser sumada al aporte del interior de la bolsa (que se muestra en la Figura 4.6 como función de θ).

En la Figura 4.9 se muestra en línea de trazos la energía (a $T = 0$) de la bolsa de quarks en función del radio de la cavidad. Por otra parte, en línea de trazos y puntos se ha graficado el aporte del skyrmión externo. La línea sólida indica la energía total, que muestra una marcada independencia del radio de la cavidad. Este resultado es una evidencia a favor del cumplimiento

Fig. 4.8: $e(R)$

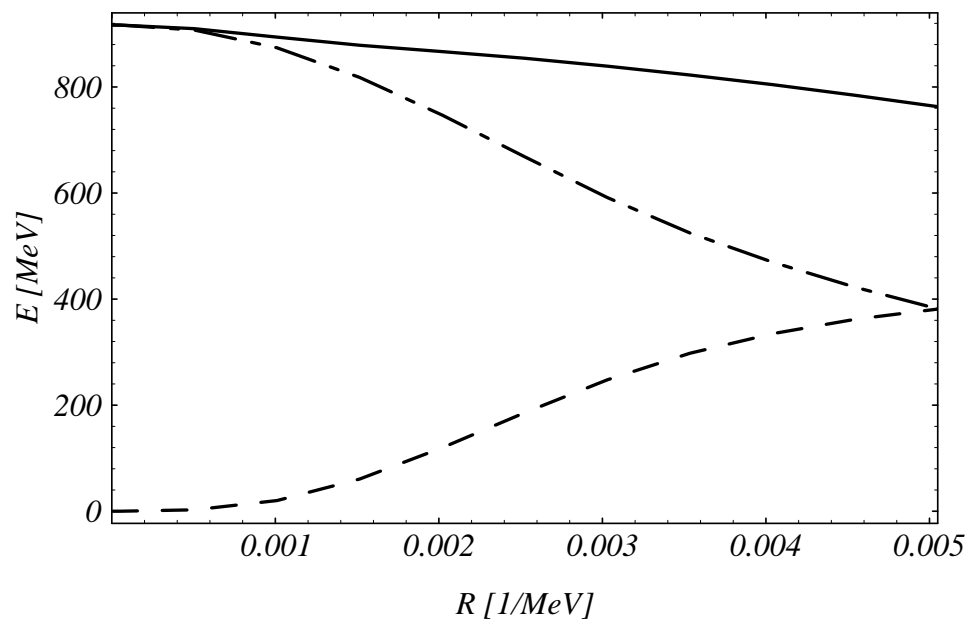


Fig. 4.9: Energía del modelo de dos fases

“aproximado” en este modelo en $(3 + 1)$ -dimensiones de la “hipótesis del gato de Cheshire”.

Según este criterio (ver [57] y las referencias allí citadas) las propiedades de bajas energías del modelo deberían ser independientes de la ubicación del límite entre ambas fases, pues son consideradas descripciones (aproximadamente) equivalentes de la misma física. Esta imagen está fundada en la exacta equivalencia entre teorías fermiónicas y bosónicas en $1 + 1$ dimensiones [62, 63], que hace posible construir modelos que presentan este comportamiento [57, 28]. Por otra parte, como se ha visto al principio de esta sección, el número bariónico de este modelo de dos fases también presenta esa propiedad.

Los resultados aquí obtenidos muestran que la energía del barión es esencialmente independiente del radio de la bolsa en la región $0 \leq R \leq 1\text{fm}$, si bien para valores mayores su variación con R se vuelve apreciable.

4.3.3 Temperatura de deconfinamiento

Para culminar este capítulo se reseñarán algunas aproximaciones al problema del cálculo de la temperatura de deconfinamiento para la bolsa quiral híbrida, mediante el tipo de técnicas desarrolladas en la presente tesis.

Recientemente H. Falomir, M. Loewe y J. C. Rojas [64] estudiaron el problema del deconfinamiento en una versión aproximada de la bolsa híbrida. En efecto, los citados autores supusieron la existencia de un gas libre de quarks y gluones en el interior de una cavidad esférica estática y modelaron el exterior mediante un gas de piones libres junto a la presencia de un skyrmión térmico.

Basándose en el “esquema del gato de Cheshire”, supusieron la independencia con el radio de la energía del modelo a temperatura cero. Esto implica que la presión interna (provista por quarks y gluones) se supone igual a la externa (debida a los piones y al solitón de Skyrme), cualquiera sea el radio de la bolsa considerada.

En esas condiciones, en [64] se estudia la existencia de radios de equilibrio de presiones a distintas temperaturas. Como tal equilibrio existe a $T = 0$ para todo R (según la hipótesis del gato de Cheshire), la existencia de radios de equilibrio definidos a $T > 0$ es consecuencia exclusiva de los efectos de la temperatura sobre el modelo.

Con las suposiciones adicionales de que la temperatura no afecta demasiado el valor de λ (parámetro del perfil de Eskola y Kajantie) y que la intensidad del término de estabilización del skyrmión, e , es independiente de R , se muestra en [64] que existen radios de equilibrio de presiones hasta una temperatura $T_C = 109,1\text{MeV}$. Esto puede interpretarse como una transición de deconfinamiento. El comportamiento señalado también puede verse en la Figura 4.10, donde el aumento de la temperatura conduce a la desaparición de un mínimo local en la energía libre.

Fig. 4.10: Energía del modelo híbrido en la aproximación de gases libres (sustraida la energía correspondiente a $T = 0$)

Debe señalarse que esa temperatura crítica depende sensiblemente de las hipótesis, realizadas en [64]. En efecto, según se ha visto en la Figura 4.3 el valor de λ crece a temperaturas grandes, pudiendo afectar la validez de la construcción de Eskola y Kajantie para el skyrmión térmico (que requiere $\hat{T} < 1/\hat{\lambda}$ [59]).

Si se introduce en el modelo la dependencia de $\hat{\lambda}$ con la temperatura, y se incorpora el valor antes calculado de $e(R)$ se observa que, si bien cualitativamente el comportamiento se asemeja al señalado en la Figura 4.10, el valor de la temperatura de deconfinamiento cae a valores inferiores a los 40MeV.

M. Loewe y S. Perez-Oyarzún introdujeron en el mismo modelo las correcciones por tamaño finito que surgen de imponer las condiciones de contorno de la bolsa de M. I. T. [65]. A partir del cálculo numérico de los autovalores correspondientes al campo fermiónico y al campo de gauge abeliano, se obtiene en [65] una temperatura de deconfinamiento de $T_C = 228\text{MeV}$. Este cálculo se realizó para valores constantes de $\hat{\lambda}$ y e , pero la temperatura crítica se encuentra en la región de rápido crecimiento de $\hat{\lambda}$ señalada en la Figura 4.3. Si se considera el valor de $\hat{\lambda}$ correspondiente a T_C la aproximación de gas diluido de instantones deja de ser válida.

A partir de los resultados del Capítulo 3 para la bolsa de M. I. T. y del presente para la energía del skyrmión, puede graficarse la (diferencia

respecto de $T = 0$ de la) energía libre del modelo bolsa M. I. T. - skyrmión. Para $\hat{\lambda}$ y e constantes la conclusión parece ser la misma: las correcciones por tamaño finito hacen crecer la temperatura de deconfinamiento a $180\text{MeV} < T_C < 200\text{MeV}$.

La introducción de $\hat{\lambda}$ y e variables disminuye la temperatura de deconfinamiento a valores entre 60 y 80MeV que, por una parte, son mayores que en el caso de la aproximación de gases libres, mientras que se mantienen muy por debajo de la temperatura para la cual la aproximación de gas de instantones deja de ser válida.

Los resultados de la presente tesis permitirían el estudio del modelo completo de bolsa quiral híbrida. En efecto, en el Capítulo 3 se calculó la energía libre de Helmholtz de los componentes de la bolsa de M. I. T. , mientras que los resultados del Capítulo 2 corrigen a los fermiones de modo de tener en cuenta las condiciones de contorno que los acoplan al skyrmión externo. Por último, en el presente Capítulo se ha estudiado el campo del exterior de la bolsa, determinando las constantes que ingresan en su lagrangiano.

Según los cálculos a $T = 0$, la presencia de los quarks de valencia resulta muy relevante para radios mayores que cierto $R_0 \approx 0,5\text{ fm}$, para el cual $\theta = \pi/2$. En consecuencia, en los cálculos a temperatura finita se hace necesario fijar el número bariónico a 1 en valor medio, lo que corresponde a la introducción de un potencial químico.

Este problema será considerado en el Capítulo 5 en el marco de un modelo de prueba fermiónico bidimensional.

4.4 Resumen del Capítulo 4

En el presente Capítulo se analizó la aplicación de los métodos funcionales desarrollados en los anteriores a situaciones de interés para la Teoría Cuántica de Campos.

En primera instancia, en el marco de la bolsa se estudió el denominado modelo de la gota de quarks y gluones. En éste, una bolsa esférica estática confina campos de quarks y gluones sometidos a las condiciones de contorno de M. I. T. El confinamiento se produce gracias a la existencia de una presión externa B , complementada por la acción de campos escalares externos que simulan a los piones.

El valor de la presión externa se ha ajustado de modo que se produzca el equilibrio de presiones a una temperatura $T_C = 150\text{MeV}$. Se ha observado que a temperaturas menores que T_C el modelo presenta un radio de equilibrio estable, cuya posición es dependiente de una constante indeterminada dejada por el proceso de renormalización. A temperaturas mayores el radio de equilibrio es metaestable dando lugar a un mecanismo de deconfinamiento.

Por otra parte se ha estudiado el modelo de bolsa quiral híbrida. En el

mismo, el campo de quarks está acoplado a un campo externo de Skyrme mediante las condiciones de contorno que satisface en el borde de la cavidad.

La anulación del flujo de la corriente axial del sector fermiónico a $R = 0$ se ha utilizado para la determinación de la constante K . Por otra parte, la exigencia de la continuidad de este flujo entre las fases interna y externa cualquiera sea el radio, determina la intensidad del término de estabilización del solitón. Del límite para radio cero se obtuvo el valor de e para el skyrmión puro, y mediante el ajuste de la masa del nucleón, se fijó el restante parámetro del lagrangiano de Skyrme, F_π . Los valores obtenidos se usaron para predecir la masa de la partícula Δ , obteniendo un resultado muy próximo de los valores experimentales.

Se estudió la energía completa, a $T = 0$ del modelo híbrido, que es suma de los aportes de la fase interna y la externa. Para la primera se consideró la energía de Casimir a la que debe sumarse, en la región de radios grandes, el aporte de los quarks de valencia (que emergen del mar de Dirac cuando el ángulo quiral se hace menor que $\pi/2$). Cuando se agrega la contribución del skyrmión externo, la energía total muestra una marcada independencia del radio de la cavidad, dando sustento a la “hipótesis del gato de Cheshire”, si bien a radios mayores se aparta de este comportamiento.

Por último, se han reseñado mecanismos conducentes a una transición de deconfinamiento en este modelo. Existen cálculos previos en los que se consideran gases libres de quarks y gluones y también campos en una bolsa de M. I. T. Los resultados de la presente tesis permiten, en principio, extender este tipo de análisis a la bolsa quiral híbrida. Sin embargo, ello requeriría la introducción de un potencial químico no nulo, problema que se encarará en el siguiente Capítulo.

Capítulo 5

Fermiones a densidad finita (1+1 dim.)

Como fuera señalado en el Capítulo 4, la termodinámica de la materia hadrónica es un tópico de gran interés [66], principalmente en conexión con la posible aparición de transiciones de fase deconfinantes. La dificultad para obtener analíticamente el confinamiento a partir de la Q. C. D. ha conducido al estudio de modelos efectivos para las interacciones fuertes que, a su vez, han motivado las situaciones a las que se han aplicado los métodos de cálculo reseñados en los primeros capítulos de esta tesis.

Así, en el Capítulo 3 se ha estudiado la energía libre de los componentes de una bolsa de M. I. T.: fermiones y gluones libres bajo las condiciones de contorno correspondientes a ese modelo. Por otra parte, en el Capítulo 2 se consideró la corrección al sector fermiónico cuando las condiciones de contorno cambian a las de la denominada bolsa quiral híbrida.

Los resultados reseñados completan el estudio del modelo híbrido a temperatura no nula. Sin embargo, en todos estos casos se ha considerado a los sistemas con número medio de partículas no definido. Según se ha visto en el Capítulo 4, para la correcta descripción de los bariones es necesario considerar al sistema fermiónico a densidad de partículas no nula¹. La descripción de tales sistemas se hace mediante la introducción de un potencial químico no nulo.

Como se verá, es posible plantear esta situación como un problema de condiciones de contorno, en el que técnicas como las antes empleadas permiten obtener resultados de interés [67]. Cabe señalar que la introducción de un potencial químico no nulo en este contexto ha sido realizada en [47], aunque en el límite termodinámico. El objetivo de este capítulo será estudiar este problema en un modelo simplificado, manteniendo los efectos de tamaño finito del sistema.

En efecto, se introducirá el potencial químico imponiendo ciertas condi-

¹Recordar la importancia de los quarks de valencia en la bolsa quiral híbrida a $T = 0$

ciones de contorno en la dirección del tiempo euclídeo. De ese modo será posible su tratamiento de acuerdo a los procedimientos descritos en los Capítulos 2 y 3. Se estudiará entonces la diferencia entre las energías libres de Gibbs y de Helmholtz en un sistema bidimensional fermiónico, confinado en un segmento. Si bien éste no es más que un sistema de prueba, se verá que la extensión de las técnicas empleadas a casos más realistas, en $3 + 1$ -dimensiones es, en principio, posible.

Se seguirán dos caminos diferentes, inspirados en lo desarrollado en los Capítulos 2 y 3 respectivamente. En primer término, se utilizará la relación entre la gran función de partición y las funciones de Green para la evaluación de las diferencias de energías libres. Por completitud se calculará también la energía libre de Helmholtz del presente modelo. Alternativamente, el método del operador de Forman será aplicado a la determinación de la diferencia de energías libres.

5.1 Energía libre de Gibbs y Funciones de Green

Se considera un sistema bidimensional de fermiones libres sin masa, confinado en el segmento $[0, 1]$ y sujeto a condiciones de contorno dadas. La presencia de un potencial químico no nulo² puede simularse mediante el acoplamiento con un campo de gauge constante cuya única componente no nula es la temporal [68, 69, 70]. En efecto, si el sistema se encuentra en equilibrio a temperatura $T = 1/\beta$ y potencial químico μ , la gran función de partición del sistema se expresa como

$$\begin{aligned} \Xi(T, L, \mu) &= e^{-\beta G(T, L, \mu)} \\ &= \int \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi e^{\int_0^1 dt \int_0^1 dx \bar{\psi} (D(\beta, L) - i\mu\gamma^0)\psi} \\ &\sim \text{Det} (D(\beta, L) - i\mu\gamma^0)_{cc} \end{aligned} \quad (5.1)$$

donde

$$D(\beta, L) = \frac{i}{\beta}\gamma^0\partial_t + \frac{i}{L}\gamma^1\partial_x, \text{ si } 0 \leq t, x \leq 1, \quad (5.2)$$

y “cc” significa que este operador está definido en un subespacio (denso) de funciones que satisfacen condiciones de contorno que serán especificadas más adelante.

Puede verse que la derivada de la expresión anterior respecto del potencial químico conduce al número medio de partículas. Estudiando la ecuación de autoestados del hamiltoniano de Dirac se observa fácilmente que μ se acopla a las partículas con signo opuesto al correspondiente a las antipartículas, lo que resulta en una carga media no nula.

²Necesaria para que el número bariónico no resulte nulo en valor medio

Se utilizará para las matrices de Dirac la convención

$$\begin{aligned}\gamma^0 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \gamma^1 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \\ \gamma^5 &= -i\gamma^0\gamma^1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\end{aligned}\tag{5.3}$$

Ahora bien, por tratarse de un sistema fermiónico se requiere la antiperiodicidad en la dirección del tiempo euclídeo. De ese modo, el operador diferencial está definido sobre $\psi(x, t)$ tales que

$$\begin{aligned}B\psi(t, x) &= 0, \text{ si } x = 0, 1, \\ \psi(1, x) &= -\psi(0, x).\end{aligned}\tag{5.4}$$

donde B representa la proyección que define las condiciones de contorno que se satisfacen en el borde espacial.

Tal como se ha observado en el Capítulo 3, es posible vincular derivadas respecto de ciertos parámetros de determinantes funcionales con trazas que contienen las funciones de Green. En este caso, puede escribirse

$$\begin{aligned}-\beta\frac{\partial G}{\partial\mu}(\beta, L, \mu) &= Tr\left\{\frac{\partial}{\partial\mu} \ln (D(\beta, L) - i\mu\gamma^0)_{bc}\right\} \\ &= Tr\{-i\gamma^0 K_{bc}(t, x; t', x')\},\end{aligned}\tag{5.5}$$

donde se ha considerado la función de Green que es solución del problema,

$$\begin{aligned}(D(\beta, L) - i\mu\gamma^0) K_{bc}(t, x; t', x') &= \delta(x - x')\delta(t - t') \\ BK_{bc}(t, x; t', x') &= 0, \text{ para } x = 0, 1, \\ K_{bc}(1, x; t', x') &= -K_{bc}(0, x; t', x').\end{aligned}\tag{5.6}$$

Resulta inmediato demostrar que el problema anterior puede expresarse en términos de

$$\begin{aligned}D(\beta, L) - i\mu\gamma^0 &= e^{\mu\beta t} D(\beta, L) e^{-\mu\beta t}, \\ K_{bc}(t, x; t', x') &= e^{\mu\beta t} k(t, x; t', x') e^{-\mu\beta t'},\end{aligned}\tag{5.7}$$

donde ahora la función de Green modificada, $k(t, x; t', x')$, es la solución de

$$\begin{aligned}D(\beta, L) k(t, x; t', x') &= \delta(x - x')\delta(t - t') \\ Be^{\mu\beta t} k(t, x; t', x') &= 0, \text{ para } x = 0, 1, \\ k(1, x; t', x') + e^{-\mu\beta} k(0, x; t', x') &= 0.\end{aligned}\tag{5.8}$$

La expresión (5.8) muestra que la introducción del potencial químico corresponde a la modificación de las condiciones de contorno en la dirección del tiempo euclídeo.

Función de Green

Para el cálculo de la función de Green puede proponerse un desarrollo de la forma

$$k(t, x; t', x') = L \sum_{n=-\infty}^{\infty} k_n(x, x') e^{-i\Omega_n \beta(t-t')}. \quad (5.9)$$

Imponiendo la condición de contorno “temporal” de (5.8) se obtiene para las frecuencias

$$\begin{aligned} \Omega_n &= \omega_n - i\mu, \\ \omega_n &= \frac{(2n+1)\pi}{\beta}, \text{ para } n \in \mathbf{Z}. \end{aligned} \quad (5.10)$$

Introduciendo (5.9) en la ecuación diferencial, puede verse que los coeficientes satisfacen

$$= e^{\gamma_5 \Omega_n L x} k_n(0, x') - i\gamma^1 e^{-\gamma_5 \Omega_n L(x-x')} H(x-x'), \quad (5.11)$$

donde se ha introducido la función escalón de Heaviside, $H(x-x')$.

Para completar la determinación de los $k_n(x, x')$ se deben imponer las condiciones de contorno espaciales. En este modelo de prueba se considerarán condiciones tipo bolsa

$$(B\psi)(t, x) = (1 + \not{x})\psi(t, x) = 0, \text{ para } x = 0, 1. \quad (5.12)$$

Una vez determinados los coeficientes, se obtiene la siguiente expresión para la función de Green

$$\begin{aligned} k(t, x; t', x') &= iL \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\frac{e^{\gamma_5 \Omega_n L x}}{2 \cosh(\Omega_n L)} (1 + \gamma^1) e^{-\gamma_5 \Omega_n L(1-x')} \right. \\ &\quad \left. - \gamma^1 e^{-\gamma_5 \Omega_n L(x-x')} H(x-x') \right] e^{-i\Omega_n \beta(t-t')}. \end{aligned} \quad (5.13)$$

Cálculo de la diferencia de energía

Reemplazando (5.13) en (5.7), y ésta en (5.5), se obtiene la derivada de la energía libre de Gibbs

$$-\beta \frac{\partial G}{\partial \mu}(\beta, L, \mu) = \text{Tr} \{ -i\gamma^0 e^{\mu\beta t} k(t, x; t', x') e^{-\mu\beta t'} \}$$

$$\begin{aligned}
&= L \int_0^1 dx \int_0^1 dt \operatorname{Tr} \left\{ \gamma^0 e^{\mu\beta(t-t')} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\frac{e^{-\gamma_5 \Omega_n L(1-x-x')}}{2 \cosh(\Omega_n L)} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \gamma^1 \left(\frac{e^{-\gamma_5 \Omega_n L(1+x-x')}}{2 \cosh(\Omega_n L)} \right. \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \left. - e^{-\gamma_5 \Omega_n L(x-x')} H(x-x') \right) \right] e^{-i\Omega_n \beta(t-t')} \right\} \Big|_{(t',x')=(x,t)}. \quad (5.14)
\end{aligned}$$

En (5.14) la traza es expresada en la forma de integrales en las variables espacial y temporal, de un integrando que involucra la traza matricial de la función de Green en la diagonal.

El primer término de este integrando corresponde a una serie absoluta y uniformemente convergente, aún para $(t', x') = (t, x)$. Ello autoriza la realización de las sumas en cualquier orden. La propiedad de ciclicidad de la traza matricial muestra que su contribución es nula.

No es el caso del segundo término de (5.14), proporcional a $\gamma^0 \gamma^1$. En efecto, separando las contribuciones de los $n \geq 0$ y de los $n < 0$, puede escribirse

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{e^{-\gamma_5 \Omega_n L(1+x-x')}}{2 \cosh(\Omega_n L)} - e^{-\gamma_5 \Omega_n L(x-x')} H(x-x') \right) e^{-i\Omega_n \beta(t-t')} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{e^{-\gamma_5 \Omega_n L(1+x-x')}}{2 \cosh(\Omega_n L)} - e^{-\gamma_5 \Omega_n L(x-x')} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right] e^{-i\Omega_n \beta(t-t')} \\
&+ \sum_{n=-\infty}^{-1} \left[\frac{e^{-\gamma_5 \Omega_n L(1+x-x')}}{2 \cosh(\Omega_n L)} - e^{-\gamma_5 \Omega_n L(x-x')} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right] e^{-i\Omega_n \beta(t-t')} \quad (5.15) \\
&+ \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\gamma_5 \Omega_n L(x-x')} \begin{pmatrix} -H(x-x') & 0 \\ 0 & H(x'-x) \end{pmatrix} e^{-i\Omega_n \beta(t-t')} \\
&+ \sum_{n=-\infty}^{-1} e^{-\gamma_5 \Omega_n L(x-x')} \begin{pmatrix} H(x'-x) & 0 \\ 0 & -H(x-x') \end{pmatrix} e^{-i\Omega_n \beta(t-t')},
\end{aligned}$$

donde los dos primeros términos del miembro de la derecha son absolutamente convergentes aún para $x = x'$. Nótese que, en ellos, el elemento no nulo de la matriz del segundo término cancela, en cada caso, el comportamiento divergente del primer término, para dar una contribución a $\frac{\partial G}{\partial \mu}$

de

$$\begin{aligned}
& L \int_0^1 dx \int_0^1 dt \operatorname{tr} \{ \gamma^0 \gamma^1 \\
& \times \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\frac{e^{-\gamma_5 \Omega_n L}}{2 \cosh(\Omega_n L)} - \begin{pmatrix} H(-n-1/2) & 0 \\ 0 & H(n+1/2) \end{pmatrix} \right] \} \\
& = -iL \sum_{n=-\infty}^{\infty} \{ \tanh(\Omega_n L) - \operatorname{sign}(n+1/2) \}.
\end{aligned} \quad (5.16)$$

En la expresión (5.16) se han reunido las contribuciones de $n \geq 0$ y $n < 0$, introduciendo funciones escalón para obtener los signos adecuados.

En el tercer y cuarto término de (5.15) habrá que mantener $x \neq x'$, analizar las sumatorias y luego estudiar el límite $x \rightarrow x'$ necesario para tomar la traza. Estas series pueden ser sumadas explícitamente

$$\begin{aligned}
S_+ &= \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\gamma_5 \Omega_n L(x-x')} \begin{pmatrix} -H(x-x') & 0 \\ 0 & H(x'-x) \end{pmatrix} e^{-i\Omega_n \beta(t-t')} \\
&= \begin{pmatrix} -H(x-x') \frac{e^{(i\mu-\pi/\beta)[L(x-x')+i\beta(t-t')]} }{1-e^{-\frac{2\pi}{\beta}[L(x-x')L+i\beta(t-t')]} } & 0 \\ 0 & H(x'-x) \frac{e^{(i\mu-\pi/\beta)[L(x'-x)L+i\beta(t-t')]} }{1-e^{-\frac{2\pi}{\beta}[L(x'-x)L+i\beta(t-t')]} } \end{pmatrix}, \quad (5.17)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S_- &= \sum_{n=-\infty}^{-1} e^{-\gamma_5 \Omega_n L(x-x')} \begin{pmatrix} H(x'-x) & 0 \\ 0 & -H(x-x') \end{pmatrix} e^{-i\Omega_n \beta(t-t')} \\
&= \begin{pmatrix} H(x'-x) \frac{e^{-(i\mu+\pi/\beta)[L(x'-x)-i\beta(t-t')]} }{1-e^{-\frac{2\pi}{\beta}[L(x'-x)-i\beta(t-t')]} } & 0 \\ 0 & -H(x-x') \frac{e^{-(i\mu+\pi/\beta)[L(x-x')-i\beta(t-t')]} }{1-e^{-\frac{2\pi}{\beta}[L(x-x')-i\beta(t-t')]} } \end{pmatrix}, \quad (5.18)
\end{aligned}$$

que resultan singulares para $(t', x') = (t, x)$. Introduciendo de la variable $z = L(x-x') + i\beta(t-t')$ y su compleja conjugada, $\bar{z} = L(x-x') - i\beta(t-t')$, la suma de ambos términos puede ser desarrollada en serie de Laurent, obteniéndose

$$\begin{aligned}
& S_+ + S_- \\
&= -\frac{\beta}{2\pi} \begin{pmatrix} \frac{1}{z} + i\mu + \pi/\beta (H(x'-x) - H(x-x')) + O(z/\beta^2) & 0 \\ 0 & \frac{1}{\bar{z}} - i\mu + \pi/\beta (H(x'-x) - H(x-x')) + O(\bar{z}/\beta^2) \end{pmatrix}. \quad (5.19)
\end{aligned}$$

Reemplazada dentro de la traza matricial señalada en (5.14), da lugar a

$$L \operatorname{tr} \{ \gamma^0 e^{\mu\beta(t-t')} \gamma^1 (S_+ + S_-) \}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{iL\beta}{2\pi} e^{\mu\beta(t-t')} \left\{ \frac{1}{z} - \frac{1}{\bar{z}} + 2i\mu + O(|z|/\beta^2) \right\} \\
&\rightarrow_{t' \rightarrow t} \frac{L\beta\mu}{\pi} + O(|x-x'|L^2/\beta), \tag{5.20}
\end{aligned}$$

que tiene un límite finito para $x' \rightarrow x$.

Este término contribuye a la derivada de la energía libre $\frac{\partial G}{\partial \mu}(T, L, \mu)$ con

$$L \int_0^1 dx \int_0^1 dt \operatorname{tr} \left\{ \gamma^0 e^{\mu\beta(t-t')} \gamma^1 (S_+ + S_-) \right\}_{(t',x')=(t,x)} = \frac{\mu}{\pi} L\beta. \tag{5.21}$$

Reuniendo los aportes (5.16) y (5.21), la derivada de la energía libre respecto del potencial químico resulta

$$\begin{aligned}
&-\beta \frac{\partial G}{\partial \mu}(\beta, L, \mu) = \\
&\frac{\mu}{\pi} L\beta - iL \sum_{n=-\infty}^{\infty} \{ \tanh[(\omega_n - i\mu)L] - \operatorname{sign}(n + 1/2) \}. \tag{5.22}
\end{aligned}$$

El primer término de (5.22), proveniente de la parte de la función de Green de comportamiento singular, es lineal en μ . El restante, que contiene los efectos de tamaño finito, resulta una función π -periódica de μL que se anula cuando $L \rightarrow \infty$. La función que describe el número de partículas se comporta, en el límite de $\beta \rightarrow \infty$, como

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} \bar{N} = \left[\frac{\mu L}{\pi} \right], \tag{5.23}$$

donde $[x]$ representa la parte entera de x .

A temperatura no nula, introduciendo las variables adimensionales

$$X = 2\mu L; \quad Y = \frac{2L\pi}{\beta}, \tag{5.24}$$

el número medio puede escribirse como

$$\bar{N}(X, Y) = \frac{X}{2\pi} - \frac{Y}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} X}{\cos X + \cosh(2n+1)Y}. \tag{5.25}$$

Cortando esta serie en el valor $n = K$, determinado de modo que se cometa un error menor que \mathcal{E} en su suma,

$$K > \frac{1}{2Y} \ln \left\{ \frac{1}{2\mathcal{E} \sinh Y} \right\},$$

cálculos numéricos sencillos muestran en la Figura 5.1 su comportamiento en función del potencial químico para diferentes temperaturas.

Fig. 5.1: Fermiones en 1 + 1: Número medio

Integrando la ecuación (5.22) se obtiene la diferencia entre la energía libre de Gibbs y la energía libre de Helmholtz

$$\begin{aligned}
 & -\beta \{ G(\beta, L, \mu) - G(\beta, L, 0) \} \\
 &= \frac{\mu^2}{2\pi} L\beta + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \ln \left\{ \frac{\cosh [(\omega_n - i\mu) L]}{\cosh [\omega_n L]} + i\mu L \operatorname{sign}(n + 1/2) \right\}. \quad (5.26)
 \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que $\omega_{-n} = -\omega_{n-1}$ la expresión (5.26) puede reescribirse como

$$\begin{aligned}
 & -\beta \{ G(\beta, L, \mu) - G(\beta, L, 0) \} \\
 &= \frac{\mu^2}{2\pi} L\beta + \ln \left\{ \prod_0^{\infty} \frac{(1 + 2 \cos(2\mu L) e^{-2\omega_n L} + e^{-4\omega_n L})}{(1 + 2e^{-2\omega_n L} + e^{-4\omega_n L})} \right\} \quad (5.27) \\
 &= \frac{\mu^2}{2\pi} L\beta + \ln \left\{ \frac{\theta_3(\mu L, e^{-2\pi L/\beta})}{\theta_3(0, e^{-2\pi L/\beta})} \right\},
 \end{aligned}$$

donde $\theta_3(u, q)$ es una de las funciones de Jacobi [20].

La expresión (5.27) contiene toda la dependencia en μ de G . Para la descripción completa del modelo, es necesario el cálculo de la energía libre

de Helmholtz, tomada aquí como referencia. En la sección siguiente, por razones de completitud, se realizará este cálculo.

Ahora bien, el método desarrollado puede, en principio, ser aplicado al modelo de la bolsa quiral en $(3 + 1)$ -dimensiones. En efecto, la energía libre de Helmholtz (de referencia) ya ha sido calculada en los capítulos previos de esta tesis, y la función de Green necesaria (si bien más complicada que la presente) puede calcularse extendiendo al caso de temperatura finita los resultados presentados en [19]. Ese cálculo, que actualmente está en realización, no será incluido en esta tesis.

5.2 Energía libre de Helmholtz ($\mu = 0$)

Para completar el resultado de la sección 5.1 se debe calcular la energía libre de Helmholtz del modelo. El cálculo que se presenta a continuación corresponde a la aplicación de lo desarrollado en el Capítulo 3 al caso de este modelo de prueba bidimensional.

Se tomará ahora la derivada respecto de la temperatura del determinante del operador $D(\beta, L)$, definido bajo las condiciones de contorno B consideradas en la sección anterior. De este modo

$$\frac{\partial}{\partial \beta} \ln \text{Det}(D(\beta, L))_{cc} = \text{Tr} \left\{ \frac{-i}{\beta^2} \gamma^0 \partial_t k(t, x; t', x') \right\}, \quad (5.28)$$

donde la función de Green es la presentada en (5.13), tomada en $\mu = 0$.

Tal como se señaló en la sección 5.1, reemplazando la función de Green en (5.28) se obtienen dos términos. El primero, proporcional a γ^0 , absoluta y uniformemente convergente aún para $(t', x') = (t, x)$, lo cual autoriza a realizar las sumatorias en cualquier orden. Tomando en primera instancia la traza matricial se observa que su contribución resulta nula.

Por otra parte, el segundo término, proporcional a $\gamma^0 \gamma^1$, puede separarse en dos sumandos de comportamiento diferenciado. El primero, absolutamente convergente, se escribe como

$$\begin{aligned} & \frac{L}{\beta} \text{Tr} \left\{ \gamma_5 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \omega_n e^{-i\omega_n \beta(t-t')} e^{-\gamma_5 \omega_n L(x-x')} \left[\frac{e^{-\gamma_5 \omega_n L}}{2 \cosh(\omega_n L)} \right. \right. \\ & \quad \left. \left. - \begin{pmatrix} H(-n - 1/2); & 0 \\ 0; & H(n + 1/2) \end{pmatrix} \right] \right\} = \\ & -\frac{L}{\beta} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \omega_n \{ \tanh(\omega_n L) - \text{sign}(n + 1/2) \} = 2 \frac{\partial}{\partial \beta} \sum_{n=0}^{\infty} \ln \{ 1 + e^{-2\omega_n L} \}. \end{aligned} \quad (5.29)$$

Así como en el caso de $\mu \neq 0$, aquí se obtiene un término singular cuando se toma la función de Green en la diagonal. A diferencia de lo encontrado en la sección anterior, este término es divergente, pues contiene las

singularidades del modelo a $T = 0$. Debe introducirse entonces una regularización de modo de separar partes finitas de partes divergentes. Se considera la prescripción usualmente denominada “point-splitting”, correspondiente a mantener $(t', x') \neq (t, x)$ hasta el final del cálculo para luego tomar el límite. Las singularidades se extraerán como polos en el parámetro regulador. De este modo

$$\begin{aligned}
& \frac{iL}{\beta^2} \text{Tr} \left\{ \gamma_5 \partial_t \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-i\omega_n \beta(t-t')} e^{-\gamma_5 \omega_n L(x-x')} \right. \\
& \times \left. \begin{pmatrix} H(x' - x)H(-n - 1/2) - H(x - x')H(n + 1/2); & 0 \\ 0; & H(x' - x)H(n + 1/2) - H(x - x')H(-n - 1/2) \end{pmatrix} \right\} \\
& \equiv 2 \frac{L}{\beta^2} \int_0^1 dx \int_0^1 dt \text{Im} \partial_t \left\{ H(x - x') \sum_{n=0}^{\infty} e^{-(2n+1) \frac{\pi}{\beta} [L(x-x') + i\beta(t-t')]} \right. \\
& \quad \left. + H(x' - x) \sum_{n=0}^{\infty} e^{-(2n+1) \frac{\pi}{\beta} [L(x'-x) + i\beta(t-t')]} \right\} \Big|_{(t', x')=(t, x+\epsilon)} \\
& = \frac{L}{\beta^2} \int_0^1 dx \int_0^1 dt \text{Im} \partial_t \left\{ \frac{1}{\sinh \left(\frac{\pi}{\beta} [L |x - x'| + i\beta(t - t')] \right)} \right\} \Big|_{(t', x')=(t, x+\epsilon)} \\
& \xrightarrow{t' \rightarrow t} - \frac{\pi L}{\beta^2} \frac{\cosh(\pi\epsilon/\beta)}{[\sinh(\pi\epsilon/\beta)]^2} = \frac{\partial}{\partial \beta} \left\{ -\frac{L\beta}{\pi\epsilon^2} - \frac{\pi L}{3\beta} + O(\epsilon^2) \right\}, \quad (5.30)
\end{aligned}$$

donde se observa una parte singular proporcional a L .

Reuniendo (5.29) y (5.30), e integrando respecto de β , se obtiene la energía libre de Helmholtz

$$\begin{aligned}
F(\beta, L) &= -\frac{2}{\beta} \sum_{n=0}^{\infty} \ln \left\{ 1 + e^{-2\omega_n L} \right\} + \frac{L}{\pi\epsilon^2} - \frac{\pi L}{3\beta^2} + \frac{\mathcal{C}}{\beta} \\
&= -\frac{1}{\beta} \ln \left\{ \theta_3(0, e^{-\frac{2\pi L}{\beta}}) \right\} + \frac{1}{\beta} \sum_{n=1}^{\infty} \ln \left(1 - e^{-\frac{4\pi L n}{\beta}} \right) + \frac{L}{\pi\epsilon^2} - \frac{\pi L}{3\beta^2} + \frac{\mathcal{C}}{\beta}, \quad (5.31)
\end{aligned}$$

donde \mathcal{C} es la constante de integración. Puede observarse la presencia de un término singular (cuando se remueve el regulador) independiente de la temperatura, correspondiente a una divergencia en la energía de Casimir del modelo.

En efecto, la energía de Casimir se obtiene tomando el límite de temperatura nula de (5.31). Puede demostrarse fácilmente que

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} F(\beta, L) = E_{Cas.}(L)$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{1}{\pi} \int_0^\infty d\omega \ln \left\{ 1 + e^{-2\omega L} \right\} + \frac{L}{\pi\epsilon^2} \\
&= -\frac{\pi}{24L} + \frac{L}{\pi\epsilon^2}, \tag{5.32}
\end{aligned}$$

Conviene notar las diferentes dependencias con L de los términos singular y finito. Mientras el término finito se anula en el límite $L \rightarrow \infty$, lo que corresponde a una corrección de tamaño finito, la parte singular, proporcional a L , está relacionada con un aporte divergente a la energía de vacío. Esta singularidad puede ser eliminada mediante un corrimiento en la densidad de energía del vacío.

La parte finita de la expresión (5.32) coincide con el resultado obtenido en la referencia [71], y da lugar a la aparición de una fuerza atractiva entre los extremos de la región de confinamiento de los fermiones.

Puede escribirse ahora

$$\begin{aligned}
F(\beta, L) - E_{Cas.}(L) &= -\frac{1}{\beta} \ln \left\{ \theta_3(0, e^{-\frac{2\pi L}{\beta}}) \right\} \\
&+ \frac{1}{\beta} \sum_{n=1}^{\infty} \ln \left(1 - e^{-\frac{4\pi Ln}{\beta}} \right) - \frac{\pi L}{3\beta^2} + \frac{\mathcal{C}}{\beta} + \frac{\pi}{24L}. \tag{5.33}
\end{aligned}$$

Tal como se realizó en el Capítulo 3, la constante indeterminada puede fijarse haciendo uso de la anulación de la entropía a $T = 0$.

La entropía corresponde a

$$S = \beta^2 \frac{\partial}{\partial \beta} F(\beta, L). \tag{5.34}$$

En el límite de grandes valores de β se obtiene

$$S = \beta^2 \frac{\partial}{\partial \beta} \left\{ \frac{\mathcal{C}}{\beta} + O(\beta^{-2}) \right\} = -\mathcal{C} + O(\beta^{-1}), \tag{5.35}$$

cuya anulación impone $\mathcal{C} = 0$.

Reuniendo los resultados presentados hasta ahora en el Capítulo 5, puede escribirse la energía libre de Gibbs completa del modelo

$$\begin{aligned}
&G(\beta, L, \mu) - E_{Cas.}(L) \\
&= -\frac{\mu^2 L}{2\pi} - \frac{1}{\beta} \ln \left\{ \theta_3(\mu L, e^{-\frac{2\pi L}{\beta}}) \right\} \\
&+ \frac{1}{\beta} \sum_{n=1}^{\infty} \ln \left(1 - e^{-\frac{4\pi Ln}{\beta}} \right) - \frac{\pi L}{3\beta^2} + \frac{\pi}{24L}. \tag{5.36}
\end{aligned}$$

Este resultado concluye el análisis deseable para este tipo de modelos.

Recuérdese que en el Capítulo 4 se completó el estudio de la bolsa quirál híbrida a temperatura T , cuando el número medio de partículas no está definido. El método presentado aquí permite, en principio, extender su estudio al caso de densidad finita.

5.3 Aplicación del método del operador de Forman

En la sección 5.1 se ha desarrollado un método adecuado para calcular la corrección que un potencial químico no nulo produce sobre la energía libre. En esta sección se estudiará una alternativa relacionada con el método reseñado en el Capítulo 2, que pone en términos del operador de Forman la diferencia de energías libres.

Habiendo relacionado el potencial químico con las condiciones de contorno “temporales”, el operador de Forman debe vincular proyecciones por distintos operadores de condiciones de contorno en esa dirección. Esto marca una diferencia con lo realizado anteriormente, cuando la base del núcleo del operador diferencial era elegida sólo con la condición de periodicidad o antiperiodicidad, según se tratase de sistemas fermiónicos o bosónicos.

Considerando el operador $D(\beta, L)$ definido en la expresión (5.2), se llamará $(D(\beta, L))_{A(\eta), B}$ al operador definido sobre funciones que satisfacen las condiciones de contorno

$$\begin{aligned} (A(\eta)\chi)(x) &\equiv \chi(t=1, x) + e^{i\eta}\chi(t=0, x) = 0, \\ (B\chi)(t, x) &\equiv [1 + \not{t}]\chi(t, x) = 0, \text{ para } x = 0, 1. \end{aligned} \quad (5.37)$$

La primera, condición de contorno en la dirección temporal, corresponde a la extensión analítica de (5.8) a valores imaginarios de μ . Escrito en estos términos, la variedad considerada puede pensarse como un cilindro y las funciones como secciones que ganan una fase η a lo largo de un giro. Por otra parte, la segunda línea de (5.37) impone condiciones de contorno locales en las tapas de ese cilindro.

El método requiere de una base en el núcleo del operador diferencial. Se ha visto que la simplicidad del cálculo depende fuertemente de la elección de esa base. En el Capítulo 2, para el caso de la bolsa quirál en $3 + 1$ dimensiones, la necesidad de conectar dos condiciones de contorno espaciales permitió considerar bases que satisfacen la condición de contorno temporal. Aquí, donde se relacionarán dos condiciones de contorno “temporales”, se impondrá sobre la base el cumplimiento de la condición de contorno espacial.

Para su construcción conviene analizar las autofunciones del operador hermítico $\left(-i\gamma_5 \frac{d}{dx}\right)_B$ (estrechamente relacionado con el hamiltoniano de

Dirac de este modelo)

$$\begin{aligned} -i\gamma_5 \frac{d}{dx} \chi_n(x) &= \lambda_n \chi_n(x), \\ (B\chi_n)(0) &= 0 = (B\chi_n)(1), \end{aligned} \quad (5.38)$$

las cuales vienen dadas por

$$\chi_n(x) = e^{i\pi(n+1/2)x\gamma_5} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}, \quad (5.39)$$

$$\text{con } \lambda_n = \pi(n + 1/2), \quad n \in \mathbf{Z}.$$

La base del núcleo se elige como

$$\psi_n(t, x) = e^{(n+1/2)\frac{\pi}{L}[\beta t + iLx\gamma_5]} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}, \quad \text{donde } n \in \mathbf{Z}. \quad (5.40)$$

El siguiente paso consiste en tomar los valores de borde de las funciones $\psi_n(t, x)$, y proyectarlos por los operadores de condiciones de contorno (5.37). Para tener en cuenta tanto la proyección “temporal” como la espacial conviene definir

$$H_n(t, x; \eta) = \begin{pmatrix} (A(\eta)\psi_n)(x) \\ (B\psi_n)(t, 0) \\ (B\psi_n)(t, 1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_n(x; \eta) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (5.41)$$

donde el segundo y tercer elemento del último miembro son idénticamente nulos debido a que las $\psi_n(t, x)$ satisfacen la condición de contorno espacial de (5.37). En cuanto al primer elemento, de la aplicación de $A(\eta)$ resulta

$$\begin{aligned} h_n(x; \eta) &= \psi_n(t=1, x) + e^{i\eta} \psi_n(t=0, x) \\ &= [e^{(n+1/2)\pi\beta/L} + e^{i\eta}] e^{i\pi(n+1/2)x\gamma_5} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

El operador de Forman relaciona valores de borde proyectados por dos operadores de condiciones de contorno distintos. De este modo, se puede escribir

$$H_n(t, x; \eta') = \tilde{\Phi}(\eta', \eta) H_n(t, x; \eta), \quad (5.42)$$

Dado que el operador B no depende del parámetro η , el operador de Forman $\tilde{\Phi}(\eta', \eta)$ tiene la forma

$$\tilde{\Phi}(\eta', \eta) = \begin{pmatrix} \Phi(\eta', \eta) & \Phi'(\eta', \eta) \\ 0 & Id_{2 \times 2} \end{pmatrix}. \quad (5.43)$$

La elección de esta base simplifica el cálculo de los elementos de matriz, permitiendo que el elemento relevante para la evaluación del determinante, $\Phi(\eta', \eta)$, se determine a partir de

$$\begin{aligned} h_n(x; \eta') &= \Phi(\eta', \eta) h_n(x; \eta) \\ &= \left(\frac{e^{(n+1/2)\pi\beta/L} + e^{i\eta'}}{e^{(n+1/2)\pi\beta/L} + e^{i\eta}} \right) h_n(x; \eta). \end{aligned} \quad (5.44)$$

De manera inmediata puede darse ahora la expresión para el operador de Forman. Considerando la base de los $h_n(x; \eta)$ ³, este operador resulta diagonal y se escribe

$$(\Phi(\eta', \eta))_{n,m} = \delta_{n,m} \left(\frac{1 + e^{i\eta' - (n+1/2)\pi\beta/L}}{1 + e^{i\eta - (n+1/2)\pi\beta/L}} \right). \quad (5.45)$$

Para la aplicación del método de los p -determinantes hace falta construir combinaciones de operadores de Forman, calculados para distintos valores de los parámetros del operador diferencial. De este modo, para los conjuntos de parámetros (β, L) y (β_0, L_0) se tiene

$$\begin{aligned} & \left(\Phi(\eta', \eta) \Phi_0^{-1}(\eta', \eta) \right)_{n,m} \\ &= \delta_{n,m} \left(\frac{1 + e^{i\eta' - (n+1/2)\pi\beta/L}}{1 + e^{i\eta - (n+1/2)\pi\beta/L}} \right) \left(\frac{1 + e^{i\eta - (n+1/2)\pi\beta_0/L_0}}{1 + e^{i\eta' - (n+1/2)\pi\beta_0/L_0}} \right). \end{aligned} \quad (5.46)$$

Resulta sencillo demostrar que el operador $\left[\Phi(\eta', \eta) \Phi_0^{-1}(\eta', \eta) - 1 \right]$ es tipo traza, de lo que se desprende que puede tomarse el 1-determinante. Este es un ejemplo de la existencia del p -determinante para valores de p menores que la dimensión de la variedad considerada. Esto está relacionado con el hecho de que, como se ha visto en la sección anterior, las únicas divergencias corresponden a la energía de Casimir, que también está contenida en la energía de referencia. Teniendo en cuenta este hecho puede escribirse

$$\begin{aligned} & \det_1 \left(\Phi(\eta', \eta) \Phi_0^{-1}(\eta', \eta) \right) \\ &= \prod_0^\infty \left| \frac{1 + e^{i\eta' - (n+1/2)\pi\beta/L}}{1 + e^{i\eta - (n+1/2)\pi\beta/L}} \right|^2 \left| \frac{1 + e^{i\eta - (n+1/2)\pi\beta_0/L_0}}{1 + e^{i\eta' - (n+1/2)\pi\beta_0/L_0}} \right|^2 \\ &= \frac{\theta_3(\frac{\eta'}{2}, e^{-\frac{\pi\beta}{2L}})}{\theta_3(\frac{\eta}{2}, e^{-\frac{\pi\beta}{2L}})} \frac{\theta_3(\frac{\eta}{2}, e^{-\frac{\pi\beta_0}{2L_0}})}{\theta_3(\frac{\eta'}{2}, e^{-\frac{\pi\beta_0}{2L_0}})}. \end{aligned} \quad (5.47)$$

³Recuérdese que el isomorfismo entre el núcleo del operador diferencial y el espacio de valores de borde proyectados garantiza que las $\{h_n\}$ forman un sistema completo, según se ha visto en el Capítulo 2

El resultado de las referencias [2, 11] relaciona la expresión anterior con el determinante del cociente de operadores diferenciales elípticos que interesa calcular,

$$\begin{aligned} \det_1 \left\{ D(\beta, L)_{A(\eta'), B} (D(\beta_0, L_0))_{A(\eta'), B}^{-1} D(\beta_0, L_0)_{A(\eta), B} (D(\beta, L))_{A(\eta), B}^{-1} \right\} \\ = \det_1 \left(\Phi(\eta', \eta) \Phi_0^{-1}(\eta', \eta) \right). \end{aligned} \quad (5.48)$$

Eligiendo los parámetros como $\eta' = i\mu'\beta$ y $\eta = i\mu\beta$ y notando que

$$\begin{aligned} (D(\beta, L))_{A(\eta), B} &= (e^{-i\eta t} D(\beta, L) e^{i\eta t})_{A(0), B} \\ &= \left(\frac{i}{\beta} \gamma^0 \partial_t + \frac{i}{L} \gamma^1 \partial_x - \frac{\eta}{\beta} \gamma^0 \right)_{A(0), B}, \end{aligned} \quad (5.49)$$

puede escribirse para la diferencia de energías libres

$$\begin{aligned} &-\beta G(\beta, L, \mu') + \beta_0 G(\beta_0, L_0, \mu' \beta / \beta_0) \\ &-\beta_0 G(\beta_0, L_0, \mu \beta / \beta_0) + \beta G(\beta, L, \mu) \\ &= \ln \left\{ \frac{\theta_3\left(\frac{i\mu'\beta}{2}, e^{-\frac{\pi\beta}{2L}}\right)}{\theta_3\left(\frac{i\mu\beta}{2}, e^{-\frac{\pi\beta}{2L}}\right)} \frac{\theta_3\left(\frac{i\mu\beta}{2}, e^{-\frac{\pi\beta_0}{2L_0}}\right)}{\theta_3\left(\frac{i\mu'\beta}{2}, e^{-\frac{\pi\beta_0}{2L_0}}\right)} \right\}, \end{aligned} \quad (5.50)$$

que conducirá al resultado final de esta sección.

Tomando $\mu' = 0$

$$\begin{aligned} &\beta [G(\beta, L, \mu) - G(\beta, L, 0)] \\ &-\beta_0 [G(\beta_0, L_0, \mu \beta / \beta_0) - G(\beta_0, L_0, 0)] \\ &= \ln \left\{ \frac{\theta_3(0, e^{-\frac{\pi\beta}{2L}})}{\theta_3\left(\frac{i\mu\beta}{2}, e^{-\frac{\pi\beta}{2L}}\right)} \frac{\theta_3\left(\frac{i\mu\beta}{2}, e^{-\frac{\pi\beta_0}{2L_0}}\right)}{\theta_3(0, e^{-\frac{\pi\beta_0}{2L_0}})} \right\}, \end{aligned} \quad (5.51)$$

donde se tiene todavía la libertad adicional de la elección de β_0 y L_0 . Nótese que cuando $\beta/\beta_0 \ll 1$, en virtud del teorema del valor medio,

$$\begin{aligned} &\beta_0 [G(\beta_0, L_0, \mu \beta / \beta_0) - G(\beta_0, L_0, 0)] \\ &= \beta_0 \frac{\mu \beta}{\beta_0} \frac{\partial G}{\partial \mu_0}(\beta_0, L_0, \mu_0) = -\mu \beta \bar{N}(\beta_0, L_0, \mu_0), \end{aligned} \quad (5.52)$$

para algún μ_0 tal que $0 < \mu_0 < \mu\beta/\beta_0$. En (5.52) se ha tomado por $\bar{N}(\beta_0, L_0, \mu_0)$ al número medio de partículas. Se cumple entonces que

$$\begin{aligned} \beta_0 [G(\beta_0, L_0, \mu \beta / \beta_0) - G(\beta_0, L_0, 0)] &\rightarrow 0. \\ \beta_0 &\rightarrow \infty \end{aligned} \quad (5.53)$$

Por otra parte, en el miembro de la derecha de (5.51) se tiene que

$$\lim_{\beta_0 \rightarrow \infty} \frac{\theta_3\left(\frac{i\mu\beta}{2}, e^{-\frac{\pi\beta_0}{2L_0}}\right)}{\theta_3\left(0, e^{-\frac{\pi\beta_0}{2L_0}}\right)} = 1, \quad (5.54)$$

lo que permite escribir la diferencia de energías libres de Gibbs y de Helmholtz como

$$\begin{aligned} \beta [G(\beta, L, \mu) - G(\beta, L, 0)] &= \ln \left\{ \frac{\theta_3\left(0, e^{-\frac{\pi\beta}{2L}}\right)}{\theta_3\left(\frac{i\mu\beta}{2}, e^{-\frac{\pi\beta}{2L}}\right)} \right\} \\ &= \frac{-\mu^2\beta L}{2\pi} + \ln \left\{ \frac{\theta_3\left(0, e^{-\frac{2\pi L}{\beta}}\right)}{\theta_3\left(\mu L, e^{-\frac{2\pi L}{\beta}}\right)} \right\}, \end{aligned} \quad (5.55)$$

Nótese que para la obtención del último miembro se ha utilizado la fórmula de inversión de la función θ_3 de Jacobi,

$$\theta_3\left(\frac{i\mu\beta}{2}, e^{-\frac{\pi\beta}{2L}}\right) = e^{\frac{\mu^2\beta L}{2\pi}} \theta_3\left(\mu L, e^{-\frac{2\pi L}{\beta}}\right). \quad (5.56)$$

El resultado (5.55) coincide totalmente con el señalado en la ecuación (5.27).

Este último método de cálculo permite ver que el potencial químico puede introducirse mediante una extensión analítica en un parámetro de “twist” en la condición de contorno de la dirección del tiempo euclídeo. Desde este punto de vista, la presencia de las funciones de Jacobi no resulta sorprendente. En efecto, tales funciones aparecen en teorías fermiónicas en dos dimensiones con invarianza conforme [72].

Además, el presente resultado puede relacionarse con el estudio de fermiones bidimensionales sin masa, a $T > 0$ y bajo condiciones de contorno tipo “twist” en la dirección espacial, presentado en la referencia [27]. En efecto, teniendo en cuenta que las condiciones de contorno espaciales (locales) definidas por B en (5.38) implican antiperiodicidad en el segmento $x \in [0, 2]$ para las autofunciones del hamiltoniano (ver ecuaciones (5.38),(5.39)), no es difícil obtener de la ecuación (5.55) los resultados de [27] realizando los cambios $\beta \rightarrow L$ y $L \rightarrow \beta/2$.

5.4 Resumen del Capítulo 5

En el presente capítulo se ha estudiado la aplicación de técnicas funcionales como las desarrolladas en los Capítulos 2 y 3 a un problema de densidad de partículas no nula.

Se ha visto que es posible la introducción de un potencial químico no nulo en un modelo fermiónico mediante la imposición de condiciones de contorno “twisted” en la dirección del tiempo euclídeo.

Para el estudio del determinante que interesa en esta situación se utilizaron dos técnicas. La primera, basada en el conocimiento de la función de Green que satisface las condiciones de contorno del problema. La restante, utilizando las técnicas funcionales basadas en el p -determinante del operador de Forman, que permite realizar los cálculos a partir de valores de borde de funciones en el núcleo del operador diferencial de Dirac.

En la sección 5.1 se estudió la diferencia entre las energías libres de Gibbs y de Helmholtz ($\mu = 0$), en términos de la integral en μ de una traza que involucra a la función de Green.

Un tratamiento cuidadoso de los términos que no son absolutamente convergentes puso en evidencia una contribución dependiente de μ^2 , necesaria para reproducir el correcto comportamiento del número medio de partículas para $L \rightarrow \infty$. La parte regular corresponde a correcciones por tamaño finito, y da a \bar{N} el aspecto que se muestra en la Figura 5.1.

Para completar el modelo, en la sección 5.2 se estudió la energía libre de Helmholtz, empleando en este caso la derivada respecto de la variable β . La constante de integración fue fijada imponiendo que la entropía se anule cuando la temperatura vale cero. En estos cálculos, la consideración del límite $\beta \rightarrow \infty$ permitió identificar la energía de Casimir y analizar sus partes divergentes, que pueden ser eliminadas mediante un corrimiento en la densidad de energía del vacío.

Los resultados de las secciones 5.1 y 5.2 completan el estudio del modelo. Si bien la descripción del mismo habría sido posible a partir de los autovalores del Hamiltoniano de Dirac (exactamente resolubles en este caso simple, según surge de la ecuación (5.39)), el método de la función de Green desarrollado señala el camino para su extensión a casos más realistas en $(3 + 1)$ -dimensiones. En efecto, en este modelo, el problema de autovalores del hamiltoniano conduce a ecuaciones trascendentes, lo que complica todo estudio analítico. No obstante, si bien algebraicamente más compleja, la función de Green relacionada con el modelo de la bolsa quirral híbrida puede obtenerse extendiendo al caso de temperatura no nula los cálculos presentados en [19].

En la sección 5.3 se consideró también el cálculo alternativo que hace uso del método de los p -determinantes desarrollado en el Capítulo 2. Partiendo de una base adecuada para el núcleo del operador de Dirac pudo construirse el operador de Forman. El determinante de Fredholm de cocientes de tales operadores condujo, mediante una extensión analítica en el parámetro de “twist” en la dirección del tiempo euclídeo, a la diferencia de energías libres con y sin potencial químico. Los resultados obtenidos son idénticos a los que surgen del estudio de la función de Green. Sin embargo, la sencillez de este último método radica en la adecuada elección de una base que, en este

caso, está relacionada con los autoestados del Hamiltoniano de Dirac. Esto hace esperar que su extensión a modelos más realistas resulte difícil.

Capítulo 6

Conclusiones

En la presente tesis se ha estudiado la introducción de técnicas para la evaluación de determinantes funcionales en regiones con borde. Ha motivado el análisis de este tipo de problemas la relación entre determinantes y magnitudes físicas de interés en Teoría Cuántica de Campos y Mecánica Estadística.

En primer lugar, en el Capítulo 2, se ha reseñado y empleado un método de evaluación de determinantes de cocientes de operadores elípticos, definidos en variedades con borde. Se consideran operadores de condiciones de contorno que definen problemas elípticos de borde. Éste método se basa en la existencia de p -determinantes de los operadores pseudodiferenciales introducidos por R. Forman. Estos operadores, que actúan sobre funciones definidas en el borde de la variedad, pueden determinarse utilizando los valores de borde (trazas) de las funciones del núcleo (soluciones) del operador diferencial en cuestión, los que se proyectan mediante los operadores de condiciones de contorno.

La evaluación de (diferencias de) energías libres de sistemas sometidos a distintas condiciones de contorno conduce naturalmente al cálculo de determinantes de cocientes de operadores diferenciales. Esto requiere la introducción de técnicas de regularización para la correcta definición de las magnitudes físicas.

Los métodos de cálculo desarrollados, por aplicarse a variedades compactas, conducen naturalmente a la consideración de problemas a temperatura finita.

Se ha aplicado el método reseñado al estudio de la diferencia de la energía libre de Helmholtz de una bolsa quiral híbrida respecto de la denominada bolsa de M. I. T. [15].

En ese contexto se consideró un sistema fermiónico confinado en una cavidad esférica estática de radio R . Las condiciones de contorno lo acoplan a un campo externo, representado por el ángulo quiral θ presente en las condiciones de contorno.

En cuanto a la energía de referencia, corresponde a la del exitoso modelo de la bolsa de M. I. T. , en el cual las condiciones de contorno se introducen con el objeto de lograr el confinamiento de la corriente de color en el interior de la cavidad.

Para la aplicación del método de los p -determinantes debió considerarse una base discreta para el núcleo del operador de Dirac, reduciendo la evaluación del determinante del operador de Forman al cálculo de series dobles divergentes. Para darles sentido, se introdujo una regularización analítica. Con el objeto de separar los comportamientos singulares de estas sumas dobles se hizo uso de desarrollos asintóticos de los términos generales de las sumatorias, inspirados en el desarrollo de Debye para las funciones de Bessel. Las singularidades aisladas resultan independientes de la temperatura, lo que es necesario para que la teoría tenga sentido una vez renormalizada a temperatura cero. Ellas pueden ser eliminadas mediante la introducción de contratérminos adecuados en el lagrangiano del modelo de bolsa quiral híbrida.

A diferencia de tratamientos previos, el procedimiento de renormalización que se ha seguido conduce, naturalmente, a resultados finitos para la energía libre (o bien de su límite de $T = 0$, la energía de Casimir) y las magnitudes de ella derivadas, tales como el flujo de la corriente axial.

Por otra parte, las correcciones finitas a estos desarrollos asintóticos fueron calculadas numéricamente, de modo de obtener la corrección completa a la energía libre de Helmholtz de la bolsa quiral.

Si bien el método de los p -determinantes resulta adecuado para el cálculo de diferencias de energías libres, los determinantes de referencia deben ser evaluados mediante técnicas complementarias.

Como se ha dicho en el Capítulo 3, la función de Green que satisface las condiciones de contorno de los problemas considerados contiene suficiente información como para calcular esos determinantes. De este modo se han podido relacionar derivadas respecto de la temperatura de las energías libres de interés con trazas que involucran funciones de Green. Utilizando bases discretas para su representación, el cálculo de trazas conduce nuevamente a sumas dobles que requieren de regularizaciones.

A modo de ejemplo de cálculo, se estudió el problema de un campo escalar sin masa bajo condiciones de contorno generales [33], donde la técnica desarrollada puede ponerse a prueba evitando una excesiva complejidad algebraica. Se obtuvieron así los comportamientos de la energía libre en las regiones de grandes y pequeños valores de la única variable del problema, $z = RT$. En ambos casos, la introducción de los desarrollos asintóticos permitió el aislamiento y análisis de las singularidades que, según se ha señalado, resultan independientes de la temperatura.

Con la experiencia adquirida en el caso del campo escalar, se estudiaron los campos fermiónico y de gauge (abeliano) con las condiciones de contorno

de la bolsa de M. I. T. [34]. El primer caso corresponde a una simple extensión de los métodos aplicados al campo escalar, aunque la función de Green fermiónica resulta más complicada. En cuanto al campo de gauge, la presencia de la simetría local hace necesaria la introducción de campos fantasmas, cuyo aporte a la energía libre es cancelado por los modos no físicos (temporal y longitudinal) del campo vectorial. En ambos casos se obtuvo la energía libre y su límite de temperatura cero, proporcional a $1/R$. La renormalización de las singularidades hace que la energía de Casimir resulte indeterminada en un término con igual dependencia del radio de la cavidad, que debe fijarse con condiciones físicas adicionales. En el modelo de bolsa quiral híbrida las constantes indeterminadas de la bolsa de M. I. T. son fijadas de modo que se eliminen las contribuciones divergentes en el límite de $R \rightarrow 0$.

En el Capítulo 4 se utilizaron los resultados anteriores para el estudio de modelos concretos de interés para la Teoría Cuántica de Campos. De este modo se consideraron modelos en los que el confinamiento es introducido de manera explícita. La descripción de estos modelos a temperatura finita es actualmente un tópico de gran interés. En efecto, se estima que en colisiones de iones pesados a altas energías puede tener lugar la formación de un nuevo estado de la materia, denominado plasma de quarks y gluones. En ese sentido resulta interesante el estudio de transiciones de fase deconfinantes en modelos hadrónicos como los aquí estudiados.

Por ello se consideró el modelo simple de “gota de quarks y gluones”, en el cual esos campos se encuentran confinados en una región esférica. En el exterior, campos escalares modelan la presencia de piones, y una presión fenomenológica mantiene el confinamiento hasta cierta temperatura crítica. De los cálculos realizados en esta tesis se ha podido observar la presencia de radios de equilibrio estables a temperaturas menores que la crítica, que se convierten en metaestables cuando T_C es superada.

Por otra parte, ha sido analizado el modelo de la bolsa quiral híbrida. En este modelo de dos fases, los fermiones se acoplan con un campo bosónico exterior en la configuración de skyrmión. Este último corresponde a una solución clásica con carga topológica $\mathcal{B} = 1$ del modelo de Skyrme, que se ha mostrado adecuado para la descripción de propiedades de bajas energías de los bariones. La combinación del modelo de la bolsa con el skyrmión permite obtener una visión sumamente atractiva. En efecto, se cuenta con los grados de libertad fundamentales de la Q. C. D. a distancias pequeñas del centro de la cavidad, y además es posible ajustar el flujo de la corriente axial de ambas fases, recuperando su conservación en el borde (perdida en la bolsa de M. I. T.).

En el modelo de dos fases se logra la determinación completa de las constantes renormalizadas mediante la imposición de condiciones físicamente aceptables. Similarmente, han podido determinarse los parámetros del mod-

elo de Skyrme $e(R)$ y F_π .

En ese contexto, ha sido estudiada la energía completa del modelo de dos fases a $T = 0$, compuesta por el aporte de la bolsa (energía de Casimir + quarks de valencia) y del skyrmión externo. Así como ocurre con el número bariónico, la energía del modelo resulta marcadamente independiente del radio de la cavidad hasta R del orden de 1 fm. Esto da sustento a la hipótesis del cumplimiento aproximado en $3 + 1$ dimensiones del “esquema del gato de Cheshire”.

Se han analizado además mecanismos recientemente propuestos para la descripción de transiciones deconfinantes en este modelo, basados en el estudio del equilibrio de presiones entre las fases interna y externa.

Si bien los cálculos de los Capítulos 2 y 3 describen totalmente el modelo híbrido a temperatura finita, la identificación del mismo con un barión exige la imposición de que el número bariónico medio sea 1. Esto sólo puede lograrse mediante la introducción de un potencial químico no nulo.

Por último, se analizó en un sistema de prueba la posibilidad de introducción de un potencial químico mediante la imposición de condiciones de contorno particulares en la dirección del tiempo euclídeo [67], y su estudio mediante estas técnicas de cálculo de determinantes funcionales.

En el ejemplo simple de un campo fermiónico bidimensional ha sido evaluado el correspondiente determinante funcional mediante su relación con la función de Green, y también mediante el método de los p -determinantes del operador de Forman, obteniéndose la expresión completa de la energía de Gibbs del modelo. El primero de estos métodos resulta, en principio, aplicable a cálculos en $3 + 1$ dimensiones, lo que se encuentra actualmente en realización.

Apéndice A

Desarrollos Asintóticos

En los Capítulos 2 y 3 se introdujeron desarrollos asintóticos para los argumentos de las sumas dobles, inspirados en el desarrollo de Debye de las funciones de Bessel.

En el presente apéndice se darán las expresiones de los mencionados desarrollos

A.1 Desarrollos asintóticos para las correcciones quirales

El desarrollo de Debye del argumento de la suma doble, a orden 6 en potencias de $1/\rho$, Δ_6 se escribe,

$$\Delta_6 = \tilde{a}_2 \text{sen}^2 \theta + \tilde{a}_4 \text{sen}^4 \theta + \tilde{a}_6 \text{sen}^6 \theta \quad (\text{A.1})$$

donde

$$\begin{aligned} \tilde{a}_2(z) &= \tilde{a}^{(2,1)} + \tilde{a}^{(2,2)} + \tilde{a}^{(2,3)} + \tilde{a}^{(2,4)} + \tilde{a}^{(2,5)} + \tilde{a}^{(2,6)} \\ \tilde{a}_4(z) &= \tilde{a}^{(4,3)} + \tilde{a}^{(4,4)} + \tilde{a}^{(4,5)} + \tilde{a}^{(4,6)} \\ \tilde{a}_6(z) &= \tilde{a}^{(6,5)} + \tilde{a}^{(6,6)}, \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

En la expresión anterior

$$\tilde{a}^{(i,j)} = \sum_{m,d} C_{m,d} \nu^d \rho^{-m} \quad (\text{A.3})$$

Los coeficientes $C_{m,d}$ deben extraerse de las siguientes expresiones

$$\begin{aligned} \tilde{a}^{(2,1)} &= -2\nu\rho^{-2} + \nu^3\rho^{-4}; \\ \tilde{a}^{(2,2)} &= -2\nu\rho^{-3} + 5\nu^3\rho^{-5} - 3\nu^5\rho^{-7}; \\ \tilde{a}^{(2,3)} &= -\frac{5}{4}\nu\rho^{-4} + \frac{25}{2}\nu^3\rho^{-6} - \frac{45}{2}\nu^5\rho^{-8} + \frac{45}{4}\nu^7\rho^{-10}; \\ \tilde{a}^{(2,4)} &= -\nu\rho^{-5} + \frac{237}{8}\nu^3\rho^{-7} - \frac{867}{8}\nu^5\rho^{-9} + \frac{1067}{8}\nu^7\rho^{-11} - \frac{429}{8}\nu^9\rho^{-13}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{a}^{(2,5)} &= -2\nu\rho^{-6} + \frac{1355}{16}\nu^3\rho^{-8} - \frac{7937}{16}\nu^5\rho^{-10} + \frac{4253}{4}\nu^7\rho^{-12} \\
&\quad - \frac{15501}{16}\nu^9\rho^{-14} + \frac{5103}{16}\nu^{11}\rho^{-16}; \\
\tilde{a}^{(2,6)} &= -\frac{373}{64}\nu\rho^{-7} + \frac{37463}{128}\nu^3\rho^{-9} - \frac{309637}{128}\nu^5\rho^{-11} + \frac{494595}{64}\nu^7\rho^{-13} \\
&\quad - \frac{372897}{32}\nu^9\rho^{-15} + \frac{1071571}{128}\nu^{11}\rho^{-17} - \frac{296253}{128}\nu^{13}\rho^{-19}; \\
\tilde{a}^{(4,3)} &= -\nu\rho^{-4} + \nu^3\rho^{-6} - \frac{1}{8}\nu^5\rho^{-8}; \\
\tilde{a}^{(4,4)} &= -2\nu\rho^{-5} + 6\nu^3\rho^{-7} - \frac{19}{4}\nu^5\rho^{-9} + \frac{3}{4}\nu^7\rho^{-11} \\
\tilde{a}^{(4,5)} &= -\frac{9}{4}\nu\rho^{-6} + \frac{289}{16}\nu^3\rho^{-8} - 35\nu^5\rho^{-10} + \frac{185}{8}\nu^7\rho^{-12} - \frac{63}{16}\nu^9\rho^{-14}; \\
\tilde{a}^{(4,6)} &= -\frac{9}{4}\nu\rho^{-7} + \frac{363}{8}\nu^3\rho^{-9} - \frac{5369}{32}\nu^5\rho^{-11} + \frac{7437}{32}\nu^7\rho^{-13} \\
&\quad - \frac{4147}{32}\nu^9\rho^{-15} + \frac{699}{32}\nu^{11}\rho^{-17}; \\
\tilde{a}^{(6,5)} &= -\frac{2}{3}\nu\rho^{-6} + 83 - \frac{3}{8}\nu^5\rho^{-10} + \frac{1}{48}\nu^7\rho^{-12}; \\
\tilde{a}^{(6,6)} &= -2\nu\rho^{-7} + 7\nu^3\rho^{-9} - \frac{61}{8}\nu^5\rho^{-11} + \frac{45}{16}\nu^7\rho^{-13} - \frac{3}{16}\nu^9\rho^{-15};
\end{aligned}$$

A.2 Desarrollos asintóticos para el campo fermiónico

El desarrollo asintótico del argumento de la suma doble en el caso del campo fermiónico se escribe

$$\Delta_6 = \tilde{a}^{(-2)} + \tilde{a}^{(-1)} + \tilde{a}^{(0)} + \tilde{a}^{(1)} + \tilde{a}^{(2)} + \tilde{a}^{(3)} + \tilde{a}^{(4)} + \tilde{a}^{(5)} + \tilde{a}^{(6)} \quad (\text{A.4})$$

donde $\tilde{a}^{(i)}$ tienen la forma señalada en (A.3) y los coeficiente se obtienen a partir de

$$\begin{aligned}
\tilde{a}^{(-2)} &= -4\nu^2 + 4\nu\rho; \\
\tilde{a}^{(-1)} &= -4\nu + 2\nu^2\rho^{-1} + 2\rho; \\
\tilde{a}^{(0)} &= -1 + \frac{3}{2}\nu\rho^{-1} - \nu^3\rho^{-3} + \frac{1}{2}\nu^5\rho^{-5}; \\
\tilde{a}^{(1)} &= \frac{1}{4}\nu - \frac{5}{4}\nu^2\rho^{-3} - \nu^3\rho^{-4} + \frac{9}{4}\nu^4\rho^{-5} + \frac{5}{2}\nu^5\rho^{-6} - \frac{5}{4}\nu^6\rho^{-7} - \frac{3}{2}\nu^7\rho^{-8}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{a}^{(2)} &= -\frac{17}{32}\nu\rho^{-3} - \frac{3}{2}\nu^2\rho^{-4} + \frac{7}{8}\nu^3\rho^{-5} + \frac{33}{4}\nu^4\rho^{-6} + \frac{75}{16}\nu^5\rho^{-7} \\
&\quad - \frac{51}{4}\nu^6\rho^{-8} - \frac{85}{8}\nu^7\rho^{-9} + 6\nu^8\rho^{-10} + \frac{179}{32}\nu^9\rho^{-11}; \\
\tilde{a}^{(3)} &= -\frac{5}{64}\rho^{-3} - \frac{3}{4}\nu\rho^{-4} - \frac{89}{64}\nu^2\rho^{-5} + \frac{21}{4}\nu^3\rho^{-6} + \frac{705}{32}\nu^4\rho^{-7} \\
&\quad + \frac{7}{4}\nu^5\rho^{-8} - \frac{2219}{32}\nu^6\rho^{-9} - \frac{335}{8}\nu^7\rho^{-10} + \frac{5091}{64}\nu^8\rho^{-11} + \frac{249}{4}\nu^9\rho^{-12} \\
&\quad - \frac{1969}{64}\nu^{10}\rho^{-13} - \frac{213}{8}\nu^{11}\rho^{-14}; \\
\tilde{a}^{(4)} &= -\frac{1}{8}\rho^{-4} - \frac{277}{256}\nu\rho^{-5} - \frac{11}{8}\nu^2\rho^{-6} + \frac{2077}{128}\nu^3\rho^{-7} + \frac{485}{8}\nu^4\rho^{-8} - \frac{6881}{256}\nu^5\rho^{-9} \\
&\quad - \frac{5201}{16}\nu^6\rho^{-10} - \frac{8357}{64}\nu^7\rho^{-11} + \frac{1319}{2}\nu^8\rho^{-12} + \frac{112521}{256}\nu^9\rho^{-13} - \frac{9279}{16}\nu^{10}\rho^{-14} \\
&\quad - \frac{58331}{128}\nu^{11}\rho^{-15} + \frac{1491}{8}\nu^{12}\rho^{-16} + \frac{40573}{256}\nu^{13}\rho^{-17}; \\
\tilde{a}^{(5)} &= -\frac{107}{512}\rho^{-5} - \frac{63}{32}\nu\rho^{-6} - \frac{853}{512}\nu^2\rho^{-7} + \frac{1607}{32}\nu^3\rho^{-8} + \frac{98147}{512}\nu^4\rho^{-9} \\
&\quad - \frac{5849}{32}\nu^5\rho^{-10} - \frac{792827}{512}\nu^6\rho^{-11} - \frac{10973}{32}\nu^7\rho^{-12} + \frac{2449795}{512}\nu^8\rho^{-13} \\
&\quad + \frac{43633}{16}\nu^9\rho^{-14} - \frac{3597763}{512}\nu^{10}\rho^{-15} - \frac{40671}{8}\nu^{11}\rho^{-16} + \frac{2533349}{512}\nu^{12}\rho^{-17} \\
&\quad + \frac{63777}{16}\nu^{13}\rho^{-18} - \frac{689741}{512}\nu^{14}\rho^{-19} - \frac{18429}{16}\nu^{15}\rho^{-20}; \\
\tilde{a}^{(6)} &= -\frac{27}{64}\rho^{-6} - \frac{37029}{8192}\nu\rho^{-7} - \frac{157}{64}\nu^2\rho^{-8} + \frac{176859}{1024}\nu^3\rho^{-9} + \frac{45109}{64}\nu^4\rho^{-10} \\
&\quad - \frac{2060733}{2048}\nu^5\rho^{-11} - \frac{506615}{64}\nu^6\rho^{-12} - \frac{503167}{1024}\nu^7\rho^{-13} + \frac{273215}{8}\nu^8\rho^{-14} \\
&\quad + \frac{68350973}{4096}\nu^9\rho^{-15} - \frac{2345995}{32}\nu^{10}\rho^{-16} - \frac{50553539}{1024}\nu^{11}\rho^{-17} + \frac{2682957}{32}\nu^{12}\rho^{-18} \\
&\quad + \frac{132415791}{2048}\nu^{13}\rho^{-19} - \frac{1567557}{32}\nu^{14}\rho^{-20} - \frac{41610889}{1024}\nu^{15}\rho^{-21} + \frac{92145}{8}\nu^{16}\rho^{-22} \\
&\quad + \frac{81840739}{8192}\nu^{17}\rho^{-23};
\end{aligned}$$

A.3 Desarrollo asintótico para el campo de gauge

Para completar, el desarrollo asintótico del término general de la sumatoria doble, en el caso del campo de gauge bajo condiciones de contorno tipo bolsa M. I. T. es

$$\Delta_6 = \tilde{a}^{(-2)} + \tilde{a}^{(0)} + \tilde{a}^{(1)} + \tilde{a}^{(2)} + \tilde{a}^{(3)} + \tilde{a}^{(4)} + \tilde{a}^{(5)} + \tilde{a}^{(6)} \quad (\text{A.5})$$

con $\tilde{a}^{(i)}$ de forma similar a las de (A.3). Los correspondientes coeficientes se extraen de

$$\begin{aligned} \tilde{a}^{(-2)} &= -4\nu\rho + 4\nu^2; \\ \tilde{a}^{(0)} &= \frac{1}{2}\nu\rho^{-1} - \frac{1}{2}\nu^5\rho^{-5}; \\ \tilde{a}^{(1)} &= -\frac{3}{2}\nu^5\rho^{-6} + \frac{3}{2}\nu^7\rho^{-8}; \\ \tilde{a}^{(2)} &= \frac{1}{32}\nu\rho^{-3} + \frac{1}{4}\nu^3\rho^{-5} - \frac{71}{16}\nu^5\rho^{-7} + \frac{39}{4}\nu^7\rho^{-9} - \frac{179}{32}\nu^9\rho^{-11}; \\ \tilde{a}^{(3)} &= \frac{3}{4}\nu^3\rho^{-6} - \frac{57}{4}\nu^5\rho^{-8} + 51\nu^7\rho^{-10} - \frac{513}{8}\nu^9\rho^{-12} + \frac{213}{8}\nu^{11}\rho^{-14}; \\ \tilde{a}^{(4)} &= -\frac{7}{256}\nu\rho^{-5} + \frac{71}{32}\nu^3\rho^{-7} - \frac{12623}{256}\nu^5\rho^{-9} + \frac{4135}{16}\nu^7\rho^{-11} - \frac{136765}{256}\nu^9\rho^{-13} \\ &\quad + \frac{15405}{32}\nu^{11}\rho^{-15} - \frac{40573}{256}\nu^{13}\rho^{-17}; \\ \tilde{a}^{(5)} &= -\frac{3}{32}\nu\rho^{-6} + \frac{219}{32}\nu^3\rho^{-8} - \frac{2973}{16}\nu^5\rho^{-10} + \frac{21471}{16}\nu^7\rho^{-12} - 4053\nu^9\rho^{-14} \\ &\quad + \frac{47517}{8}\nu^{11}\rho^{-16} - \frac{67221}{16}\nu^{13}\rho^{-18} + \frac{18429}{16}\nu^{15}\rho^{-20}; \\ \tilde{a}^{(6)} &= -\frac{2267}{8192}\nu\rho^{-7} + \frac{11687}{512}\nu^3\rho^{-9} - \frac{1567935}{2048}\nu^5\rho^{-11} + \frac{3748151}{512}\nu^7\rho^{-13} \\ &\quad - \frac{123799981}{4096}\nu^9\rho^{-15} + \frac{32715993}{512}\nu^{11}\rho^{-17} - \frac{148891355}{2048}\nu^{13}\rho^{-19} \\ &\quad + \frac{21729177}{512}\nu^{15}\rho^{-21} - \frac{81840739}{8192}\nu^{17}\rho^{-23}; \end{aligned}$$

Apéndice B

Funciones de Green en regiones acotadas

B.1 Función de Green para la bolsa de M. I. T.

La función de Green del campo fermiónico bajo condiciones de contorno tipo bolsa M. I. T. satisface

$$\left\{ \begin{array}{ll} (i \not{\partial} \otimes \mathcal{I}_I) G(x, x') = \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}') \delta(\tau - \tau') \mathcal{I}_4 \otimes \mathcal{I}_I & \text{en } \Omega \\ [(\mathcal{I} + i \not{\eta}) \otimes \mathcal{I}_I] G(x, x') = 0 & \text{en } \partial\Omega \\ \text{Antiperiodicidad en } [0, \beta] & \end{array} \right. \quad (\text{B.1})$$

donde Ω es una cavidad esférica estática de radio R .

Para la resolución de este problema se seguirá la línea señalada en [35].

Se propone

$$G(\vec{x}, \vec{x}'; \tau) = \frac{1}{\beta} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-i\omega_n \tau} G(\vec{x}, \vec{x}'; \omega_n) \quad (\text{B.2})$$

donde

$$\omega_n = (2n + 1) \frac{\pi}{\beta},$$

con lo que se satisface la condición de antiperiodicidad.

La ecuación diferencial para los coeficientes es

$$\left\{ \left(\omega_n \gamma^0 + i \vec{\gamma} \cdot \vec{\nabla} \right) \otimes \mathcal{I}_I \right\} G(\vec{x}, \vec{x}'; \omega_n) = \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}') \mathcal{I}_4 \otimes \mathcal{I}_I \quad (\text{B.3})$$

Como el operador diferencial y los operadores de condiciones de contorno son proporcionales a la identidad sobre el espacio de isospin, se propone para la componente espectral $G(\vec{x}, \vec{x}'; \omega_n)$ el mismo comportamiento. En efecto, los términos proporcionales a las restantes matrices de Pauli son soluciones

de ecuaciones homogéneas, que podrán agregarse de ser necesario. A partir de ahora se evitará la mención del índice de isospin.

Se utiliza para las matrices de Dirac la notación

$$\begin{aligned}\gamma^0 &= i \begin{pmatrix} \mathcal{I} & 0 \\ 0 & -\mathcal{I} \end{pmatrix} = i\rho^3 \otimes \mathcal{I}_2 & \vec{\gamma} &= \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ -\vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix} = i\rho^2 \otimes \vec{\sigma} \\ \gamma^5 &= \begin{pmatrix} 0 & \mathcal{I} \\ \mathcal{I} & 0 \end{pmatrix} = \rho^1 \otimes \mathcal{I}_2,\end{aligned}\tag{B.4}$$

donde se sugiere la descomposición en $SU(2)_\rho \otimes SU(2)_\sigma$

La función de Green puede construirse considerando la solución del problema inhomogéneo en todo el espacio, más una solución del problema homogéneo elegida de modo que se satisfagan las condiciones de contorno. De este modo se propone

$$G(\vec{x}, \vec{x}'; \omega_n) = S^0(\vec{x}, \vec{x}'; \omega_n) + \tilde{S}(\vec{x}, \vec{x}'; \omega_n),\tag{B.5}$$

donde, en virtud de la descomposición introducida para las matrices de Dirac,

$$\begin{aligned}S^0(\vec{x}, \vec{x}'; \omega_n) &= \sum_{k=0}^3 \rho^k \otimes A^k(\vec{x}, \vec{x}'; \omega_n) \\ \tilde{S}(\vec{x}, \vec{x}'; \omega_n) &= \sum_{k=0}^3 \rho^k \otimes a^k(\vec{x}, \vec{x}'; \omega_n).\end{aligned}$$

La ecuación inhomogénea da lugar al sistema

$$\begin{cases} i\omega_n A^3 - \vec{\sigma} \cdot \vec{\nabla} A^2 = \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}') \mathcal{I} \\ i\omega_n A^2 + \vec{\sigma} \cdot \vec{\nabla} A^3 = 0 \\ i\omega_n A^1 + i\vec{\sigma} \cdot \vec{\nabla} A^0 = 0 \\ i\omega_n A^0 + i\vec{\sigma} \cdot \vec{\nabla} A^1 = 0 \end{cases},\tag{B.6}$$

de donde se obtienen ecuaciones de Helmholtz.

Resulta $A^0 = A^1 = 0$, debido a la ausencia de inhomogeneidad (y a que se buscan soluciones regulares en todo el espacio). Para las restantes

$$(\nabla^2 - \omega_n^2) A^3(\vec{x}, \vec{x}'; \omega_n) = i\omega_n \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}') \mathcal{I}\tag{B.7}$$

$$A^2(\vec{x}, \vec{x}'; \omega_n) = -\frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{\nabla}}{i\omega_n} A^3(\vec{x}, \vec{x}'; \omega_n).\tag{B.8}$$

En la base de los armónicos esféricos spinoriales

$$A^3(\vec{x}, \vec{x}'; \omega_n) = \sum_{j=1/2}^{\infty} \sum_{l=j-1/2}^{j+1/2} \sum_{l'=j-1/2}^{j+1/2} \sum_{m=-j}^j A_{jll'm}^3(r, r'; \omega_n) \Phi_{jlm}(\Omega) \Phi_{j'l'm}^\dagger(\Omega').\tag{B.9}$$

Introduciendo en la ecuación (B.7) se obtiene

$$A_{jll'}^3 = iS_n \omega_n^2 \delta_{ll'} f_l(i|\omega_n|r) f_{l'}(i|\omega_n|r'), \quad (\text{B.10})$$

donde se ha definido

$$f_l(i|\omega_n|r) = j_l(i|\omega_n|r)H(r' - r) + h_l^{(1)}(i|\omega_n|r)H(r - r').$$

Para determinar A^2 a partir de (B.8) conviene hacer uso de la relación

$$\frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{\nabla}}{\omega_n} g_l(i|\omega_n|r) \Phi_{jlm}(\Omega) = -iS_n g_{\bar{l}}(i|\omega_n|r) \Phi_{j\bar{l}m}(\Omega), \quad (\text{B.11})$$

donde g es cualquier función esférica de Bessel y \bar{l} corresponde a la paridad opuesta a l . Se obtiene

$$A^2(\vec{x}, \vec{x}'; \omega_n) = \sum_{j=1/2}^{\infty} \sum_{l=j-1/2}^{j+1/2} \sum_{l'=j-1/2}^{j+1/2} \sum_{m=-j}^j A_{jll'm}^2(r, r'; \omega_n) \Phi_{jlm}(\Omega) \Phi_{j'l'm}^\dagger(\Omega'), \quad (\text{B.12})$$

donde los coeficientes son

$$A_{jll'}^2 = -\omega_n^2 |l - l'| f_l(i|\omega_n|r) f_{l'}(i|\omega_n|r'). \quad (\text{B.13})$$

Para completar la función de Green hay que determinar la solución del problema homogéneo que asegura el cumplimiento de las condiciones de contorno. Las ecuaciones correspondientes a los coeficientes a^i son

$$\begin{cases} i\omega_n a^3 - \vec{\sigma} \cdot \vec{\nabla} a^2 = 0 \\ i\omega_n a^2 + \vec{\sigma} \cdot \vec{\nabla} a^3 = 0 \\ i\omega_n a^1 + i\vec{\sigma} \cdot \vec{\nabla} a^0 = 0 \\ i\omega_n a^0 + i\vec{\sigma} \cdot \vec{\nabla} a^1 = 0 \end{cases}, \quad (\text{B.14})$$

definidos para $r, r' \leq R$.

Se propone

$$\begin{aligned} & a^k(\vec{x}, \vec{x}'; \omega_n) \\ &= \sum_{j=1/2}^{\infty} \sum_{l=j-1/2}^{j+1/2} \sum_{l'=j-1/2}^{j+1/2} \sum_{m=-j}^j C_{jll'm}^k j_l(i|\omega_n|r) j_{l'}(i|\omega_n|r') \Phi_{jlm}(\Omega) \Phi_{j'l'm}^\dagger(\Omega'), \end{aligned} \quad (\text{B.15})$$

regular en el interior de la cavidad.

De la ecuación diferencial homogénea se obtiene

$$C_{jll'}^2 = iS_n C_{jll'}^3 \quad C_{jll'}^1 = -S_n C_{jll'}^0, \quad (\text{B.16})$$

mientras que de la imposición de las condiciones de contorno

$$C_{jll'}^0 j_{\bar{l}}(ix) i^{l-\bar{l}} - C_{jll'}^2 j_l(ix) + \omega^2 |l - l'| h_l^{(1)}(ix) = 0 \quad (\text{B.17})$$

$$C_{j\bar{l}}^1 j_{\bar{l}}(ix) i^{l-\bar{l}} - i C_{j\bar{l}'}^3 j_{\bar{l}'}(ix) + S_n \omega^2 \delta_{\bar{l}l'} h_l^{(1)}(ix) = 0, \quad (\text{B.18})$$

donde se introdujo $x = |\omega_n| R$.

Despejando los coeficientes se obtiene

$$C_{j\bar{l}l'}^0 = -i^{\bar{l}-l} \omega_n^2 \delta_{\bar{l}l'} d_j(ix) \quad (\text{B.19})$$

$$C_{j\bar{l}l'}^1 = -i^{\bar{l}-l} S_n \omega_n^2 \delta_{\bar{l}l'} d_j(ix) \quad (\text{B.20})$$

$$C_{j\bar{l}l'}^2 = \omega_n^2 \delta_{\bar{l}l'} c_j(ix) \quad (\text{B.21})$$

$$C_{j\bar{l}l'}^3 = -i S_n \omega_n^2 \delta_{\bar{l}l'} c_j(ix), \quad (\text{B.22})$$

donde se definió

$$c_j(ix) = \frac{j_{j-1/2}(ix) h_{j-1/2}^{(1)}(ix) - j_{j+1/2}(ix) h_{j+1/2}^{(1)}(ix)}{j_{j-1/2}^2(ix) - j_{j+1/2}^2(ix)} \quad (\text{B.23})$$

$$d_j(ix) = \frac{\frac{i}{(ix)^2}}{j_{j-1/2}^2(ix) - j_{j+1/2}^2(ix)}. \quad (\text{B.24})$$

Por último, introduciendo la notación

$$\Phi_{jlm}(\Omega) = \langle \Omega | jlm \rangle, \quad (\text{B.25})$$

la función de Green completa se escribe

$$\begin{aligned} G(\vec{x}, \vec{x}'; \tau) &= \frac{1}{\beta} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-i\omega_n \tau} G(\vec{x}, \vec{x}'; \omega_n), \\ G(\vec{x}, \vec{x}'; \omega_n) &= \sum_{j=1/2}^{\infty} \sum_{l=j-1/2}^{j+1/2} \sum_{l'=j-1/2}^{j+1/2} \sum_{m=-j}^j \tau^0 \otimes \{ \\ &\quad \rho^0 \otimes (-i^{\bar{l}-l} \omega_n^2 \delta_{\bar{l}l'} d_j(ix) j_l(i|\omega_n|r) j_{l'}(i|\omega_n|r')) \\ &\quad + \rho^1 \otimes (-i^{\bar{l}-l} S_n \omega_n^2 \delta_{\bar{l}l'} d_j(ix) j_l(i|\omega_n|r) j_{l'}(i|\omega_n|r')) \\ &\quad + \rho^2 \otimes [\omega_n^2 \delta_{\bar{l}l'} c_j(ix) j_l(i|\omega_n|r) j_{l'}(i|\omega_n|r') - \omega_n^2 \delta_{\bar{l}l'} f_l(i|\omega_n|r) f_{l'}(i|\omega_n|r')] \\ &\quad + \rho^3 \otimes [-i S_n \omega_n^2 \delta_{\bar{l}l'} c_j(ix) j_l(i|\omega_n|r) j_{l'}(i|\omega_n|r') \\ &\quad + i S_n \omega_n^2 \delta_{\bar{l}l'} f_l(i|\omega_n|r) f_{l'}(i|\omega_n|r')] \} \\ &\quad \times |jlm\rangle \langle j'l'm|. \end{aligned} \quad (\text{B.26})$$

De acuerdo a la expresión (3.45), interesan los términos de $G(\vec{x}, \vec{x}'; \omega_n) \gamma^0$ de traza matricial no nula. Por ser $\gamma^0 = i\rho^3 \otimes \mathcal{I}$, sólo el último término de (B.26) contribuye a la traza de interés

$$\begin{aligned} \text{Tr} \left[G(\vec{x}, \vec{x}'; \omega_n) \gamma^0 \right] &= -2S_n \omega_n^2 \sum_{j=1/2}^{\infty} \sum_{m=-j}^j \int_0^{\infty} r^2 dr \\ &\times \left\{ \left[j_{j+1/2}(i|\omega_n|r) h_{j+1/2}^{(1)}(i|\omega_n|r) - c_j(ix) j_{j+1/2}^2(i|\omega_n|r) \right] \right. \\ &\left. + \left[j_{j-1/2}(i|\omega_n|r) h_{j-1/2}^{(1)}(i|\omega_n|r) - c_j(ix) j_{j-1/2}^2(i|\omega_n|r) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (\text{B.27})$$

Para terminar la construcción de la traza deben resolverse las integrales radiales. Una vez hecho ésto así como las sumas en el índice m , simples cambios de notación ($j \rightarrow j+1/2$, el pasaje a funciones de Bessel modificadas y la introducción de la derivada logarítmica) conducen a la expresión (3.48).

B.2 Función de Green para el campo vectorial

Según se ha señalado en la Sección 3.3 las diferentes componentes de la función de Green puede tratarse separadamente. Por un lado, la componente tiempo-tiempo corresponde a la función de Green de un campo escalar con condiciones de contorno tipo Neumann. Como esta resulta un caso particular de lo calculado en la Sección 3.1, se estudiará aquí el problema de las componentes espaciales.

Para ellas

$$\left\{ \begin{array}{l} (\partial^2 \otimes \mathcal{I}_4) \mathbf{G}(x, x') = \delta(\tau - \tau') \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}') \mathcal{I}_3 \\ P_{\perp} \mathbf{G}(\vec{\alpha}, x') = 0 \\ \left(1 + R \frac{\partial}{\partial n}\right) P_{\parallel} \mathbf{G}(\vec{\alpha}, x') = 0 \\ \text{Periodicidad en } [0, \beta] \end{array} \right. , \quad (\text{B.28})$$

donde P_{\perp} y P_{\parallel} corresponde a los proyectores perpendicular y paralelo a la superficie de la esfera.

Se propone, utilizando la periodicidad asociada a sistemas bosónicos,

$$\mathbf{G}(x, x') = \frac{1}{\beta} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-i\omega_n(\tau-\tau')} \mathbf{G}(\vec{x}, \vec{x}'; \omega_n), \quad (\text{B.29})$$

donde

$$\omega_n = \frac{2\pi n}{\beta}.$$

Al igual que en los casos precedentes, se construye la función de Green a partir de

$$\mathbf{G}(\vec{x}, \vec{x}'; \omega_n) = G^{(0)}(\vec{x}, \vec{x}'; \omega_n) + \tilde{G}(\vec{x}, \vec{x}'; \omega_n), \quad (\text{B.30})$$

donde el primer término corresponde a una solución del problema inhomogeneo en todo el espacio, mientras que el segundo es solución de la ecuación homogénea y se ajusta de modo que se cumplan las condiciones de contorno.

Conviene en este caso utilizar la base de los armónicos esféricos vectoriales. Sin entrar en detalles algebraicos, las componentes espectrales de la función de Green espacial se escriben

$$\begin{aligned} \mathbf{G} = & |j = 0, l = 1, m = 0\rangle \mathcal{G}_{010}^{010}(r, r') \langle j = 0, l = 1, m = 0| \\ & + \sum_{j, j'=1}^{\infty} \sum_{m=-j}^j \sum_{m'=-j'}^{j'} \sum_{l=j-1}^{j+1} \sum_{l'=j'-1}^{j'+1} |j, l, m\rangle \mathcal{G}_{j'l'm'}^{jlm}(r, r') \langle j'l'm'|, \end{aligned} \quad (\text{B.31})$$

donde

$$\begin{aligned} & \mathcal{G}_{010}^{010}(r, r') \\ = & S_n \omega_n \left[j_1(i|\omega_n|r_{<}) h_1^{(1)}(i|\omega_n|r_{>}) - \frac{h_0^{(1)'}(ix)}{j_0'(ix)} j_1(i|\omega_n|r) j_1(i|\omega_n|r') \right], \end{aligned} \quad (\text{B.32})$$

mientras que

$$\begin{aligned} & \mathcal{G}_{j'l'm'}^{jlm}(r, r') \\ = & \delta_{jj'} \delta_{mm'} S_n \omega_n \left[\delta_{ll'} j_l(i|\omega_n|r_{<}) h_{l'}^{(1)}(i|\omega_n|r_{>}) \right. \\ & \left. - \left(a_j^{\text{TM}}(ix) Q_{jll'}^{\text{TM}} + a_j^{\text{L}}(ix) Q_{jll'}^{\text{L}} + a_j^{\text{TE}}(ix) Q_{jll'}^{\text{TE}} \right) j_l(i|\omega_n|r) j_{l'}(i|\omega_n|r') \right]. \end{aligned} \quad (\text{B.33})$$

En la expresión anterior se han separado los modos transversal eléctrico, transversal magnético y longitudinal. Para ellos, los coeficientes de ajuste de las condiciones de contorno son

$$a_j^{\text{TM}} = \frac{h_j^{(1)}(ix)}{j_j(ix)} \quad a_j^{\text{L}} = \frac{h_j^{(1)'}(ix)}{j_j'(ix)} \quad a_j^{\text{TE}} = \frac{h_j^{(1)}(ix) + ix h_j^{(1)'}}{j_j(ix) + ix j_j'(ix)}, \quad (\text{B.34})$$

que acompañan, en cada caso, a las matrices que definen los modos

$$\begin{aligned} Q_j^{\text{TM}} &= \frac{1}{2j+1} \begin{pmatrix} j+1 & 0 & -\sqrt{j(j+1)} \\ 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{j(j+1)} & 0 & j \end{pmatrix} \\ Q_j^{\text{L}} &= \frac{1}{2j+1} \begin{pmatrix} j & 0 & \sqrt{j(j+1)} \\ 0 & 0 & 0 \\ -\sqrt{j(j+1)} & 0 & j+1 \end{pmatrix} \\ Q_j^{\text{TE}} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (\text{B.35})$$

Agradecimientos

- A Horacio A. Falomir y Eve Mariel Santangelo, quienes aportaron comprensión, paciencia y estímulo durante estos años de trabajo. Sin sus invaluable contribuciones y enseñanzas esta tesis no hubiera sido posible.
- A los amigos que construyeron el ambiente de trabajo: Quique, Osvaldo, Martín, Daniel (Tum) y tantos otros en el Departamento de Física
- A Mamá, Abuela, Fernanda y Verónica, que supieron valorar y soportar la importancia que este trabajo tenía para mí
- A Alejandra, a quien este trabajo está dedicado, que sin lugar a dudas entiende todo lo referido a esta tesis, lo escrito y lo presente en el blanco del interlineado.

El presente trabajo de tesis ha sido realizado durante el desempeño de Becas de Iniciación y Perfeccionamiento del CONICET.

Bibliografía

- [1] H. B. G. Casimir. *Proc. K. Ned. Acad. Wet.*, 51:793, 1948.
- [2] O. Barraza, H. Falomir, , R. E. Gamboa Saraví and E. M. Santangelo. P-determinants and boundary values. *Journal of Mathematical Physics*, 33(6):2046–2052, 1992.
- [3] R. Forman. Functional determinants and geometry. *Inventiones Mathematicae*, 88:447–493, 1987.
- [4] E. Witten. Current Algebra, Baryons and Quark confinement. *Nuclear Physics*, 223B:433–444, 1983.
- [5] G. S. Adkins, C. R. Nappi, and E. Witten. Static properties of nucleons in the Skyrme model. *Nuclear Physics*, 228B:552–566, 1983.
- [6] M. Rho, A. S. Goldhaber, and G. E. Brown. Topological Soliton Bag Model for Baryons. *Physical Review Letters*, 51(9):747–750, 1983.
- [7] G. E. Brown, A. D. Jackson, M. Rho, and V. Vento. The nucleon as a topological chiral soliton. *Physics Letters*, 140B(5,6):285–289, 1984.
- [8] R. Seeley. Analytic extension of trace associated with elliptic boundary problem. *American Journal of Mathematics*, 91:963–983, 1969.
- [9] S. Agmon. *Lectures on Elliptic Boundary Value Problems*. Van Nostrand, 1965.
- [10] B. Simon. *Trace Ideals and their applications*. Cambridge University Press, 1979.
- [11] O. Barraza. P-determinant Regularization Method for Elliptic Boundary Problems. *Communications in Mathematical Physics*, 163:395–414, 1994.
- [12] G. W. Gibbons. Thermal zeta functions. *Physics Letters*, 60A(5):385–386, 1977.
- [13] R. L. Kobes, G. W. Semenoff, and N. Weiss. *Zeitschrift für Physik*, C29:371, 1985.

- [14] T. H. R. Skyrme. A unified field theory of mesons and baryons. *Nuclear Physics*, 31:556–569, 1962.
- [15] M. De Francia, H. Falomir, and E. M. Santangelo. Free energy of a four dimensional chiral bag. *Physical Review*, 45D(6):2129–2139, 1992.
- [16] A. Chodos, R. L. Jaffe, C. B. Thorn, and V. Weisskopf. New extended model of hadrons. *Physical Review*, 9D(12):3471–3495, 1974.
- [17] M. Jezabeck. Anomalous Charges of Fermionic Vacuum in Chiral Bags. *Acta Physica Polonica*, 1988.
- [18] M. Abramowitz and I. Stegun. *Handbook of Mathematical Functions*. Dover Publications, 1970.
- [19] I. Zahed, A. Wirzba, and U-G. Meissner. Chiral Vacuum effects in a Topological Bag Model of the Light Baryons. *Annals of Physics*, 165:406–440, 1985.
- [20] I. S. Gradshteyn and I. M. Ryzhik. *Table of integrals, series and products*. Academic Press, 1980.
- [21] R. T. Seeley. *Am. Math. Soc. Proc. Symp. Pure Math.*, 10:288, 1967.
- [22] R. E. Gamboa Saraví, M. A. Muschietti, F. A. Schaposnik, and J. E. Solomin. *Annals of Physics*, 157:360, 1984.
- [23] R. T. Seeley. *Am. J. Math.*, 91:889–920 y 963–983, 1969.
- [24] R. E. Gamboa Saraví, M. A. Muschietti, F. A. Schaposnik, and J. E. Solomin. *Journal of Mathematical Physics*, 26:2045, 1985.
- [25] H. Falomir, M. A. Muschietti, and E. M. Santangelo. Fermionic determinants for chiral–bag–like two–dimensional systems. *Journal of Mathematical Physics*, 31:989–996, 1990.
- [26] H. Falomir, R. E. Gamboa Saraví, M. A. Muschietti, E. M. Santangelo, and J. E. Solomín. Determinants of Dirac operators with local boundary conditions. Private communication.
- [27] H. Falomir and E. M. Santangelo. Free energy of twisted fermions in a non-standard approach. *Physical Review*, 42D(2), 590–593.
- [28] H. Falomir, M. A. Muschietti, and E. M. Santangelo. The Cheshire–Cat phenomenon in two–dimensional models. *Physics Letters*, 205B(1):93–96, 1988.
- [29] P. Hasenfratz and J. Kuti. The quark bag model. *Physics Reports*, 40(2):76–179, 1978.

- [30] C. M. Bender and P. Hays. Zero-Point energy of fields in a finite volume. *Physical Review*, 14D(10):2622–2632, 1976.
- [31] K. Milton. Zero-Point energy of confined fermions. *Physical Review*, 22D(6):1444–1451, 1980.
- [32] K. Milton. Zero-Point energy in bag models. *Physical Review*, 22D(6):1441–1443, 1980.
- [33] M. De Francia. Energía libre de un campo bosónico confinado. *Anales de la Asociación Física Argentina*, en prensa, 1993.
- [34] M. De Francia. Free energy for massless confined fields. *Physical Review*, 50D:2908–2919, 1994.
- [35] T. H. Hansson and R. L. Jaffe. Cavity quantum chromodynamics. *Physical Review*, 28D(4):882–907, 1983.
- [36] J. Cleymans, R. V. Gavai, and E. Suhonen. Quarks and Gluons at High Temperatures and Densities. *Physics Reports*, 130(4):217–292, 1986.
- [37] R. Balian and C. Bloch. Distribution of Eigenfrequencies for the Wave Equation in a Finite Domain I. Three-Dimensional Problem with Smooth Boundary Surface. *Annals of Physics*, 60:401–447, 1970.
- [38] S. Blau, M. Visser, and A. Wipf. Zeta Functions and the Casimir Energy. *Nuclear Physics*, 310B(1):163–180, 1988.
- [39] H.-T. Heltze and W. Greiner. *Physics Letters*, 179B:385, 1986.
- [40] I. Mardor and B. Svetitsky. Bubble free energy at the quark-hadron phase transition. *Physical Review*, 44D(3):878–886, 1991.
- [41] C. Itzykson and J-B. Zuber. *Quantum Field Theory*. McGraw – Hill, 1980.
- [42] C. Peterson, T. H. Hanson, and K. Johnson. Loop diagrams in boxes. *Physical Review*, 26D(2):415–428, 1982.
- [43] R. Balian and C. Bloch. *Annals of Physics (N.Y.)*, 64:271, 1971.
- [44] L. Vepstas, A. A. Jackson, and A. S. Goldhaber. Two-Phase models of baryons and the chiral Casimir effect. *Physics Letters*, 140B(5,6):280–284, 1984.
- [45] A. Chodos and C. B. Thorn. Chiral invariance in a bag theory. *Physical Review*, 12D(9):2733–2743, 1975.

- [46] T. DeGrand, R. L. Jaffe, K. Johnson, and J. Kiskis. Masses and other parameters of the light hadrons. *Physical Review*, 12D(7):2060–2076, 1975.
- [47] M. G. Mustafa and A. Ansari. Finite size effects on bag thermodynamics and quark-gluon deconfinement phase transition. *Zeitschrift für Physik*, 57C:51–57, 1993.
- [48] L. P. Czernai and J. I. Kapusta. Dynamics of the Q. C. D. Phase Transition. *Physical Review Letters*, 69(5):737–740, 1992.
- [49] R. F. Alvarez-Estrada, F. Fernandez, J. L. Sánchez-Gomez, and V. Vento. *Models of Hadron Structure Based on Quantum Chromodynamics*, volume 259 of *Lecture Notes in Physics*. Springer-Verlag, 1986.
- [50] G. t’Hooft. *Nuclear Physics*, 33B:173, 1971.
- [51] G. t’Hooft. *Nuclear Physics*, 35B:167, 1971.
- [52] D. J. Gross and F. Wilczek. *Physical Review Letters*, 30:1343, 1973.
- [53] H. D. Politzer. *Physical Review Letters*, 30:1346, 1973.
- [54] K. Johnson. The M.I.T. bag model. *Acta Physica Polonica*, B6(6):865–892, 1975.
- [55] L. Vepstas and A. D. Jackson. Justifying the chiral bag. *Physics Reports*, 187(3):109–143, 1990.
- [56] T. H. R. Skyrme. A non-linear field theory. *Proceedings of the Royal Society*, 260:127–138, 1961.
- [57] M. Rho. Cheshire Cat Hadrons. *Physics Reports*, 240(1,2):1–142, 1994.
- [58] M. F. Atiyah and N. S. Manton. Skyrmions from instantons. *Physics Letters*, 222(3,4):438–442, 1989.
- [59] K. J. Eskola y K. Kajantie. Thermal Skyrmion-like configuration. *Zeitschrift für Physik*, C44:347–348, 1989.
- [60] J. Goldstone and R. L. Jaffe. Baryon number in Chiral Bag Models. *Physical Review Letters*, 51(17):1518–1521, 1983.
- [61] P. J. Mulders. Theoretical aspects of hybrid chiral bag models. *Physical Review*, 30D(5):1073–1083, 1984.
- [62] E. Witten. *Communications in Mathematical Physics*, 92:455–No se, 1984.

- [63] R. E. Gamboa Saraví, F. A. Schaposnik, and J. E. Solomín. Path integral formulation of two dimensional gauge theories with massless fermions. *Nuclear Physics*, B185:239–253, 1981.
- [64] H. Falomir, M. Loewe, and J. C. Rojas. Hybrid models at finite temperature and deconfinement. *Physics Letters*, 300(3):278–282, 1993.
- [65] M. Loewe and S. Perez-Oyarzún. On the Finite Size of the Bag and the Critical Deconfining Temperature in Hybrid models. *Physics Letters*, 322B:413–418, 1994.
- [66] E. V. Shuryak. *Physics Reports*, 61:73, 1980.
- [67] M. De Francia, H. Falomir, M. Loewe, and E. M. Santangelo. Confined two-dimensional fermions at finite density. *Physical Review*, 51(12):7132–7139, 1995.
- [68] A. Actor. *Physical Review*, 27D:2548, 1983.
- [69] A. Actor. *Physics Letters*, 175B:53, 1985.
- [70] H. A. Weldon. *Nuclear Physics*, 270B:79, 1986.
- [71] M. De Francia and O. Trabocchi. Aproximación en reflexiones múltiples de un modelo fermiónico simple. *Anales de la Asociación Física Argentina*, 2:87, 1990.
- [72] Paul Guinsparg. *Fields, Strings and Critical Phenomena*. Les Houches, France, 1988. Les Houches Summer School - Vol. 49, Elsevier, Amsterdam, 1989.