



UNIVERSIDAD NACIONAL DE LA PLATA
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS
DEPARTAMENTO DE FÍSICA

Trabajo de Tesis Doctoral

**Estructura algebraica de sistemas cuánticos
en espacios de fases no-conmutativos**

Lic. Federico Gaspar Vega

Director: Dr. H. Falomir
Codirector: Dr. P.A.G. Pisani

2015

Estructura algebraica de sistemas cuánticos en espacios de fases no-conmutativos

El presente trabajo ha sido realizado en el *Instituto de Física La Plata* de la *Universidad Nacional de La Plata* bajo la dirección y co-dirección del Dr. Falomir Horacio A. y del Dr. Pisani Gonzalez Pisani Pablo A. respectivamente y a través de una beca doctoral otorgada por el *CONICET*.

Memoria presentada por el Lic. Vega Federico G. para optar por el grado de Doctor en Ciencias (especialidad en Física) por la *Universidad Nacional de La Plata*.

La Plata, Agosto 2015.

A mis padres

Resumen

El presente trabajo ha tenido como objetivo explorar las propiedades de modelos cuánticos bidimensionales definidos sobre dos tipos de espacios de fase no-conmutativos: el primero de ellos con parámetros de no-conmutatividad constantes en el espacio de fases, lo que rompe la invariancia de Lorentz, mientras que en el segundo caso la no-conmutatividad es inducida por el corrimiento de las variables canónicas mediante la suma directa de generadores de una representación unitaria irreducible del grupo de Lorentz, preservando así esa simetría.

En primer lugar, analizamos modelos bidimensionales no relativistas con parámetros de no-conmutatividad constantes (tanto en el espacio de coordenadas como en el de momentos), haciendo especial énfasis en el caso de potenciales centrales. Para ello consideramos el generador de las rotaciones sobre los planos de coordenadas y de momentos y el álgebra de Lie generada por las formas cuadráticas en las variables dinámicas invariantes frente a rotaciones, mostrando que el problema de autovalores de tales Hamiltonianos siempre puede ser referido al espacio de representación de las representaciones unitarias irreducibles de los grupos $SL(2, \mathbb{R})$ o $SU(2)$, según sea la relación entre los parámetros de no-conmutatividad. La existencia de dos fases cuánticas para estos sistemas había sido encontrada en [1], donde se empleó una realización lineal de las variables dinámicas en términos de operadores de creación y destrucción. Nuestro aporte muestra que esa estructura algebraica es independiente de la realización particular de las variables dinámicas no-conmutativas utilizada y está determinada sólo por las relaciones de conmutación entre ellas. En ese contexto, discutimos explícitamente interacciones cuadráticas tales como el oscilador armónico y el problema de Landau y, utilizando el desarrollo espectral de potenciales centrales, estudiamos el pozo circular (finito e infinito) en el plano no-conmutativo con el fin de introducir un borde en ese espacio difuso.

En segundo lugar, consideramos modelos de una partícula en un espacio de Minkowski de $(2+1)$ dimensiones dotado de una no-conmutatividad no-standard, que puede considerarse inducida por el corrimiento de variables canónicas de coordenadas y momento mediante la suma directa de generadores de una representación unitaria irreducible de $SL(2, \mathbb{R})$, grupo de Lorentz de ese espacio. Esta definición fue interpretada en el contexto de la descomposición de Levi del álgebra deformada que satisfacen las variables dinámicas no-conmutativas. En ese contexto, se estudió el problema de Landau y del oscilador armónico, tanto para partículas de Schrödinger como de Dirac, cuyos Hamiltonianos fueron obtenidos a través del corrimiento de Bopp no abeliano antes descrito a partir del problema usual en el plano conmutativo. Los espectros para estos modelos se estudiaron a través de teoría de perturbaciones tanto para pequeños como para grandes parámetros de no-conmutatividad.

Mientras que en el espacio conmutativo usual el problema de Landau se reduce al de un oscilador armónico con un término de momento angular, en este espacio no conmutativo la extensión es no trivial ya que \hat{L}_μ tiene una estructura interna dada por los generadores de $SL(2, \mathbb{R})$.

Cabe señalar que en estos modelos no se encuentra una relación entre los parámetros de no-conmutatividad entre coordenadas y entre momentos, sino que ambos juegan un rol similar. Además, como los espacios de representación de las representaciones unitarias irreducibles de $SL(2, \mathbb{R})$ pueden ser realizados en términos de funciones de cuadrado integrable de una variable, se concluye que estos sistemas son equivalentes a modelos cuánticos de partículas que viven en un espacio con una dimensión compacta adicional.

Agradecimientos

Este trabajo de tesis, realizado en la Universidad Nacional La Plata, ha sido el resultado del esfuerzo directo e indirecto de varias personas quienes con su paciencia ineludible han logrado lo imposible.

En lo académico, quisiera enfatizar mi sincero agradecimiento al director de la presente, Dr. Horacio Falomir, por su valiosa dirección, apoyo y paciencia ante mis inconsistencias a lo largo de estos 5 años, sin su tenacidad el presente trabajo jamás hubiera visto la luz. Aprovecho para hacer extensivo este agradecimiento al equipo de físico matemática del **IFLP** por su apoyo, a la **UNLP** por brindar el marco académico que permitió mi formación y al **CONICET** por facilitarme los medios económicos para poder solventarla.

En el mismo marco agradezco a Schaposnik Fidel, Nuñez Carmen y Lozano Gustavo por haber aceptado formar parte del jurado de la presente tesis.

En lo personal, a mi familia (mis padres y coco) a quienes le dedico esta tesis. El lenguaje resulta insuficiente para expresar mi gratitud a estos superhéroes. Sus esfuerzos, más allá que quién lo recibe lo merezca, es la única forma de comprender mis humildes logros.

Al mismo tiempo, es mi deseo agradecer a los amigos que siempre están y a quién me acompañó de cerca estos años, por darle color a este extraño viaje que llamamos vida.

Índice

I	INTRODUCCIÓN A LAS TEORÍAS NO-CONMUTATIVAS	1
1.	Introducción Física	2
2.	Introducción Matemática	8
	Sistemas físicos	8
	Mecánica clásica	8
	Cuantización por deformación y Mecánica Cuántica	18
	Violación de invariancia de Lorentz y espacio de Snyder	24
II	ESTRUCTURA ALGEBRAICA	27
3.	Introducción	28
4.	El espacio de fases no-conmutativo en 2 dimensiones	28
5.	Simetrías discretas para $\kappa < \kappa_c$	29
	Inversión temporal	29
	Paridad	31
	Definición alternativa de las transformaciones discretas	32
6.	Simetrías discretas para $\kappa > \kappa_c$	33
7.	Estructura algebraica de Hamiltonianos con potenciales centrales	34
	El caso $0 < \kappa < \kappa_c$	34
	El caso $\kappa < 0$	37
	El caso $\kappa > \kappa_c$	38
8.	El oscilador armónico isótropo	40
	El oscilador armónico isótropo para $\kappa > \kappa_c$	41
	El oscilador armónico isótropo para $0 < \kappa < \kappa_c$	42
	El oscilador armónico isótropo para $\kappa < 0$	44
9.	El problema de Landau	45
	El problema de Landau para $\kappa > \kappa_c$	45
	El problema de Landau para $0 < \kappa < \kappa_c$	46
	El problema de Landau para $\kappa < 0$	48
10.	Hamiltonianos con potenciales centrales	49
	El caso $\kappa > \kappa_c$	49
	El caso $0 < \kappa < \kappa_c$	49
	El caso $\kappa < 0$	50

11.El pozo de potencial circular	51
El caso $\kappa > \kappa_c$	51
El caso $0 < \kappa < \kappa_c$	55
El caso $\kappa < 0$	61
12. Conclusiones	64
III NO-COMMUTATIVIDAD EN (2+1) Y EL GRUPO DE LORENTZ	67
13.Introducción	68
14.Estableciendo el problema	69
Algoritmo para calcular la descomposición de Levi	70
15.Modelo de Landau para partículas de Schrödinger	72
Caso conmutativo usual	72
Extensión al espacio no-conmutativo	73
Espectro obtenido por teoría de perturbaciones	76
Para pequeños $ z $	76
Para grandes $ z $	77
16.Modelo de Landau para partículas de Dirac	78
Caso conmutativo usual	78
Extensión al espacio no-conmutativo	80
Espectro en teoría de perturbaciones	82
Para pequeños $ z $	82
Para grandes $ z $	83
17.Oscilador armónico para partículas de Schrödinger	84
Caso conmutativo usual	84
Extensión al espacio no-conmutativo	84
Espectro obtenido por teoría de perturbaciones	85
Para pequeños $ z $	85
Para grandes $ z $	86
18.Oscilador armónico de Dirac	87
19.Conclusiones	88
IV APÉNDICES	91
A. Geometría Simpléctica	92
B. El grupo de Lorentz en 1+2-dimensiones ($SL(2, \mathbb{R})$)	95
<i>irreps</i> de dimensión finita de $sl(2, \mathbb{R})$	96
<i>irreps</i> unitarias de $sl(2, \mathbb{R})$	96
Clases discretas: $\lambda + \frac{1}{4} \geq 0$	97

Clases continuas: $\lambda + \frac{1}{4} < 0$	98
C. Relación entre J^2 y \hat{L}^2 y entre \mathcal{J}^2 y \hat{L}^2	99
D. Transformaciones unitarias en $SL(2, \mathbb{R})$ y $SU(2)$	101
E. Más estructura algebraica	102
F. Realización lineal del álgebra no-conmutativa	104
Caso $\kappa < \kappa_c$	104
Caso $\kappa > \kappa_c$	106
<u>1. Ejemplos sencillos para la región $\kappa < \kappa_c$.</u>	107
<u>2. Ejemplos sencillos para la región $\kappa > \kappa_c$.</u>	110
G. El oscilador isótropo bidimensional	112

Parte I

Introducción a las teorías en espacios no-conmutativos

En esta primera parte de la tesis, daremos una introducción general a las teorías en espacios no conmutativos en matemática y física.

Comenzaremos explicando someramente el contexto en el cual surgen las primeras ideas de un espacio-tiempo discretizado y el interés actual en las mismas ideas, mencionando que estas estructuras aparecen en el marco del límite de bajas energías de la teoría de cuerdas, en el contexto de la materia condensada, cobrando relevancia en el estudio del efecto Hall, y como una estructura alternativa del mecanismo de Kaluza Klein (capítulo 1).

En segundo lugar haremos una breve introducción a la mecánica simpléctica viendo alguna de las consecuencias inmediatas de trabajar con un álgebra deformada de corchetes de Poisson en mecánica clásica. Posteriormente introduciremos el producto Moyal, lo que nos permitirá pasar a un marco cuántico, para finalmente discutir las limitaciones inherentes de una no-conmutatividad a parámetros constantes e introducir así el espacio de Snyder (capítulo 2).

1. INTRODUCCIÓN FÍSICA

En 1930 Heisenberg, con el fin de controlar las divergencias que plagaban la electrodinámica cuántica, propuso reemplazar el espacio-tiempo continuo por una estructura reticular [2]. Esta idea de un espacio de configuración difuso, donde la distancia mínima queda acotada por esa estructura efectiva en celdas, resulta particularmente interesante para las teorías cuánticas de campos, ya que introduce un *cut-off* que permitiría evitar, o al menos atenuar, el problema de las singularidades de corta distancia, conocidas como *divergencias ultravioletas* de la teoría. Esta propuesta fue discutida por Peierls, Pauli, Oppenheimer, entre otros y desarrollada principalmente por Snyder. Sin embargo las teorías de campos no-conmutativas no despertaron demasiado interés en sus orígenes. Por un lado, postular una relación de incerteza entre las coordenadas conduce a teorías no-locales con las dificultades que ellas conllevan. En segundo lugar, la introducción de una escala mínima no garantizaba la remoción de las divergencias de teoría de campos, puesto que una teoría no-conmutativa podría, en principio, tener las mismas divergencias que su contraparte conmutativa o aún peores. Por último, en aquella época subyacía la idea generalizada de que un espacio-tiempo discretizado implicaba aceptar el rompimiento de la invariancia de Lorentz [3, 4, 5].

Fue Snyder quien en 1947 introdujo por primera vez en un artículo titulado *Quantized Space Time* [6] una estructura espacio-temporal no-conmutativa que actuaba como un *cut-off* efectivo en teoría de campos preservando explícitamente la covarianza de Lorentz. En ella, las coordenadas espaciales son representadas mediante generadores de subgrupos compactos del grupo $SO(1, 4)$, grupo de simetrías de un espacio de de Sitter, presentando así un espectro discreto al tiempo que el resto de los generadores reproducen el álgebra del grupo de Lorentz de su proyección tetradimensional. Un año más tarde publicó, en el mismo contexto, un segundo artículo [7] delineando otros aspectos de la teoría. Sin embargo, este notable desarrollo no fue explorado por la comunidad científica ya que coincidió con los éxitos del *programa de renormalización* aplicado a la electrodinámica cuántica, el cual dio solución al control de las divergencias ultravioletas de la teoría permitiendo la predicción numérica de observables físicos con asombrosa exactitud, por lo que Snyder abandonó estas ideas y continuó sus investigaciones en otro tema.

Desde un punto de vista puramente matemático, Weierstrass abrió un nuevo camino en la geometría al estudiar directamente el conjunto de funciones complejas que satisfacen un álgebra particular y derivar el conjunto de puntos a partir de ellas.¹

Esta idea de reemplazar conjuntos de puntos por álgebras de funciones fue ampliada tiempo más tarde por von Neumann [8] quien introdujo el término *geometría no-conmutativa* para referirse de forma general a aquella en la cual el álgebra de funciones es reemplazada por un álgebra no-conmutativa.

Al igual que en la cuantización del espacio de fases clásico, las coordenadas son reemplazadas por los generadores de cierta álgebra, operadores Hermíticos que satisfacen reglas de conmutación

¹A modo de ejemplo supongamos que V es un conjunto de puntos con un número finito de elementos. Entonces el conjunto de funciones complejas definidas sobre V forma un álgebra conmutativa y asociativa de dimensión finita como un espacio vectorial. El producto de dos vectores viene dado por el producto de sus componentes y satisface la desigualdad $\|fg\| \leq \|f\| \|g\|$ con respecto a la norma $\|f\| = \max|f|$. Sea f^* el complejo conjugado de f , que satisface $\|ff^*\| = \|f\|^2$. Un álgebra normada con una operación de involución $f \rightarrow f^*$ que satisface las dos condiciones anteriores se la denomina una C^* -álgebra. De forma inversa cualquier álgebra finita dimensional conmutativa que sea una C^* -álgebra puede ser considerada como un álgebra de funciones sobre un conjunto finito de puntos donde el número de puntos está codificado en la dimensión del álgebra. Es esencial que el álgebra sea conmutativa para poder interpretarla como un álgebra de funciones sobre un conjunto de puntos.

no triviales. De ese modo, las coordenadas no pueden ser todas ellas diagonalizadas simultáneamente y el concepto usual de posición en el espacio deja de tener sentido. Así como la celda de Bohr reemplaza el concepto de punto sobre el espacio de fases clásico, la noción intuitiva adecuada para reemplazar al punto en esta geometrías no-conmutativas es la de una estructura reticular en el espacio de coordenadas. Pero, puesto que dicha estructura no es observada a escalas macroscópicas, las dimensiones lineales de la celda deben ser menores o comparables a la *longitud de Planck*, $\ell_p := \sqrt{\frac{\hbar G}{c^3}} = 1,6162 \times 10^{-35} m$, donde G es la constante de gravitación universal de Newton.

Por analogía con la Mecánica Cuántica, cuando se describe la *versión difusa* del espacio-tiempo, las cuatro coordenadas son representadas mediante operadores hermíticos definidos sobre un espacio de Hilbert que generan un álgebra no conmutativa, satisfaciendo relaciones de la forma

$$[x^\mu, x^\nu] = \imath \theta J^{\mu\nu}, \quad (1.1)$$

donde θ es un parámetro con dimensiones de longitud al cuadrado. La presencia del factor \imath en el lado derecho de la ecuación (1.1) implica que los $J^{\mu\nu}$ son también operadores hermíticos. Si estos operadores son no nulos, cada coordenada x^μ tendrá autovalores reales, pero no todas ellas podrán ser simultáneamente diagonalizadas, de modo que esas relaciones de conmutación conducen a un principio de incerteza análogo al de Heisenberg,

$$\Delta x^\mu \Delta x^\nu \geq \frac{\theta}{2} |\langle J^{\mu\nu} \rangle|, \quad (1.2)$$

quedando así el espacio-tiempo cuantizado en celdas cuyo volumen es del orden de $(2\pi\theta)^2$. De esta manera, la introducción de una longitud característica induciría un *cutoff* ultravioleta efectivo en el espacio de momentos,

$$\Lambda^2 \lesssim \frac{1}{\theta}. \quad (1.3)$$

Por otro lado, puesto que en el límite en que $\theta \rightarrow 0$ el álgebra de las coordenadas no-conmutativas (1.1) converge al álgebra de Heisenberg usual, resulta razonable pensar que esos operadores deberían de converger a las variables conmutativas usuales q^μ (operadores multiplicativos), a menos de una constante de normalización Z ,

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} x^\mu = Z q^\mu \quad (1.4)$$

Una consecuencia inmediata de (1.1), que se deduce de la identidad de Jacobi

$$[x^1, [x^2, p_1]] + [x^2, [p_1, x^1]] = \imath \theta [J^{12}, p_1], \quad (1.5)$$

es que a menos que J^{12} conmute con p_1 , los conmutadores $[x^1, p_1]$ y $[x^2, p_1]$ no pueden pertenecer simultáneamente al *centro* del álgebra \mathcal{A} generada por las coordenadas y los momentos. Por el contrario se tiene,

$$[x^i, p_j] = \imath \hbar (\delta_j^i + \theta A_j^i), \quad (1.6)$$

siendo A_j^i un elemento del álgebra \mathcal{A} que no pertenece al centro.

Pero la *geometría* es más que sólo una colección de puntos y, en consecuencia, se necesita más que sólo el álgebra para describirla. Alain Connes en los 80 resolvió este problema [9, 10], conjuntamente con otros matemáticos [11], introduciendo la noción de *geometría diferencial no-conmutativa* con su cálculo diferencial asociado. Así como es posible definir una estructura diferencial asociada a un

espacio topológico, también es posible asociar una estructura diferencial a una dada álgebra arbitraria. Las primeras aplicaciones físicas de estos desarrollos se basaron en interpretaciones geométricas del Modelo Standard, de sus campos y constantes de acoplamiento [10, 12]. Por otro lado, esta generalización no-conmutativa resultó ser esencial para explorar la relación entre Mecánica Cuántica y Mecánica Clásica. En efecto, así como el rol de la geometría simpléctica es actualmente un campo de gran importancia tanto en Matemática como en Física, que permite describir y modelar fenómenos naturales, las estructuras simplécticas no-conmutativas ofrecen un entorno promisorio para la construcción de teorías físicas.

Siguiendo con el lineamiento de las motivaciones matemáticas, la geometría no-conmutativa abrió la posibilidad del estudio de los llamados *grupos cuánticos*. Éste término denota varios tipos de álgebras no-conmutativas con una estructura adicional. Curiosamente, no son ni “grupos” ni “cuánticos”. El primer ejemplo fue encontrado por Kulish-Reshetikhin [13] y por Sklyanin [14]. Una descripción sistemática fue dada por Woronowicz [15] entre otros. Tiempo después, Wess-Zumino [16] construyen el cálculo diferencial en estos espacios cuánticos. La teoría de representación de grupos cuánticos es un campo de investigación activo desde el trabajo pionero de Woronowicz. Otro problema interesante es la relación entre el cálculo diferencial covariante bajo la (co-)acción de los grupos cuánticos y aquellas construidas a partir del formalismo de Connes.

Por otro lado, las dificultades que han impedido hasta el momento formular una teoría cuántica para la gravitación han renovado el interés en el estudio de geometrías no-conmutativas en las que la estructura del espacio-tiempo a cortas distancias no esté apropiadamente descrita por una variedad diferenciable. *En efecto, puesto que es necesario concentrar una energía del orden de $\hbar c/L$ para alcanzar una resolución de distancias de orden L , la energía necesaria para medir la estructura del espacio-tiempo con una precisión del orden de la escala de Planck es tal que en esa región se formaría un agujero negro microscópico con un radio de Schwarzschild del mismo orden de magnitud. En consecuencia, mejorar la precisión espacial más allá de la longitud de Planck requeriría una energía mayor a $\hbar c/\ell_p$ y como los agujeros negros crecen en tamaño al aumentar su energía, la consecuencia sería la formación de un agujero negro de tamaño mayor que la longitud de Planck, con lo que no se lograría mejorar la precisión. Esto significa que las fluctuaciones cuánticas que cambian la estructura geométrica e incluso topológica del espacio-tiempo, tales como agujeros negros microscópicos, son tan importantes como los gravitones y otras partículas cuando alcanzamos la escala de Planck. En otras palabras, las fluctuaciones cuánticas puramente gravitacionales adquieren la misma magnitud que las fluctuaciones cuánticas descritas por el modelo estandar, lo que sugiere que todas las interacciones de la Naturaleza están unificadas a distancias del orden de la escala de Planck. Así pues, resulta que la posibilidad de producir agujeros negros como fluctuaciones cuánticas pone un límite operativo al funcionamiento del microscopio de Heisenberg, ya que existirá una distancia efectiva mínima. Por esta razón, muchos físicos creen que la construcción de una teoría cuántica de la gravitación requerirá de un nuevo límite en la Naturaleza, en este caso en la escala de distancias.*

Por otro lado la aplicación de la mecánica cuántica a un agujero negro macroscópico produce resultados sorprendentes. Debido al carácter unidireccional del horizonte de sucesos resulta que un par partícula-antipartícula creado espontáneamente por una fluctuación cuántica puede perder uno de los componentes detrás del horizonte. El efecto neto de este proceso es una radiación emitida por el agujero negro que es alimentada por la energía del campo gravitacional y tiene una temperatura característica, llamada temperatura de Hawking, que es inversamente proporcional a la masa del

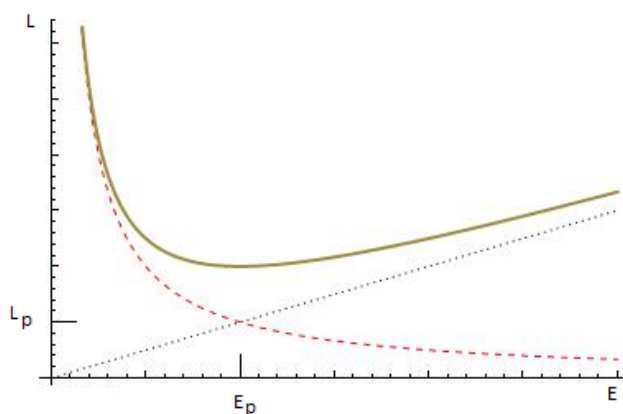


Figura 1: Una energía E permite alcanzar una resolución $L = hc/E$ (línea intermitente). De colapsar toda esa energía en un agujero negro, su tamaño aproximado sería $L = \ell_p^2 E / hc$ (línea de puntos). De combinar ambos efectos debería obtenerse un comportamiento como en el de la curva de trazo continuo cuyo mínimo estaría localizado en $L = \ell_p = \sqrt{G\hbar/c^3}$.

agujero negro. Aplicando argumentos generales de termodinámica, parecidos a los usados por Planck para el caso de la radiación electromagnética, es posible deducir el número de estados microscópicos que debería albergar el agujero negro para poder radiar con esa temperatura. El resultado es que el agujero negro se puede describir como un sistema cuántico con una unidad de información por cada unidad de área del horizonte (medida en unidades de la longitud de Planck). Una conclusión que de nuevo reafirma la idea de que la longitud de Planck es, de forma efectiva, una distancia mínima en gravitación cuántica².

Cabe mencionar que una de las primeras aplicaciones obvias de la geometría no-conmutativa es la de una estructura alternativa para la teoría de Kaluza-Klein. En este tipo de teorías el espacio-tiempo usual se deja inalterado modificándose sólo las dimensiones adicionales y reemplazando su álgebra de funciones por un álgebra no-conmutativa, usualmente de dimensión finita. A consecuencia de esta restricción, y a consecuencia de que estas dimensiones extras son puramente algebraicas, la escala longitudinal asociada a ellas puede ser arbitraria [18].

El álgebra entonces toma la forma ,

$$\mathcal{A} = \mathcal{C}(V) \otimes M_n, \tag{1.7}$$

donde $\mathcal{C}(V)$ es el espacio de funciones continuas sobre la variedad V , usualmente tetradimensional, y M_n es un álgebra de dimensión finita n . Una buena parte de este formalismo es idéntico al de la teoría M de las D-branas [19, 20] . No obstante, dado que este punto de vista tiene varias debilidades, por ejemplo la incorporación de las correcciones radiativas cuánticas, eventualmente fue abandonado. Sin embargo, causó un renovado interés en las ideas de Snyder acerca de la no-conmutatividad del espacio-tiempo.

²Extracto obtenido de [17]

Actualmente las teorías no-conmutativas tienen una utilidad y un interés manifiesto en un amplio espectro de problemas en diversas áreas tales como matemática [21, 22], física teórica [23, 24], fenomenología [25] o materia condensada [26, 27], además de haber adquirido un interés *per-se*. Por ello, resulta importante analizar las posibilidades de detectar tal estructura. Existen diversos trabajos en los que se establecen cotas para los valores del parámetro de no-conmutatividad θ . En [28] calculando las correcciones radiativas debidas a la no-conmutatividad en el corrimiento de Lamb y comparando con los datos observacionales se obtiene la cota $|\theta| \leq (10 \text{ Tev})^{-2} (\sqrt{|\theta|} \leq 2 \times 10^{-20} m)$. Valores similares fueron publicados en [29], donde la cota proviene del cálculo de la sección eficaz diferencial para el problema de Aharonov-Bohm cuando el flujo magnético es cuantizado (siendo nula la contribución para el caso conmutativo usual), y en [30] donde se estudiaron las anisotropías debidas a la violación de la invariancia de Lorentz.

Por último, cabe mencionar que experimentos recientes llevados a cabo usando un condensado de ^{52}Cr [31, 32, 33], donde se puede relacionar el parámetro de no-conmutatividad θ con parámetros del experimento (ver [34]), derivaron en un valor aproximado de $\theta \sim 10^{-15} m^2$.

Paralelamente en [35], se relacionó el valor experimental del campo magnético en el Efecto Hall Cuántico de [36] con θ obteniendo un valor aproximado del mismo orden.

Pero la motivación más importante para el estudio de espacios no-conmutativos proviene de teoría de cuerdas, puesto que constituye el mejor candidato para una teoría cuántica de la gravedad unificada a las otras interacciones fundamentales. Tras los trabajos de Connes, Douglas y Schwarz [19], Seiberg y Witten [23] y Douglas y Hull [37] se descubrieron diversos límites de la teoría de cuerdas y de la teoría M que corresponden a teorías efectivas de campos en espacios no-conmutativos.

Por su parte, en una geometría no-conmutativa una configuración monopolar tendría energía finita ya que el punto donde estaría localizado el monopolo ha sido reemplazado por una celda difusa, mientras que ciertos monopolos que se obtienen en teoría de cuerdas también tienen energía finita [38]. Éste es otro aspecto importante que comparten ambas teorías.

En una geometría no-conmutativa la cuerda es reemplazada por un número finito de celdas donde cada una de ellas contiene un modo cuántico. A consecuencia de las relaciones de conmutación no triviales, la línea $\delta^\mu = q'^\mu - q^\mu$ que une dos puntos q'^μ y q^μ está cuantizada y caracterizada por un número de operadores de creación a_j [25], cada uno de los cuales crea un desplazamiento longitudinal. Estos desplazamientos corresponden a un modo vibracional longitudinal rígido de la cuerda. Puesto que no se requiere energía para separar dos puntos, la tensión de la cuerda sería cero.

En la versión más elemental de una teoría no-conmutativa, $\theta^{\mu\nu} = \theta J^{\mu\nu}$ sería una matriz constante antisimétrica y, por lo tanto, no un operador covariante de Lorentz. Esta situación es hallada en teoría de cuerdas en presencia de un campo tensorial antisimétrico de fondo [23]. Pero, puesto que en ese caso $J^{\mu\nu}$ define direcciones preferenciales respecto del observador inercial considerado, se tiene una violación de la invariancia de Lorentz [3, 4, 5, 39, 40] como consecuencia indeseable.

Con el fin de restaurar dicha invarianza, diferentes tipos de no-conmutatividad fueron estudiados [41], en los que el parámetro $\theta^{\mu\nu} = \theta J^{\mu\nu}$ de la ecuación (1.1) es promovido a un operador que se transforma como un tensor frente a transformaciones de Lorentz.

Estas ideas fueron puestas en práctica en una serie de papers [42], (empleando el álgebra de Doplicher, Fredenhagen y Roberts [43]), en donde los operadores $\theta^{\mu\nu}$ son considerados como las coordenadas usuales de un espacio-tiempo extendido a diez dimensiones con la hipótesis de que el

triple conmutador de las coordenadas x^μ se anula. Esta álgebra fue extendida más tarde por Amorim [44] a través de la introducción de un momento canónico conjugado a esas nuevas coordenadas.

Las teorías no-conmutativas también aparecen en el área de materia condensada. Por ejemplo, en el estudio de la dinámica de electrones en un campo magnético proyectado sobre el nivel de Landau más bajo, problema de relevancia para el efecto Hall cuántico [45].

Esta tesis se circunscribe al marco de la Mecánica cuántica no-conmutativa [46], modelo simplificado empleado para explorar las propiedades de estos espacios no-conmutativos con el objeto de obtener consecuencias fenomenológicas más directas que las que resultan del estudio de teorías de campos. En la formulación Hamiltoniana, el álgebra de Heisenberg usual debe modificarse introduciendo una relación de conmutación para las coordenadas, lo cual también puede expresarse en términos de una ecuación de Schrödinger deformada por el producto Moyal [47, 48].

Además de la no-conmutatividad ya mencionada entre operadores de coordenadas [43, 49], también ha sido considerada la no-conmutatividad entre operadores de momento, en relación a una *deformación por cuantización* de la estructura de Poisson [50] y como una cuantización magnética [51, 52]. Téngase en cuenta que la introducción de un campo magnético de fondo en la Mecánica Cuántica usual conduce a la no anulación del conmutador entre momentos canónicos.

Estos trabajos estimularon la construcción de nuevos modelos cuánticos [46], permitiendo explorar nuevas ideas en diversas situaciones de interés. Por ejemplo, modelos basados en un tipo de deformación no-standard del álgebra de Heisenberg, en la cual las variables dinámicas son modificadas mediante la suma directa de generadores de un álgebra de Lie no Abelianas, como los estudiados en [53, 54]. Una deformación similar en los momentos puede ser interpretada como la introducción de un campo magnético constante no-Abeliano [55, 56].

Este tipo de no-conmutatividad en el espacio de fases, donde el número de grados de libertad se ve extendido de la manera antes descrita, ha sido empleada en la formulación de algunos modelos cuánticos de interés [53, 54] encontrando aplicación, por ejemplo, en la descripción del grafeno, un nuevo material recientemente obtenido experimentalmente que se comporta como un sistema bidimensional. En efecto, en [56] fue estudiado un modelo continuo bidimensional que toma algunos elementos del modelo de tight-binding para este material y reproduce el efecto Hall cuántico entero anómalo característico del grafeno.

2. INTRODUCCIÓN MATEMÁTICA

En esta sección se dará una breve descripción matemática de la mecánica simpléctica, que constituye el marco adecuado para introducir la no-conmutatividad a nivel clásico, remarcando algunas de las consecuencias físicas inmediatas que se derivan de ella. Luego, se establecerá un marco cuántico a través del mecanismo de cuantización por deformación, introduciendo un producto asociativo pero no-conmutativo conocido como producto Moyal, donde se enumerarán algunas de sus propiedades. Aquí se hará contacto con la primera parte de nuestro trabajo, ya que a través de este mecanismo se suele introducir la Mecánica Cuántica no-conmutativa, tema objeto de nuestro estudio. Por último, al presentar las limitaciones de una no-conmutatividad a parámetros constantes, se introduce el espacio de Snyder, el cual servirá como referencia histórica y como motivación para la segunda parte de la presente tesis.

Sistemas físicos

Como es bien sabido, una vez identificados los grados de libertad de un sistema físico, la dinámica del mismo queda determinada por dos elementos:

- El Hamiltoniano H , el cual (para sistemas no relativistas) es una función cuadrática del momento sumada a un número finito de términos que dependen de las coordenadas; simbólicamente

$$H \sim p^2 + V(q). \quad (2.1)$$

- La *forma simpléctica* ω , que es una 2-forma cerrada y no degenerada asociada al espacio de fases del sistema $\mathcal{T}^*\mathcal{M}$.³

La mecánica cuántica y el formalismo de Hamilton de la mecánica clásica están íntimamente relacionados. Cuando hablamos de mecánica clásica de un sistema con un número finito de grados de libertad, tenemos en mente algo así como un sistema de partículas para las que se puede especificar la posición y el momento en cada instante de cada una de ellas. En otras palabras, el estado del sistema está determinado como un punto de un espacio finito-dimensional, el espacio de fases del sistema. Sin embargo, en la mecánica cuántica el principio de incerteza de Heisenberg (que es una consecuencia de la no-conmutatividad de los observables cuánticos) impide que los estados del sistema estén representados por puntos del espacio de fases.

En este capítulo, veremos que los sistemas clásicos y los cuánticos pueden ser estudiados dentro del formalismo de la Mecánica Simpléctica. Si bien en los capítulos subsecuentes estableceremos un marco cuántico para la descripción de los sistemas estudiados en esta tesis, varias consecuencias interesantes pueden hallarse inmediatamente dentro del contexto clásico.

Mecánica clásica

Denotaremos genéricamente las coordenadas y momentos $\{q^i, p_j; i, j = 1, 2, \dots, n\}$ de $\mathcal{T}^*\mathcal{M}$ como $\{z^i; i = 1, 2, \dots, 2n\}$ cuando no se necesite diferenciarlas. Apartir de ω , cuya expresión en

³El espacio de fases constituye el fibrado cotangente del espacio de configuración del sistema (el cual no es más que una variedad diferenciable \mathcal{M}).

términos de las variables dinámicas viene dada por $\omega := \omega_{ij}(z) dz^i \wedge dz^j$ (suma implícita en los índices i, j), queda definido el corchete de Poisson⁴ de dos funciones $f, g : \mathcal{T}^*\mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$\{f, g\}(z) := \omega(X_f, X_g)(z) = \omega^{ij}(z) \frac{\partial f}{\partial z^i} \frac{\partial g}{\partial z^j}, \quad \omega^{ik} \omega_{kj} = -\delta_j^i. \quad (2.2)$$

Por definición, ésta es una operación bilineal y antisimétrica que satisface la identidad de Jacobi⁵ (lo que es una consecuencia de que ω sea cerrada). Además, no es difícil probar que respeta la regla de Leibnitz del producto.

Varios tipos de Hamiltonianos fueron estudiados durante el último siglo, sin embargo, el rol de la *forma simpléctica* ha quedado relegado, suponiéndose en general que la misma siempre viene dada por su forma canónica $\omega_0 = dq^i \wedge dp_i$. Puesto que ω es cerrada, por el lema de Poincaré se tiene que localmente $\omega_0 = -\mathbf{d}\theta_0$, donde $\theta_0 = p_i dq^i$ es conocida como *1-forma fundamental*. Resulta útil escribirla en términos del producto interno usual de \mathbb{R}^n , $\langle \cdot, \cdot \rangle$,

$$\omega_0((q_1, p_1), (q_2, p_2)) = \mathbf{z}^t \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ -\mathbf{1} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \mathbf{z} = \langle q_1, p_2 \rangle - \langle p_1, q_2 \rangle. \quad (2.3)$$

Así definida, la ecuación (2.2) se reduce a

$$\{q^i, q^j\} = 0, \quad \{q^i, p_j\} = \delta_j^i, \quad \{p_i, p_j\} = 0, \quad (2.4)$$

que no es más que la forma usual para los corchetes de Poisson.

En la segunda parte de esta tesis exploraremos las consecuencias de tener una *2-forma simpléctica* más general (pero aún constante). Esta generalización se corresponderá con una estructura de Poisson deformada.

Consideremos una *forma simpléctica* ω definida sobre un espacio de fases de coordenadas generalizadas (x_i, π_i) :

$$\omega := \omega_0 - eF - e^*G \quad (2.5)$$

donde

$$F := \frac{1}{2} F_{ij} dx^i \wedge dx^j, \quad G := \frac{1}{2} G^{ij} d\pi_i \wedge d\pi_j \quad (2.6)$$

y e, e^* son parámetros que controlan la no-conmutatividad en el espacio de momentos y en el de coordenadas respectivamente. Las formas F y G no son necesariamente constantes y (x, π) son coordenadas sobre $\mathcal{T}^*\mathcal{M}$.

Puesto que ω debe ser cerrada, F y G deben cumplir,

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_{jk}}{\partial x^i} + \frac{\partial F_{ki}}{\partial x^j} + \frac{\partial F_{ij}}{\partial x^k} &= 0, & \frac{\partial F_{ij}}{\partial \pi_k} &= 0 \\ \frac{\partial G^{jk}}{\partial \pi_i} + \frac{\partial G^{ki}}{\partial \pi_j} + \frac{\partial G^{ij}}{\partial \pi_k} &= 0, & \frac{\partial G^{ij}}{\partial x^k} &= 0 \end{aligned} \quad (2.7)$$

⁴En el Apéndice A se realiza una breve descripción de las definiciones de campos, formas, producto wedge y corchetes de Poisson

⁵En otras palabras, el espacio de funciones reales suaves definidas sobre $\mathcal{T}^*\mathcal{M}$ con esta operación forma un álgebra de Lie.

de donde se concluye primero que F sólo puede ser función de la posición, mientras que G sólo del momento, y segundo que ambas formas F y G son cerradas.

En estas nuevas coordenadas, la ecuación (2.2) se reduce a [57]

$$\{f, g\}_{x, \pi} = (\Psi^{-1})_j^i \left(\frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{\partial g}{\partial \pi_j} - \frac{\partial f}{\partial \pi_j} \frac{\partial g}{\partial x^i} \right) + e^* (\Psi^{-1} G)^{ij} \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{\partial g}{\partial x^j} + e (F \Psi^{-1})_{ij} \frac{\partial f}{\partial \pi_i} \frac{\partial g}{\partial \pi_j}, \quad (2.8)$$

siendo $\Psi_j^i = \delta_j^i + e e^* G^{il} F_{lj}$.

De esta última expresión se deduce que la estructura de Poisson que satisfacen las coordenadas es

$$\{x^i, \pi_j\} = (\Psi^{-1})_j^i, \quad \{x^i, x^j\} = e^* (\Psi^{-1} G)^{ij}, \quad \{\pi_i, \pi_j\} = e (F \Psi^{-1})_{ij}. \quad (2.9)$$

A partir de (2.8) es fácil calcular la evolución temporal de una función f dado un Hamiltoniano H . En efecto,

$$\dot{f} = \{f, H\}_{x, \pi}. \quad (2.10)$$

En particular, de aquí se encuentran las ecuaciones de Hamilton en las nuevas coordenadas,

$$\frac{dx^i}{dt} = (\Psi^{-1})_j^i \left(\frac{\partial H}{\partial \pi_j} + e^* G^{jk} \frac{\partial H}{\partial x^k} \right), \quad \frac{d\pi_i}{dt} = (\Psi^{-1})_i^j \left(-\frac{\partial H}{\partial x^j} + e F_{jk} \frac{\partial H}{\partial \pi_k} \right) \quad (2.11)$$

dejando así de forma manifiesta que la dinámica de un sistema en un espacio no-conmutativo no resulta equivalente al de uno definido en el espacio usual. Estas ecuaciones se reducen al límite clásico usual cuando los parámetros de no-conmutatividad se anulan.

Cabe destacar que para el caso en el que la forma simpléctica esté definida sobre un espacio de fases tetradimensional, de forma tal que $F, G \in \{U \in \mathbb{R}^{2 \times 2}, U = -U^T\}$ es fácil probar que Ψ resulta proporcional a la matriz identidad, lo que implica que $[F, G] = [\Psi, F] = [\Psi, G] = 0$. En este caso, tomando $\omega \rightarrow \Psi^{-1} \omega$, los corchetes entre las variables dinámicas quedan definidos por

$$\{x^i, \pi_j\} = \delta_j^i, \quad \{x^i, x^j\} = e^* G^{ij}, \quad \{\pi_i, \pi_j\} = e F_{ij}. \quad (2.12)$$

mientras que las ecuaciones de movimiento se reducen a

$$\frac{dx^i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \pi_j} + e^* G^{jk} \frac{\partial H}{\partial x^k}, \quad \frac{d\pi_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x^j} + e F_{jk} \frac{\partial H}{\partial \pi_k} \quad (2.13)$$

Antes de proseguir con el análisis, resulta instructivo en este punto, mostrar algunas de las consecuencias de la naturaleza de los parámetros e y e^* . Para ello veamos algún ejemplo sencillo de los siguientes tres casos:

1. $e^* = 0$ pero $e \neq 0$.
2. $e^* \neq 0$ pero $e = 0$
3. $e^* \neq 0$ y $e \neq 0$

1. Para el primero de ellos se puede dar una interpretación física bien conocida: el sistema se encuentra sujeto a un campo magnético externo $\mathcal{B}(x)$. Puesto que \mathcal{B} es cerrado podemos escribir (localmente) $\mathcal{B} = \mathbf{d}\mathcal{A}$. Estableciendo $c = 1$, el acoplamiento mínimo requiere el cambio $\pi_i \rightarrow p_i - e \mathcal{A}_i$ y $q^i \rightarrow x^i$, de donde es fácil verificar que

$$\{x^i, x^j\} = 0, \quad \{\pi_i, \pi_j\} = e \mathcal{B}_{ij}, \quad \{x^i, p_j\} = \delta_j^i, \quad (2.14)$$

siendo $\mathcal{B}_{ij} = F_{ij} = \epsilon_{ijk}\mathcal{B}^k(x)$ y en consecuencia

$$\omega = \omega_0 - \frac{e}{2}\mathcal{B}_{ij} dx^i \wedge dx^j = -\mathbf{d} [(p_i - e\mathcal{A}_i)dx^i]. \quad (2.15)$$

Notar que un cambio de gauge $\mathcal{A}' \rightarrow \mathcal{A} + \nabla\phi(x)$ no altera a ω y, en consecuencia, constituye una transformación canónica (o symplectomorfismo).

Pensemos en particular en el problema de Landau. En el mismo, se desea describir la dinámica de una partícula con carga e que se mueve en un plano en interacción con un campo magnético \mathcal{B} constante ($\mathcal{B}_{ij} = \frac{\mathcal{B}}{2}\epsilon_{ij}$). Ésta constituye una de las primeras apariciones de una estructura simpléctica no canónica en física que, curiosamente, en el límite de pequeñas masas o grandes campos magnéticos da origen a una no-conmutatividad en las coordenadas. En efecto, el Lagrangiano del sistema para el gauge de Landau $(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2) = (0, -\mathcal{B}x_1)$, viene dado por:

$$\mathcal{L}_\mu := \frac{1}{2}\mu(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2) + e\mathcal{B}x_1\dot{x}_2 - V(x_1, x_2), \quad (2.16)$$

siendo $V(x_1, x_2)$ un potencial externo adicional débil. De esta última ecuación se lee que en el límite $\mu \rightarrow 0$ se tiene

$$\mathcal{L}_0 := e\mathcal{B}x_1\dot{x}_2 - V(x_1, x_2). \quad (2.17)$$

Puesto que $p = \frac{\partial\mathcal{L}_0}{\partial\dot{q}}$, tenemos la identificación $(q, p) = (x_2, e\mathcal{B}x_1)$. Finalmente tomando en consideración que $\{q, p\} = 1$ se tiene $\{x_1, x_2\} = -\frac{1}{e\mathcal{B}}$. En resumen, la dinámica de una partícula en dos dimensiones expuesta a un campo magnético constante en el límite de pequeñas masas, puede ser descrita introduciendo una no-conmutatividad en el plano. Éste sistema fue estudiado (cuánticamente) por primera vez en 1933 por Peierls [58] en el contexto del estudio del diamagnetismo de Landau. Un estudio exhaustivo del problema de Landau en el espacio no-conmutativo puede encontrarse en [59].

2. Para el segundo caso, se puede interpretar análogamente, que el sistema se encuentra sujeto a una 2-forma cerrada la cual interactúa con una partícula de carga dual e^* . Sin embargo, aquí se presentan particularidades inesperadas. Una de ellas es que, aún en el caso mas simple $G^{ij} = \theta\epsilon^{ij}$, se rompe la invarianza de gauge de una partícula mínimamente acoplada a un campo electromagnético⁶. Tomemos un sistema de unidades donde e^* y la carga del electrón sean unitarias, de forma de regular la no-conmutatividad únicamente con el parámetro θ , el cual representa la intensidad de la forma G . Luego, si $H = (\vec{p} - \vec{A})^2$ de las ecuaciones (2.13) se sigue que

$$\dot{x}_i = 2(p_k - \mathcal{A}_k)(\delta_{ik} - \theta\epsilon_{ij}\partial_j\mathcal{A}_k), \quad \dot{p}_i = 2(p_k - \mathcal{A}_k)\partial_i\mathcal{A}_k. \quad (2.18)$$

Es inmediato que las ecuaciones de movimiento dependen de la elección de gauge. En efecto, tomando $\mathcal{A}_i = -\frac{\mathcal{B}}{2}\epsilon_{ij}x_j$,

$$\ddot{x}_1 = 2\mathcal{B}(1 + \frac{\theta\mathcal{B}}{4})\dot{x}_2, \quad \ddot{x}_2 = -\mathcal{B}(1 + \frac{\theta\mathcal{B}}{4})\dot{x}_1, \quad (2.19)$$

mientras que para el gauge de Landau,

$$\ddot{x}_1 = 2\frac{\mathcal{B}}{1 + \theta\mathcal{B}}\dot{x}_2, \quad \ddot{x}_2 = -2\mathcal{B}(1 + \theta\mathcal{B})\dot{x}_1. \quad (2.20)$$

Esto es una consecuencia de la relación de conmutación entre las diferentes componentes del momento cinético $\pi_i = p_i - e\mathcal{A}_i$

$$\{p_1 - \mathcal{A}_1, p_2 - \mathcal{A}_2\} = \epsilon_{ij}\partial_i\mathcal{A}_j + \{\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2\} \equiv \mathcal{F}_{12} \quad (2.21)$$

⁶Para más detalles referimos al lector interesado a [60].

La expresión resultante para \mathcal{F}_{12} involucra un término adicional ($\{\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2\}$), el cual es característico de teorías de gauge no-Abelianas y, en efecto, es el responsable de la diferencia en las ecuaciones de movimiento. Notar que en el gauge de Landau $\{\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2\} = \mathcal{B}$, mientras que en el simétrico $\{\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2\} = \mathcal{B}(1 + \frac{\mathcal{B}\theta}{4})$. Sin embargo la condición de cambio de gauge queda determinada al exigir que todas las variables dinámicas cambien mediante una transformación unitaria de la misma forma que lo hace \mathcal{F}_{12} , lo que implica que

$$\mathcal{A}'_i = U\mathcal{A}_iU^{-1} + U\partial_iU^{-1}. \quad (2.22)$$

Otra de las novedades que se presentan en este caso, es que las ecuaciones de movimiento no siempre son derivables de un Lagrangiano⁷. El concepto de energía conservada prevalece, pero si uno parte de un dado Hamiltoniano y realiza una transformación de Legendre usual para pasar a la formulación Lagrangiana, se obtendrá a partir de éstas ecuaciones de movimiento erróneas. Esto es un reflejo de la complicación inherente a la transformación de Legendre cuando $e^* \neq 0$.

Una reseña interesante es que para una partícula expuesta a un potencial central cuyo Hamiltoniano viene dado por $H = \frac{1}{2\mu}\pi_i\pi^i + V(x_i x^i)$ en el espacio no-conmutativo tridimensional, donde $G^{ij} = \epsilon^{ijk}\theta_k$, las ecuaciones de movimiento que se obtienen a partir de (2.11) son:

$$\dot{x}^i = \frac{\pi^i}{\mu} + \epsilon^{ijk}\theta_k \frac{\partial V}{\partial x^j}, \quad \dot{\pi}_i = -\frac{\partial V}{\partial x^i}, \quad (2.23)$$

de donde se concluye,

$$\pi^i = \mu\dot{x}^i + \mu\epsilon^{ijk}\Omega_j x_k, \quad \Omega_j := \frac{\theta_j}{r} \frac{\partial V}{\partial r}. \quad (2.24)$$

Esta ecuación puede ser interpretada como el momento de una partícula vista desde un sistema de referencia no inercial, rotando con velocidad angular $\vec{\Omega}$.

Las nuevas ecuaciones de Newton vienen dadas por,

$$\mu\ddot{x}^i = -\frac{x^i}{r} \frac{\partial V}{\partial r} + \mu\epsilon^{ijk}\dot{x}_j\Omega_k + \mu\epsilon^{ijk}x_j\dot{\Omega}_k \quad (2.25)$$

donde se observan las correcciones debido a la no-conmutatividad. El segundo término en el miembro derecho es la fuerza de Coriolis y el último es análogo a la fuerza producida por un sistema en rotación no-uniforme. Es evidente de aquí que, a consecuencia de las correcciones introducidas por la no-conmutatividad, se rompe la invariancia rotacional usual de un campo central, es decir, $l_0 = \epsilon^{ijk}x_j p_k$ no es una cantidad conservada⁸. En [62] se estudia el problema de Kepler y estos términos adicionales son interpretados como una fuerza análoga a la producida por un campo gravitacional de un objeto masivo muy lejano animado de una rotación no-uniforme. En [63] se muestra que el corrimiento del perihelio ($\delta\phi$), es muy sensible con respecto al parámetro θ , de forma que pequeños cambios en θ induce cambios evidentes en $\delta\phi$, estableciendo así una conexión entre la física de pequeñas y grandes escalas, además de conducir a una cota superior para θ .

3. Si e y e^* son no nulos y se tiene en cuenta que ω debe ser no-degenerada, es evidente que debe exigirse que $\det\Psi \neq 0$, condición equivalente a pedir que el jacobiano del cambio de coordenadas sea no-singular. Cuando esta condición no se satisface, el sistema experimenta una reducción

⁷Para más detalles consultar la referencia [61]

⁸En efecto, es fácil verificar de (2.8) que l_0 no genera las rotaciones en este espacio.

dimensional (ya que no todas las coordenadas tendrán una evolución temporal independiente). En efecto, consideremos por simplicidad la forma simpléctica constante definida en un espacio de fases tetradimensional

$$\omega_{nc} := \frac{1}{1 - \kappa\theta} \left(\omega_0 - \frac{\kappa}{2} \epsilon_{ij} dx^i \wedge dx^j - \frac{\theta}{2} \epsilon^{ij} d\pi_i \wedge d\pi_j \right), \quad (2.26)$$

la cual etiquetamos de manera particular puesto que aparecerá recurrentemente en este trabajo.

De (2.13) se deducen las siguientes ecuaciones de movimiento:

$$\dot{x}^i = \frac{\partial H}{\partial \pi_i} + \theta \epsilon^{ij} \frac{\partial H}{\partial x^j}, \quad \dot{\pi}_i = -\frac{\partial H}{\partial x^i} + \kappa \epsilon_{ij} \frac{\partial H}{\partial \pi_j}. \quad (2.27)$$

Si κ alcanza el valor crítico $\kappa_c := 1/\theta$, de (2.27) se deduce

$$\dot{x}_1 = -\theta \dot{\pi}_2, \quad \dot{x}_2 = \theta \dot{\pi}_1, \quad (2.28)$$

por lo que ocurre una reducción dimensional ya que los grados de libertad del sistema se reducen a la mitad, en otras palabras, el espacio de fases tetradimensional $\{x^1, x^2, \pi_1, \pi_2\}$ colapsa a uno bidimensional generado por las variables canónicamente conjugadas x^1 y x^2 . Puesto que θ es constante se tiene:

$$x_1 = -\theta \pi_2 + c_1, \quad x_2 = \theta \pi_1 + c_2, \quad (2.29)$$

donde la arbitrariedad de las constantes c_1, c_2 garantizan la libertad de imponer condiciones iniciales.

Por último, en (2+1)-dimensiones, si el Hamiltoniano H es rotacionalmente invariante $H = H(\pi_i \pi^i, x_i x^i)$, el sistema resultante para $\kappa = \kappa_c$ no solo será integrable (como cualquier sistema unidimensional), sino que además presenta una solución sencilla. En efecto,

$$H := H(\theta^{-2} x_i x^i, x_i x^i), \quad \{x_1, x_2\} = \theta. \quad (2.30)$$

Definiendo:

$$a := \frac{1}{\sqrt{2\theta}} (x_1 + x_2), \quad a^\dagger := \frac{1}{\sqrt{2\theta}} (x_1 - x_2), \quad 2\theta (x_1^2 + x_2^2) = a^\dagger a, \quad (2.31)$$

las ecuaciones de movimiento toman la forma

$$\frac{\dot{a}}{a} = -\frac{\dot{a}^\dagger}{a^\dagger} = i \frac{dh_\theta}{dn}, \quad h_\theta(n) = h_\theta(a^\dagger a) \equiv H. \quad (2.32)$$

Desde un punto de vista cuántico, la reducción dimensional es clara, dejando un Hamiltoniano que es función del Hamiltoniano del oscilador armónico, de donde se concluye que el espectro es discreto con niveles de energías dado por $E_n = h_\theta(\theta(n + 1/2))$.⁹

Es interesante notar que el parámetro κ cuando $\theta \neq 0$ juega el rol de una especie de generalización de un campo magnético constante \mathcal{B} a este espacio no-conmutativo. Sin embargo, esta extensión es no trivial, ya que un sistema con $\kappa \neq 0$ no es equivalente a uno con $\kappa = 0$ y con el shift clásico $p_i - \mathcal{B} \epsilon_{ij} x_j$. En efecto de (2.13) se deduce, para un Hamiltoniano $H := \pi_i \pi^i + V(x)$ con ω como en (2.26), que las ecuaciones en (2.27) se reducen a

$$\dot{x}_i = 2\pi_i + \theta \epsilon_{ij} \frac{\partial V}{\partial x^j}, \quad \dot{\pi}_i = -\frac{\partial V}{\partial x^i} + 2\kappa \epsilon_{ij} \pi_j, \quad (2.33)$$

⁹En [64] se puede encontrar una lectura mucho más detallada de esta reducción dimensional para un sistema n -dimensional con los parámetros θ y κ no necesariamente constantes.

en cambio para el mismo Hamiltoniano con $\pi_i := p_i - \mathcal{B}\epsilon_{ij}x_j$, y una 2-forma como la anterior pero con $\kappa = 0$ se tiene

$$\dot{x}_i = 2(1 - \theta\mathcal{B}\epsilon_{ij})\pi_i + \theta\epsilon_{ij}\frac{\partial V}{\partial x^j}, \quad \dot{\pi}_i = -\frac{\partial V}{\partial x^i} + 2\theta\mathcal{B}\epsilon_{ij}\pi_j, \quad (2.34)$$

de donde se ve que ambos sistemas no son equivalentes. ■

Hasta aquí hemos analizado algunas de las implicancias de una estructura no conmutativa. Sin embargo, resulta oportuno preguntarse si es posible encontrar coordenadas de forma tal que ω tome en ellas la forma canónica usual ω_0 . La respuesta es sí y viene dada por un enunciado conocido como Teorema de Darboux.

Teorema de Darboux. *Sea $(\mathcal{T}^*\mathcal{M}, \omega)$ una variedad simpléctica¹⁰. Para cada entorno de $z \in \mathcal{T}^*\mathcal{M}$, existe un mapa local coordenado en el cual ω es constante.*

Corolario. *Si $(\mathcal{T}^*\mathcal{M}, \omega)$ es una variedad simpléctica con $\dim\mathcal{T}^*\mathcal{M} = 2n$, entonces en todo entorno $z \in \mathcal{T}^*\mathcal{M}$ existen coordenadas locales $(q^1, \dots, q^n, p_1, \dots, p_n)$ llamadas canónicas, tales que*

$$\omega = \sum_{i=1}^n dq^i \wedge dp_i = -\mathbf{d}\theta_0, \quad (2.34)$$

o en su forma matricial:

$$[\omega]_{qp} = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{1}_{n \times n} \\ -\mathbf{1}_{n \times n} & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.34)$$

Además, los corchetes de Poisson se reducen a su forma canónica (2.4).

En resumen, este teorema garantiza que, dado un sistema físico determinado por $(H(z), \omega_z)$ siempre es posible encontrar una aplicación lineal invertible $z = \varphi(q, p)$ tal que el sistema en esas coordenadas queda descrito por el Hamiltoniano $H' = H \circ \varphi(q, p)$ y la forma simpléctica $\omega_{\varphi(q,p)} = \omega_0$. Naturalmente dicha transformación, por definición, resulta no-canónica.

Ejemplo 1

Considerar los corchetes de Poisson que quedan definidos a partir de la forma simpléctica $\omega = \omega_{nc}$ de la ecuación (2.26),

$$\{x_1, x_2\} := \theta, \quad \{\pi_1, \pi_2\} := \kappa, \quad \{x_i, \pi_j\} := \delta_{ij}. \quad (2.35)$$

Definamos la siguiente aplicación lineal:

$$\begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\lambda^2 - \frac{\theta\kappa}{4\lambda^2}} \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & \frac{\theta}{2\lambda} \\ 0 & \lambda & -\frac{\theta}{2\lambda} & 0 \\ 0 & -\frac{\kappa}{2\lambda} & \lambda & 0 \\ \frac{\kappa}{2\lambda} & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \pi_1 \\ \pi_2 \end{pmatrix}. \quad (2.36)$$

¹⁰En realidad se debe exigir que (P, ω) sea una variedad simpléctica fuerte, esto significa que para cada $z \in P$, la forma bilineal ω define un isomorfismo $\omega^\flat : T_z P \rightarrow T_z^* P$. Para formas simplécticas débiles, en general ω^\flat solo será suryectiva.

A partir de la misma es fácil verificar que

$$\{q_1, q_2\} = \{p_1, p_2\} = 0, \quad \{q_i, p_j\} = \delta_{ij} \quad \Leftrightarrow \quad \lambda^2 + \frac{\theta\kappa}{4\lambda^2} = 1, \quad (2.37)$$

de donde se concluye

$$\lambda_{\pm}^2 = \frac{1 \pm \sqrt{1 - \kappa\theta}}{2}. \quad (2.38)$$

Para estos valores de λ se tiene que ω se reduce a ω_0 . Sin embargo, es interesante notar que si uno pretende que la transformación lineal sea bien comportada cuando $\theta, \kappa \rightarrow 0$ se deberá descartar la solución λ_- , así como también deberá exigirse que $\kappa\theta \neq 1$ para que ω sea no degenerada. Este ejemplo se utilizará más adelante (Ver Apéndice F) para realizar el álgebra no-conmutativa en términos de las variables canónicas en un contexto cuántico para el caso en que $\kappa\theta < 1$. ■

Hasta ahora hemos hecho uso del concepto de transformación canónica sin definirlo adecuadamente.

Simplectomorfismos y Grupo Simplético

Definición. *Un simplectomorfismo o transformación canónica es una transformación suave del espacio de fases que preserva la 2-forma simpléctica ω .*

Llamemos A a la representación matricial de tal transformación, teniendo en cuenta que ω es una forma bilineal es fácil deducir que la condición para que A sea simpléctica viene dada por

$$A \cdot \omega \cdot A^T = \omega, \quad (2.39)$$

Tomando determinantes a ambos lados de la igualdad se muestra que $\det A = \pm 1$, por lo que existe A^{-1} .

Ejemplo 2

Sea la transformación de coordenadas

$$x_1 = r \cos \theta, \quad x_2 = r \sin \theta, \quad p_1 = \cos \theta p_r - \frac{1}{r} \sin \theta p_\theta, \quad p_2 = \sin \theta p_r + \frac{1}{r} p_\theta.$$

La matriz jacobiana $A : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3 \times [0, 2\pi)$ cumple $A \cdot \omega_0 \cdot A^T = \omega_0$, por lo que se dice que este cambio de coordenadas constituye una transformación canónica respecto a la forma simpléctica ω_0 . Sin embargo, es fácil probar que no lo es con respecto a la forma simpléctica ω_{nc} dada en (2.26). ■

Definición. *El conjunto de todas las aplicaciones simplécticas definidas sobre un espacio Z de dimensión finita $2n$ con respecto al producto usual de matrices forma un grupo de dimensión $2n^2 + n$, denominado grupo simplético $Sp(2n, Z)$, el cual es conexo y no compacto.*

El álgebra de Lie de $Sp(2n, \mathbb{R}^n)$, cuyos elementos son las transformaciones simplécticas infinitesimales, viene dada por:

$$\mathfrak{sp}(2n, \mathbb{R}^n) = \{A \in L(\mathbb{R}^{2n}, \mathbb{R}^{2n}) / A^T J + JA = 0\}, \quad (2.40)$$

siendo $L(\mathbb{R}^{2n}, \mathbb{R}^{2n})$ el espacio de las transformaciones lineales entre esos espacios.

Supongamos que la representación matricial de la transformación canónica viene dada por

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = e^{\mathcal{A}}, \quad \mathcal{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad (2.41)$$

entonces es simple ver que:

- $M \in Sp(2n, \mathbb{R}^n)$ si y sólo si $A^T C$ y $B^T D$ son simétricas y $A^T D - C^T B = \mathbb{I}$.
- $\mathcal{A} \in \mathfrak{sp}(2n, \mathbb{R}^n)$ si y sólo si $d = -a^T$, $c = c^T$ y $b = b^T$.

A continuación enunciaremos un importante resultado acerca de las transformaciones canónicas en Mecánica Cuántica.

Proposición. *Sea $A : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$, un operador lineal sobre un espacio de Hilbert complejo \mathcal{H} . A es una transformación canónica, si y sólo si A es unitario.*

Extendámonos un poco más acerca de este importante resultado, del cual se desprende que las transformaciones canónicas preservan las amplitudes de probabilidad y el espectro. Consideremos el álgebra de Heisenberg usual

$$[\hat{q}_i; \hat{q}_j] = 0, \quad [\hat{p}_i; \hat{p}_j] = 0, \quad [\hat{q}_i; \hat{p}_j] = i\hbar \delta_{ij}. \quad (2.42)$$

y el álgebra deformada

$$[\hat{x}_1; \hat{x}_2] = i\theta, \quad [\hat{\pi}_1; \hat{\pi}_2] = i\kappa, \quad [\hat{x}_i; \hat{\pi}_j] = i\hbar \delta_{ij}. \quad (2.43)$$

Como hemos visto anteriormente para el caso clásico la transformación $(q, p) \rightarrow (x, \pi)$ es no-canónica puesto que no deja invariante la forma simpléctica ω_0 . Cuánticamente esta situación es idéntica, por tanto la transformación de coordenadas no es unitaria. Sin embargo, dado (θ, κ) fijos con $\kappa\theta \neq 1$, habrá diferentes representaciones de los operadores $(\hat{x}, \hat{\pi})$ en términos de los canónicos $(\hat{q} = q, \hat{p} = i\partial_q)$, todas ellas unitariamente equivalentes. Es decir, dadas dos representaciones $(\hat{x}, \hat{\pi})$ y $(\hat{x}', \hat{\pi}')$ del álgebra deformada (2.43), existe una transformación unitaria U tal que

$$\hat{x}'_i = U \hat{x}_i U^{-1}, \quad \hat{\pi}'_i = U \hat{\pi}_i U^{-1}. \quad (2.44)$$

Por tanto, un Hamiltoniano polinómico H en ambas variables resulta equivalente a

$$H(\hat{x}', \hat{\pi}') = U H(\hat{x}, \hat{\pi}) U^{-1}, \quad (2.45)$$

lo que asegura que el espectro no depende de la representación escogida para realizar el álgebra.

A modo de ejemplo consideremos el caso particular $\kappa = 0$.

$$[\hat{x}_1; \hat{x}_2] = i\theta, \quad [\hat{\pi}_1; \hat{\pi}_2] = 0, \quad [\hat{x}_i; \hat{\pi}_j] = i\hbar \delta_{ij}. \quad (2.46)$$

En este contexto resulta apropiado considerar la representación en el espacio de momento para los operadores canónicos, de modo que \hat{q} y \hat{p} actúan sobre funciones de onda $\psi \in L(\mathbb{R}^2, dp_1 dp_2)$ de la siguiente forma

$$\hat{\pi}_i = p_i, \quad \hat{q}_i = i\partial_{p_i}, \quad \hat{x}_i = \hat{q}_i - A_i(p), \quad \text{con} \quad \frac{\partial A_1}{\partial p_2} - \frac{\partial A_2}{\partial p_1} = \theta. \quad (2.47)$$

Esta ecuación provee una representación del álgebra (2.46).

Naturalmente $A_i(p)$ cumple un rol análogo al potencial vector definido en el plano de coordenadas y θ hace las veces de campo magnético. Un cambio de gauge $A'_j = A_j + \frac{\partial \alpha}{\partial p_j}$ induce una transformación unitaria de \hat{z} a través del operador $U = \exp[\imath \alpha(p)]$. La función de onda $\psi(p_1, p_2)$ transforma de acuerdo a $\psi' = U\psi$, de manera que

$$H'(\hat{x}', \hat{\pi}') \psi' = U H(\hat{x}, \hat{\pi}) U^{-1} U \psi = E \psi', \quad (2.48)$$

De donde se concluye que el espectro del Hamiltoniano no depende de la representación escogida para los operadores (\hat{x}, \hat{p}) .

Simetría Rotacional

La simetría rotacional jugará un rol esencial en el análisis de los problemas tratados en esta tesis puesto que nos dedicaremos a estudiar exclusivamente potenciales centrales, por ello, haremos una breve discusión de la forma que toma esta simetría al modificarse la estructura simpléctica, manteniendo en mente que para nuestro caso particular ω viene dada por (2.26).

Sea una transformación lineal de coordenadas $\varphi := x^i \rightarrow x'^i = A_j^i x^j$. La misma induce un *push forward* en el fibrado cotangente $\mathcal{T}^*\mathcal{M}$ dado por

$$x'^i = A_j^i x^j, \quad \pi'_k = (A^{-1})_k^l p_l \quad (2.49)$$

de manera que la forma simpléctica cambia como

$$\omega \rightarrow \omega' = dx'^i \wedge dp'_i - \frac{e}{2} F'_{ij}(x') dx'^i \wedge dx'^j - \frac{e^*}{2} G'^{ij}(\pi') d\pi'_i \wedge d\pi'_j \quad (2.50)$$

$$F'_{ij}(x') = F_{kl} (A^{-1})_i^k (A^{-1})_j^l, \quad G'^{ij}(x') = G^{kl} A_k^i A_l^j.$$

En particular, si la transformación representa una rotación finita dada por $A = \exp(\frac{1}{2} u^{ij} M_{ij})$, con M_{ij} un generador del grupo de rotaciones, se puede ver que A conserva la forma simpléctica ω_0 (es decir constituye una transformación simpléctica) pero no ω' , a menos que se exija alguna condición extra. En tres dimensiones, por ejemplo, si ambos campos F y G son constantes y están ubicados a lo largo del mismo eje, una rotación alrededor de ese eje es simpléctica con respecto a ω_{nc} . Por tanto, dado un Hamiltoniano con simetría rotacional, el momento angular usual l_0 será una cantidad conservada aún con respecto a la forma simpléctica ω_{nc} . No obstante es interesante expresar l_0 en las nuevas variables, lo cual haremos en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 3

Sean (q_1, q_2, p_1, p_2) las coordenadas asociadas a la forma simpléctica ω_0 , en estas coordenadas l_0 toma la forma usual $l_0 = \epsilon_{ij} q_i p_j$. Sea la transformación,

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \pi_1 \\ \pi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & -\frac{\theta}{2\lambda} \\ 0 & \lambda & \frac{\theta}{2\lambda} & 0 \\ 0 & \frac{\kappa}{2\lambda} & \lambda & 0 \\ -\frac{\kappa}{2\lambda} & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}. \quad (2.51)$$

Es fácil verificar que la misma induce un *push forward* de $\omega_0 \rightarrow \omega_{nc}$ (ver ejemplo 1). Si expresamos l_0 en estas coordenadas se obtiene:

$$L = \frac{1}{1 - \kappa \theta} \left(\epsilon_{ij} x_i \pi_j + \frac{\theta}{2} \pi^2 + \frac{\kappa}{2} x^2 \right) \quad (2.52)$$

■

Para un análisis más exhaustivo de este tema referimos al lector a [57, 65].

Por otro lado es remarcable el hecho que, cuánticamente, el problema de autovalores y autovectores de un dado Hamiltoniano resultará más complicado ya que la transformación lineal que lleva de las variables no-conmutativas a las conmutativas $z(q, p)$, en general mezclará coordenadas y momentos haciendo que el potencial dependa de p y por ello, si el potencial no es un polinomio, dicha dependencia hará que sea no local.

Cuantización por deformación y Mecánica Cuántica

Hasta ahora hemos considerado sistemas clásicos donde los observables del sistema son funciones reales suaves definidas sobre el espacio de fases. Las cantidades físicas medibles del sistema en un dado instante, como la energía, son halladas evaluando el Hamiltoniano en un punto del espacio de fases (q_0, p_0) que caracteriza el estado del sistema en dicho instante. Matemáticamente, esto se resume de la siguiente forma

$$E = \int dqdp H(q, p) \delta^{(2)}(q - q_0, p - p_0) \quad (2.53)$$

El objetivo de esta sección es abordar los sistemas cuánticos. La diferencia más sobresaliente es que en cuántica, a consecuencia del principio de incerteza de Heisenberg, los estados del sistema no pueden ser representados como puntos de un espacio de fases. Esto conlleva a que el álgebra conmutativa clásica de observables debe ser reemplazada por un álgebra no-conmutativa cuántica.

En la forma tradicional de presentar la Mecánica Cuántica, la no-conmutatividad es implementada representando los observables como operadores lineales que actúan sobre un espacio de Hilbert, donde los autovectores forman una base de dicho espacio y los autovalores son los posibles resultados de una medida. No obstante, la forma en que la Mecánica Cuántica se reduce a su contraparte clásica en el límite adecuado es aún materia de debate.

La cuantización por deformación pretende resolver este problema incorporando la no-conmutatividad a través de un producto de funciones sobre el espacio de fases no-conmutativo. Los observables son descritos por las mismas funciones que en el caso clásico. El principio de incerteza es una consecuencia de que los estados físicos son distribuciones sobre el espacio de fases que no están localizadas, en contraste con lo que sucede en el caso clásico donde la distribución toma la forma de una delta de Dirac. Cuando evaluamos un observable en un dado estado de acuerdo al análogo cuántico de la ecuación (2.53), toda una región contribuye al valor obtenido, siendo así una especie de promedio del observable en ese estado particular.

Consideremos funciones complejas suaves. El producto estrella de dos funciones $f \star g$ es una nueva función suave, la cual queda descrita por la serie:

$$f \star g = \sum_{n=0}^{\infty} (i\hbar)^n C_n(f, g) = C_0(fg) + (i\hbar) C_1(f, g) + O(\hbar^2), \quad (2.54)$$

donde los coeficientes $C_n(f, g)$ son funciones de f y g y sus derivadas. Es razonable exigirle a este producto las siguientes propiedades

1. $\sum C_j(C_k(f, g), h) = \sum C_j(f, C_k(g, h)), \quad j + k = n$
2. $C_0(f, g) = fg$
3. $C_1(f, g) - C_1(g, f) = \{f, g\}$

para garantizar la asociatividad $f \star (g \star h) = (f \star g) \star h$ (condición 1), asegurar que en el límite clásico $\hbar \rightarrow 0$ el producto se reduzca al usual, $f \star g \rightarrow fg$ (condición 2), y proveer una conexión entre el comportamiento clásico y cuántico (condición 3). En efecto, si se define

$$[f, g]_\star = f \star g - g \star f, \quad (2.55)$$

la condición 3 garantiza que

$$\lim_{\hbar \rightarrow 0} \frac{1}{i\hbar} [f, g]_\star = \{f, g\} \quad (2.56)$$

Si nos restringimos a un espacio Euclídeo $\mathcal{M} = \mathbb{R}^{2n}$, se conoce una expresión cerrada para dicho producto y sus coeficientes. En este caso, las componentes del corchete de Poisson ω^{ij} pueden ser tomadas como constantes, de forma que el coeficiente C_1 sea antisimétrico y esté dado por la siguiente expresión:

$$C_1(f, g) = \frac{1}{2} \omega^{ij} (\partial_i f) (\partial_j g) = \frac{1}{2} \{f, g\}. \quad (2.57)$$

Este producto es conocido como producto Moyal y viene dado por:

$$f(z) \star_M g(z') := \exp \left(\frac{i\hbar}{2} \omega^{ij} \frac{\partial}{\partial z^i} \frac{\partial}{\partial z'^j} \right) f(z) g(z') \Big|_{z=z'}. \quad (2.58)$$

Antes de continuar introduciremos una notación conveniente. Denotaremos a las derivadas de forma vectorial indicando si las mismas actúan sobre las funciones a izquierda o derecha. Por ejemplo

$$f \overleftarrow{\partial}_{q^i} g = \frac{\partial f}{\partial q^i} g, \quad f \overrightarrow{\partial}_{p_i} g = f \frac{\partial g}{\partial p_i}, \quad (2.59)$$

de forma tal que

$$\{f, g\}_{\omega_0} = f \overleftrightarrow{\omega}_0 g \quad (2.60)$$

donde

$$\overleftrightarrow{\omega}_0 := \overleftarrow{\partial}_q \overrightarrow{\partial}_p - \overleftarrow{\partial}_p \overrightarrow{\partial}_q. \quad (2.61)$$

Cuando no haya riesgo de confusión, como en esta última ecuación, daremos por sobreentendido que hay una suma implícita de índices sobre el total de grados de libertad del sistema.

En coordenadas canónicas (donde $\omega = \omega_0$) la ecuación (2.58) se reduce a

$$\begin{aligned} (f \star_M g)(q, p) &:= f(q, p) \exp \left(\frac{i\hbar}{2} (\overleftarrow{\partial}_q \cdot \overrightarrow{\partial}_p - \overleftarrow{\partial}_p \cdot \overrightarrow{\partial}_q) \right) g(q, p) = \\ &= \sum_{m, n=0}^{\infty} \left(\frac{i\hbar}{2} \right)^{m+n} \frac{(-1)^m}{m!n!} (\partial_q^m \partial_p^n f) (\partial_q^n \partial_p^m g). \end{aligned} \quad (2.62)$$

Una forma de expresar este producto que resulta particularmente útil viene dada por

$$(f \star_M g)(q, p) = f \left(q + \frac{i\hbar}{2} \partial_{p'}, p - \frac{i\hbar}{2} \partial_{q'} \right) g(q', p') \Big|_{(q,p)=(q',p')}. \quad (2.63)$$

Es interesante aclarar que no es el único producto estrella definible sobre \mathbb{R}^{2n} . Sin embargo, todos son cohomológicamente equivalentes, es decir, cualesquiera dos de ellos estarán relacionados por un operador invertible,

$$f \star' g = T^{-1} (T(f) \star (Tg)). \quad (2.64)$$

Esta equivalencia es de tipo matemática pero no física¹¹.

Ejemplo 4

El producto Standard está definido como

$$f \star_S g = f \exp \left(i\hbar \overleftarrow{\partial}_q \overrightarrow{\partial}_p \right) g, \quad (2.65)$$

y está relacionado con el Moyal dado en (2.58), a través del operador

$$T = \exp \left(-\frac{1}{2} i\hbar \overrightarrow{\partial}_q \overrightarrow{\partial}_p \right). \quad (2.66)$$

■

En la primera parte del trabajo nos interesaremos en estudiar las consecuencias físicas derivadas de una forma simpléctica no-canónica como la dada en (2.26), en el contexto de Mecánica Cuántica en 2 dimensiones espaciales.

Denotemos,

$$\overleftrightarrow{\omega}_{nc} := \overleftrightarrow{\omega}_0 + \frac{\theta}{\hbar} \left(\overleftarrow{\partial}_{x_1} \overrightarrow{\partial}_{x_2} - \overleftarrow{\partial}_{x_2} \overrightarrow{\partial}_{x_1} \right) + \frac{\kappa}{\hbar} \left(\overleftarrow{\partial}_{\pi_1} \overrightarrow{\partial}_{\pi_2} - \overleftarrow{\partial}_{\pi_2} \overrightarrow{\partial}_{\pi_1} \right) \quad (2.67)$$

de forma que

$$\{f, g\}_c := f \overleftrightarrow{\omega}_0 g, \quad \{f, g\}_{nc} := f \overleftrightarrow{\omega}_{nc} g. \quad (2.68)$$

El álgebra no-conmutativa asociada, puede ser representada a través del producto

$$f \star_M g = f \exp \left(\frac{i\hbar}{2} \overleftrightarrow{\omega}_{nc} \right) g, \quad (2.69)$$

de donde se deduce

$$[x_1; x_2]_{\star_M}^{nc} = i\theta, \quad [\pi_1; \pi_2]_{\star_M}^{nc} = i\kappa, \quad [x_i; \pi_j]_{\star_M}^{nc} = i\hbar \delta_{ij}. \quad (2.70)$$

En éstas relaciones de conmutación (que pueden pensarse como una generalización del caso usual) aparece incertezas asociadas a la medición simultánea de las coordenadas y de los momentos del sistema, medidas por los parámetros θ y κ respectivamente. En otras palabras, a consecuencia de los conmutadores de las variables dinámicas (ecuación (2.70)), el espacio queda cuantizado y forma

¹¹Referimos al lector a [66] donde se muestran las diferencias físicas de la representación Moyal y Voros del producto estrella para el caso particular del oscilador armónico. Esta breve explicación del mecanismo de cuantización por deformación se ha tomado de esa referencia.

un álgebra de Lie distinta del álgebra de Heisenberg usual.

El interés en estudiar sistemas con este tipo de relaciones quedará explícito más adelante, pero previo a ello resumamos algunas de las propiedades más relevantes del producto Moyal, que en lo sucesivo será identificado tan solo como $f \star g$.

- Asociatividad,

$$(f(z) \star g(z)) \star h(z) = f(z) \star (g(z) \star h(z)) \quad (2.71)$$

- Difiere del producto usual en una derivada total,

$$f(z) \star g(z) = f(z)g(z) + \partial_\mu \Lambda^\mu [f, g] \quad (2.72)$$

siendo

$$\Lambda^\mu [f, g] = \frac{i}{2} \theta^{\mu\nu} f(z) \partial_\nu g(z) - \frac{1}{8} \theta^{\mu\nu} \theta^{\alpha\beta} \partial_\alpha f(z) \partial_\nu \partial_\beta g(z) + \dots \quad (2.73)$$

- Propiedad cíclica bajo el signo de integral. Por la propiedad anterior, la integral del producto estrella de dos funciones difiere del caso usual en un término de borde que, para el caso de funciones de cuadrado integrables o funciones definidas en un espacio sin bordes, se anula,

$$\int f(z) \star g(z) dz = \int f(z)g(z) dz \quad (2.74)$$

- Regla de Leibniz,

$$\partial_\mu (f(z) \star g(z)) = \partial_\mu f(z) \star g(z) + f(z) \star \partial_\mu g(z). \quad (2.75)$$

- La conjugación compleja es una involución antilineal,

$$\overline{f(z) \star g(z)} = \bar{g}(z) \star \bar{f}(z) \quad (2.76)$$

■

Hasta aquí se han considerado funciones de p 's y q 's, y el producto Moyal estaba definido como en la ecuación (2.58). A continuación tendremos en mente que el Hamiltoniano H es función tanto de coordenadas como de momentos $H = H(q, p)$, mientras que la función de onda ψ es solo función de las coordenadas $\psi = \psi(q)$.

Es destacable que la interpretación probabilística de la Mecánica Cuántica funciona de la manera usual. Para un Hamiltoniano $H = p^2 + V(q)$, la densidad de probabilidad $\rho \equiv \bar{\psi} \star \psi$ puede ser determinada a través de la ecuación de Schroedinger

$$H \star \psi = i\hbar \partial_t \psi, \quad (2.77)$$

y su compleja conjugada (usando la propiedad de conjugación compleja y que V es un potencial real), llegando así a la ecuación de continuidad

$$\partial_t \rho + \text{div} j = 0, \quad \text{con} \begin{cases} \rho = \bar{\psi} \star \psi \\ j = -i\hbar [\bar{\psi} \star \nabla \psi - \nabla \bar{\psi} \star \psi] \end{cases}, \quad (2.78)$$

lo que implica que la probabilidad total $\int_{\mathbb{R}^2} d^2q \bar{\psi} \star \psi$ es una cantidad conservada.

Dadas funciones C^∞ (por simplicidad tomaremos el dominio de las mismas como \mathbb{R}^4), se puede dar una prescripción para conectarlas unívocamente con operadores en un espacio de Hilbert \mathcal{H} expresados en el orden de Weyl o simétrico

$$f(\mathbf{z}) \leftrightarrow \hat{O}_f(\hat{\mathbf{z}}) = \int d^4k F(\mathbf{k}) \exp(-2\pi i k_\mu \hat{z}^\mu), \quad (2.79)$$

en donde $F(\mathbf{k})$ es la transformada de Fourier de la función $f(\mathbf{z})$

$$F(\mathbf{k}) = \int d^4z f(\mathbf{z}) \exp(2\pi i k_\mu z^\mu). \quad (2.80)$$

Los operadores $\hat{\mathbf{z}}$ respetan el álgebra $[\hat{z}^\mu, \hat{z}^\nu] = i\omega^{\mu\nu}$.

A continuación se enuncia un resultado central, que será explotado a lo largo de esta tesis, para representar el producto Moyal como un producto de operadores en el espacio de Hilbert.

Proposición. Sean \hat{O}_f y \hat{O}_g los operadores asociados a las funciones f y g en el espacio de Hilbert \mathcal{H} . Entonces,

$$\hat{O}_{f \star g} = \hat{O}_f \cdot \hat{O}_g \quad (2.81)$$

Demostración: Evaluemos el producto,

$$\begin{aligned} \hat{O}_f \hat{O}_g &= \int d\mathbf{k} \int d\mathbf{k}' F(\mathbf{k}) G(\mathbf{k}') \exp(-2\pi i k_\mu \hat{z}^\mu) \exp(-2\pi i k'_\mu \hat{z}^\mu) \\ &= \int d\mathbf{k} \int d\mathbf{k}' F(\mathbf{k}) G(\mathbf{k}') \exp(-2\pi i (k + k')_\mu \hat{z}^\mu) \exp(-2\pi^2 k_\mu k'_\nu \omega^{\mu\nu}), \end{aligned} \quad (2.82)$$

donde se ha utilizado la fórmula de Hausdorff.

Por otro lado

$$\hat{O}_{f \star g} = \int d\mathbf{k} H(\mathbf{k}) \exp(-2\pi i k_\mu \hat{z}^\mu), \quad (2.83)$$

en donde denotamos $H(\mathbf{k})$ como la transformada de Fourier del producto estrella, que viene dada por

$$\begin{aligned} H(\mathbf{k}) &= \int d\mathbf{z} f(\mathbf{z}) \star g(\mathbf{z}) \exp(2\pi i k_\mu z^\mu) = \\ &= \int d\mathbf{k}' \int d\mathbf{k}'' F(\mathbf{k}') G(\mathbf{k}'') \int d\mathbf{z} \exp(-2\pi i k'_\mu z^\mu) \star \exp(-2\pi i k''_\mu z^\mu) \exp(2\pi i k_\mu z^\mu) \\ &= \int d\mathbf{k}' \int d\mathbf{k}'' F(\mathbf{k}') G(\mathbf{k}'') \int d\mathbf{z} \exp(-2\pi^2 i k'_\mu k''_\nu \omega^{\mu\nu}) \exp[2\pi i (k - k' - k'')_\mu z^\mu] \\ &= \int d\mathbf{k}' F(\mathbf{k}') G(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \exp(-2\pi^2 i k_\mu k'_\nu \omega^{\mu\nu}), \end{aligned} \quad (2.84)$$

donde se calculó empleando la definición

$$\exp(-2\pi i k'_\mu z^\mu) \star \exp(-2\pi i k''_\mu z^\mu) = \exp(-2\pi^2 i k'_\mu k''_\nu \omega^{\mu\nu}) \exp[-2\pi i (k' + k'')_\mu z^\mu] \quad (2.85)$$

y se utilizó la representación integral de la delta $\delta(k - k' - k'')$. Reemplazando (2.84) en (2.83) y haciendo una traslación $k \rightarrow k + k'$ se obtiene,

$$\hat{O}_{f \star g} = \int d\mathbf{k} \int d\mathbf{k}' F(\mathbf{k}') G(\mathbf{k}) \exp(-2\pi^2 i k_\mu k'_\nu \omega^{\mu\nu}) \exp[-2\pi i (k + k')_\mu \hat{z}^\mu] \quad (2.86)$$

Comparando esta última expresión con (2.82) se obtiene el resultado deseado. ■

Gracias a este resultado podremos representar las variables dinámicas de un sistema cuántico a través del operador asociado que actúa sobre funciones de onda $\psi \in L^2(\mathbb{R}^2, dx_1 dx_2)$. De esta manera la representación Moyal del álgebra dada en (2.70) deviene en

$$[\hat{x}_1; \hat{x}_2] = i\theta, \quad [\hat{\pi}_1; \hat{\pi}_2] = i\kappa, \quad [\hat{x}_i; \hat{\pi}_j] = i\hbar \delta_{ij}. \quad (2.87)$$

que es de nuestro particular interés.

De forma análoga, enunciaremos la siguiente proposición (cuya demostración omitiremos).

Proposición. *Integrar en todo el plano \mathbb{R}^2 una función es equivalente a tomar la traza en el espacio de Hilbert \mathcal{H} de su operador asociado.*

$$\int d^2x f(x^1, x^2) = 2\pi \text{Tr}_{\mathcal{H}} \hat{O}_f \quad (2.88)$$

Por último, es interesante notar que para el caso particular de una no-conmutatividad solo entre coordenadas ($\kappa = 0$), surge de la propia definición del producto Moyal la siguiente igualdad,

$$z^\mu \star f(z) = z^\mu f(z) + \frac{i}{2} \omega^{\mu\nu} \frac{\partial f}{\partial z^\nu} \quad \Rightarrow \quad [z^\mu, f(z)]_\star = i \omega^{\mu\nu} \frac{\partial f}{\partial z^\nu}, \quad (2.89)$$

por lo que tomar derivadas en el espacio de funciones de la posición se corresponde, en el espacio de operadores, con conmutar con los operadores de posición o impulso

$$\frac{\partial}{\partial x^1} \Leftrightarrow \frac{i}{\theta} [\hat{p}, \] \quad \frac{\partial}{\partial x^2} \Leftrightarrow -\frac{i}{\theta} [\hat{q}, \]. \quad (2.90)$$

Por tanto cualquier ecuación, incluyendo las diferenciales, puede traducirse al lenguaje de operadores.

Una base particularmente útil es:

$$\begin{aligned} z &= \frac{1}{\sqrt{2}}(x^1 + ix^2) & \bar{z} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(x^1 - ix^2) \\ \frac{\partial}{\partial z} &\Leftrightarrow -\frac{1}{\sqrt{\theta}} [\hat{a}^\dagger, \] & \frac{\partial}{\partial \bar{z}} &\Leftrightarrow -\frac{1}{\sqrt{\theta}} [\hat{a}, \] \\ \hat{a} &= \frac{1}{\sqrt{2\theta}}(\hat{x}^1 + i\hat{x}^2) & \hat{a}^\dagger &= \frac{1}{\sqrt{2\theta}}(\hat{x}^1 - i\hat{x}^2), \end{aligned} \quad (2.91)$$

donde \hat{a} y \hat{a}^\dagger satisfacen el conmutador usual entre operadores de destrucción y creación.

Violación de invariancia de Lorentz y espacio de Snyder

La Mecánica Cuántica no-conmutativa es un campo de investigación activo en el cual los operadores que corresponden a las diferentes coordenadas espaciales no-conmutan como consecuencia de un espacio-tiempo cuantizado. Esta área resulta relevante ya que explora conceptos físicos fundamentales tales como tiempo, espacio y posición a escalas muy pequeñas, permitiendo una mayor comprensión de los mismos.

Como habíamos anticipado, la primera parte de nuestro trabajo estará enmarcada en el estudio de sistemas físicos cuya forma simpléctica $\overleftrightarrow{\omega}_{nc}$ da origen a un álgebra deformada como la de la ecuación (2.70), que podemos sintetizar como $[\hat{z}_\mu, \hat{z}_\nu] = \theta_{\mu\nu}$ con $\theta_{\mu\nu}$ constante. Esta álgebra está relacionada con predicciones hechas en teoría de cuerdas a bajas energías. Sin embargo, tales relaciones de conmutación conllevan, en general, a un rompimiento de la invariancia de Lorentz, puesto que $\theta_{\mu\nu} \neq 0$ arbitrario establece direcciones preferenciales en el espacio-tiempo. De ese modo, el álgebra de variables dinámicas así deformada no resultaría invariante frente a transformaciones Lorentz generales. Dado que no hay evidencia experimental de una ruptura de dicha invarianza, el dominio de aplicabilidad de estos resultados sería el de muy altas energías o muy cortas distancias, mas allá de la escala de Planck.

Cabe destacar que Hartland Snyder [6, 3] publicó en 1947 la primera formulación de un espacio-tiempo cuantizado de manera tal que garantiza la preservación de la invariancia de Lorentz. La motivación de su trabajo fue diferente a las que surgen hoy en día y suele ser citado por razones históricas, no obstante la audacia de su propuesta para la época y la belleza intrínseca de sus resultados. En ese artículo, Snyder considera un espacio pseudo-euclídeo pentadimensional de signatura (1, 4), \mathbb{M}_5 , en el cual la condición de *intervalo constante* define un espacio de De Sitter de cuatro dimensiones, invariante frente a las transformaciones del grupo $SO(1, 4)$.

La identificación (a menos de un factor constante que fija una escala fundamental de longitud) de los operadores correspondientes a las coordenadas espaciales $x_i, i = 1, 2, 3$, con los generadores de rotaciones en los planos $\langle i, 4 \rangle, i = 1, 2, 3$ (operadores de espectro discreto, dado que generan subgrupos compactos) y de la coordenada temporal con el generador de *boosts* a lo largo de la cuarta dimensión, lleva a que sus conmutadores resulten proporcionales a los seis generadores del subgrupo $SO(1, 3)$, grupo de Lorentz en el espacio de Minkowski usual, \mathbb{M}_4 . En efecto,

$$[x_i, x_j] = i\hbar \alpha \epsilon_{ijk} L_k, \quad [x_i, t] = \frac{i\hbar}{c} \alpha M_i, \quad i, j = 1, 2, 3, \quad (2.92)$$

donde los L_i son los generadores de las rotaciones en el espacio tridimensional y los M_i los correspondientes generadores de boosts. Identificados los momentos como funciones de las coordenadas de \mathbb{M}_5 , el resto de los conmutadores entre variables dinámicas quedan expresados como

$$[x_i, p_j] = i\hbar (\delta_{ij} + \alpha p_i p_j), \quad [t, p_t] = i\hbar (1 - \alpha p_t^2), \quad [x_i, p_t] = c^2 [p_i, t] = i\hbar \alpha p_i p_t. \quad (2.93)$$

Como ambos miembros de esas igualdades corresponden a operadores que se transforman como tensores covariantes frente a transformaciones de $SO(1, 3)$, el álgebra deformada resulta en este caso invariante de Lorentz¹².

Una de las diferencias esenciales entre el espacio de Mecánica Cuántica usual y el de Snyder es la forma en que es incorporado el tiempo, ya que en este caso toma el carácter de operador. Esta

¹²Los trabajos originales de Snyder pueden encontrarse en [6, 7]. Para una lectura más detallada de la no-conmutatividad introducida por Snyder referimos al lector a [68].

es una consecuencia natural de incorporar la invariancia de Lorentz en la formulación, ya que las transformaciones de Lorentz requieren que el espacio y el tiempo sean tratados en pie de igualdad. Sin embargo, una de las complicaciones que emerge de este tipo de descripción se debe precisamente a la introducción de un operador que depende del tiempo.

A pesar de las diferencias mencionadas, esos espacios también comparten algunas características. Por ejemplo, puesto que la definición de las distintas componentes del momento angular es idéntica en ambos casos, el álgebra de conmutadores que cierran estos operadores es la misma. En consecuencia, el espectro del momento angular orbital permanece inalterado.

Otro tipo de álgebra deformada, conocida como Minimal Length Uncertainty Relations (MLUR), fue propuesta por Kempf con la finalidad de que fuera de utilidad para describir sistemas con una longitud fundamental como, por ejemplo, la teoría de cuerdas [67]. Es remarcable el hecho que este tipo de relaciones algebraicas fueron obtenidas de manera independiente en teoría de cuerdas. El álgebra MLUR es una generalización del álgebra de Snyder ya que ésta última puede ser recuperada cuando uno de los parámetros de MLUR tiende a cero.

En la tercera parte de nuestro trabajo exploramos la posibilidad de definir un álgebra que preserve la invariancia de Lorentz como extensión natural de los sistemas estudiados con una no-conmutatividad constante. En esa sección, el conmutador de las variables dinámicas será tomado proporcional a los generadores de una representación unitaria irreducible del grupo de Lorentz en 2+1 dimensiones, $SO(1,2) \approx SL(2, \mathbb{R})$, lo que otorga al espacio de Hilbert la estructura de un producto directo con el espacio de representaciones unitarias irreducibles de ese grupo. Dado que éstas pueden ser realizadas en términos de funciones de cuadrado sumable de una variable, esos modelos pueden considerarse como equivalentes a sistemas con una dimensión compacta adicional.

Parte II

Estructura algebraica de potenciales centrales sobre el espacio de fases no-conmutativo

En esta segunda parte veremos una de las contribuciones originales de esta tesis, la cual fue desarrollada en colaboración con H. A. Falomir y P.A.G. Pisani (de la Universidad Nacional de La Plata) y D. Cárcamo, F Méndez (de la Universidad Santiago de Chile) y M. Loewe (de la Universidad Católica de Chile) y publicadas en [70].

Consideramos sistemas bidimensionales definidos sobre un espacio de fases con parámetros de no-conmutatividad constantes, tanto en los conmutadores entre coordenadas como entre momentos. Estudiamos el generador de las rotaciones sobre el plano no conmutativo y las transformaciones discretas que sobre él pueden definirse. El estudio del álgebra de conmutadores entre formas cuadráticas en las variables dinámicas permite mostrar que existen dos fases cuánticas, caracterizadas por el álgebra de Lie $sl(2, \mathbb{R})$ o $su(2)$ de acuerdo a la relación que cumplan los parámetros de no-conmutatividad. Desde esta perspectiva, analizamos el espectro de los Hamiltonianos de algunos modelos simples con potenciales centrales, como el oscilador armónico isótropo, el problema de Landau o el pozo de potencial circular.

3. INTRODUCCIÓN

El nacimiento de la geometría no-conmutativa [10] ha estimulado el interés en estudiar sistemas cuánticos con conmutadores no-canónicos [47, 69, 71]. Dichos sistemas, resultan tener propiedades interesantes, clarifican algunas posibles consecuencias fenomenológicas y proveen nuevas técnicas para la resolución de problemas convencionales de mecánica cuántica.

En efecto, si en lugar de considerar el conmutador usual entre los momentos, imponemos $[p_i, p_j] \sim \epsilon_{ij}B$ (con B constante) para un Hamiltoniano $H = \frac{1}{2}p^2$, la partícula libre se convierte en el problema de Landau, donde B desempeña el rol de un campo magnético en la dirección ortogonal al plano 1-2. Por otro lado, si se propone una no-conmutatividad solo en el espacio de coordenadas $\{x_1, x_2\}$, *i.e.* $[x_i, x_j] \sim \epsilon_{ij}\theta$ (con θ constante), el Hamiltoniano del oscilador armónico (en el límite de grandes masas) resulta equivalente, al problema de Landau convencional [72].

Típicamente, conmutadores deformados de esa manera rompen la invarianza de Lorentz [4, 5].

En la presencia de invarianza traslacional y ausencia de interacciones, la no-conmutatividad no tiene efectos físicos. No obstante, cuando dicha invarianza es rota a través de la introducción de bordes o de interacciones, hay consecuencias inducidas por el efecto de la no-conmutatividad. por ejemplo, en [73] se mostró que debido a la naturaleza del espacio no-conmutativo aún en el límite termodinámico el estado de vacío de un gas de Fermi interactuante a través de un potencial Coulombiano apantallado es modificado a segundo orden en teoría de perturbaciones.

Muchos problemas de mecánica cuántica no-conmutativa con diferentes tipos de interacciones han sido estudiados pero hay pocos resultados dedicados al estudio de pozos de potencial, los que permiten introducir contornos efectivos en esos espacios difusos [74].

El propósito de la presente parte será el estudio de modelos cuánticos en dos dimensiones espaciales, con no-conmutatividad tanto entre coordenadas como entre momentos, haciendo especial énfasis en potenciales centrales. En particular, discutiremos de forma explícita algunos potenciales cuadráticos como el oscilador armónico o el problema de Landau, y el pozo circular finito e infinito.

Primero definiremos los potenciales centrales en este espacio difuso y mostraremos que estos problemas poseen una simetría $SO(2)$.

4. EL ESPACIO DE FASES NO-CONMUTATIVO EN 2 DIMENSIONES

El espacio de fases no-conmutativo sobre el cual construiremos los modelos de Mecánica Cuántica a considerar, con conmutadores no triviales entre coordenadas y entre momentos [75, 76], queda caracterizado por las siguientes relaciones de conmutación entre los operadores hermíticos $\hat{x}_i, \hat{\pi}_i, i = 1, 2$ que los representan:

$$[\hat{x}_i, \hat{x}_j] = \imath\theta \epsilon_{ij}, \quad [\hat{x}_i, \hat{\pi}_j] = \imath\delta_{ij}, \quad [\hat{\pi}_i, \hat{\pi}_j] = \imath\kappa \epsilon_{ij}, \quad (4.1)$$

donde θ y κ son los parámetros (reales) de no-conmutatividad. Sin pérdida de generalidad, tomamos $\theta \geq 0$. Estas relaciones se reducen al álgebra de Heisenberg usual en el límite $\theta, \kappa \rightarrow 0$,

$$[q_i, q_j] = 0, \quad [q_i, p_j] = \imath\delta_{ij}, \quad [p_i, p_j] = 0. \quad (4.2)$$

De (4.1), se puede verificar inmediatamente que el generador de las rotaciones sobre este plano no-conmutativo viene dado por [48]

$$\hat{L} := \frac{1}{(1 - \theta\kappa)} \left\{ (\hat{x}_1\hat{\pi}_2 - \hat{x}_2\hat{\pi}_1) + \frac{\theta}{2} (\hat{\pi}_1^2 + \hat{\pi}_2^2) + \frac{\kappa}{2} (\hat{x}_1^2 + \hat{x}_2^2) \right\}, \quad (4.3)$$

para $\kappa\theta \neq 1$. En efecto, las ecuaciones (4.1) implican que \hat{L} transforma a $\hat{\mathbf{x}}$ y $\hat{\boldsymbol{\pi}}$ como vectores,

$$\left[\hat{L}, \hat{x}_i\right] = \iota \epsilon_{ij} \hat{x}_j, \quad \left[\hat{L}, \hat{\pi}_i\right] = \iota \epsilon_{ij} \hat{\pi}_j. \quad (4.4)$$

Por lo tanto,

$$\left[\hat{L}, \hat{\mathbf{x}}^2\right] = 0, \quad \left[\hat{L}, \hat{\boldsymbol{\pi}}^2\right] = 0 \quad (4.5)$$

y, consecuentemente, una partícula viviendo sobre este plano no-conmutativo y sujeta a un potencial central $V(\hat{\mathbf{x}}^2)$, cuyo Hamiltoniano viene dado por

$$\hat{H} = \frac{1}{2\mu} \hat{\boldsymbol{\pi}}^2 + V(\hat{\mathbf{x}}^2) \quad (4.6)$$

(donde μ es un parámetro de masa), conmuta con \hat{L} , por lo que presenta una simetría $SO(2)$.

Para el valor crítico de $\kappa_c = \theta^{-1}$ (donde \hat{L} en la ecuación (4.3) no está definido), el álgebra de conmutadores en (4.1) se reduce a

$$[\hat{x}_i, \hat{x}_j] = \iota\theta \epsilon_{ij}, \quad [\hat{x}_i, \hat{\pi}_j] = \iota \delta_{ij}, \quad [\hat{\pi}_i, \hat{\pi}_j] = \iota\theta^{-1} \epsilon_{ij}. \quad (4.7)$$

Estas relaciones pueden satisfacerse definiendo un único par de variables dinámicas, $\hat{x}_1 := -\theta \hat{\pi}_2$, $\hat{\pi}_1 := \theta^{-1} \hat{x}_2$. Luego, para este valor de κ en particular ocurre una especie de *reducción dimensional* [48].

Mencionemos que los generadores de las traslaciones sobre el plano de coordenadas no-conmutativo, pueden ser definidos como

$$\hat{K}_i := \frac{1}{1 - \theta\kappa} (\hat{\pi}_i - \kappa \epsilon_{ij} \hat{x}_j), \quad (4.8)$$

y juegan un rol similar al de los *generadores de las traslaciones magnéticas* en la presencia de un campo magnético externo perpendicular al plano [77, 78]. En efecto, tenemos

$$\begin{aligned} [\hat{K}_i, \hat{x}_j] &= -\iota \delta_{ij}, & [\hat{K}_i, \hat{\pi}_j] &= 0, \\ [\hat{K}_i, \hat{K}_j] &= \frac{-\iota\kappa \epsilon_{ij}}{1 - \theta\kappa}, & [\hat{L}, \hat{K}_i] &= \iota \epsilon_{ij} \hat{K}_j. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Si bien no son éstas las álgebras de Lie que nos permitirán resolver el espectro de Hamiltonianos con potencial central, señalemos que \hat{L} puede ser considerado como uno de los generadores de un álgebra $su(2)$ o $sl(2, \mathbb{R})$, cuyos generadores se completan con expresiones bilineales en $\hat{\pi}_i$ y \hat{K}_i , de acuerdo a que κ sea menor o mayor que el valor crítico κ_c . Para más detalles, vea el Apéndice E.

En la siguiente sección discutiremos las simetrías discretas de este espacio de fases no-conmutativo, para luego considerar la estructura algebraica general de un Hamiltoniano con un potencial central a partir del álgebra de conmutadores entre formas cuadráticas invariantes frente a rotaciones.

5. SIMETRÍAS DISCRETAS PARA $\kappa < \kappa_c$

Inversión temporal

En el plano conmutativo usual, la transformación de time-reversal es un operador antilineal unitario que deja invariante las coordenadas y cambia el signo de los momentos. Como consecuencia,

el momento angular $L_0 = q_1 p_2 - q_2 p_1$ cambia su signo. Esto es, por supuesto, consistente con el álgebra de Heisenberg de la ecuación (4.2).

En el caso del álgebra modificada (4.1), una transformación antilineal unitaria $\hat{\mathcal{T}}$ cambia el signo de los lados derechos de las tres ecuaciones y, por lo tanto, no puede ser compensado sólo por un cambio en el signo del operador de momento.

Sin embargo, podemos construir un conjunto consistente de variables dinámicas transformadas por *time-reversal* que satisfacen las ecuaciones (4.1) con un signo menos en el lado derecho. Definamos $\hat{\mathcal{T}}$ mediante su acción como

$$\begin{aligned}\hat{x}_i^{\mathcal{T}} &:= \hat{\mathcal{T}} \hat{x}_i \hat{\mathcal{T}}^\dagger = \frac{1}{\sqrt{1-\theta\kappa}} (\hat{x}_i + \theta \epsilon_{ij} \hat{\pi}_j), \\ \hat{\pi}_i^{\mathcal{T}} &:= \hat{\mathcal{T}} \hat{\pi}_i \hat{\mathcal{T}}^\dagger = \frac{1}{\sqrt{1-\theta\kappa}} (-\hat{\pi}_i + \kappa \epsilon_{ij} \hat{x}_j),\end{aligned}\tag{5.1}$$

expresiones que se reducen a aquellas encontradas en [79] en el límite $\kappa \rightarrow 0$.

Es simple verificar que

$$[\hat{x}_i^{\mathcal{T}}, \hat{x}_j^{\mathcal{T}}] = -\theta \epsilon_{ij}, \quad [\hat{x}_i^{\mathcal{T}}, \hat{\pi}_j^{\mathcal{T}}] = -\iota \delta_{ij}, \quad [\hat{\pi}_i^{\mathcal{T}}, \hat{\pi}_j^{\mathcal{T}}] = -\iota \kappa \epsilon_{ij}.\tag{5.2}$$

Advertir también que las ecuaciones (5.1), para $\theta, \kappa \rightarrow 0$, se reducen de forma suave a la transformación usual de inversión temporal de las variables dinámicas de las ecuaciones (4.2).

También se puede verificar que el generador de las rotaciones es transformado por *time reversal* como

$$\hat{\mathcal{T}} \hat{L} \hat{\mathcal{T}}^\dagger = -\hat{L}.\tag{5.3}$$

Para el cuadrado de la *distancia radial* sobre el plano no-conmutativo, $\hat{\mathbf{x}}^2$, se tiene

$$\begin{aligned}\hat{\mathcal{T}} \hat{\mathbf{x}}^2 \hat{\mathcal{T}}^\dagger &= \frac{1}{1-\theta\kappa} \{ \hat{\mathbf{x}}^2 + \theta^2 \hat{\boldsymbol{\pi}}^2 + 2\theta (\hat{x}_1 \hat{\pi}_2 - \hat{x}_2 \hat{\pi}_1) \} = \\ &= \hat{\mathbf{x}}^2 + 2\theta \hat{L},\end{aligned}\tag{5.4}$$

donde fue utilizada la ecuación (4.3).

Para el cuadrado del momento $\hat{\boldsymbol{\pi}}^2$ obtenemos

$$\begin{aligned}\hat{\mathcal{T}} \hat{\boldsymbol{\pi}}^2 \hat{\mathcal{T}}^\dagger &= \frac{1}{(1-\theta\kappa)} \left\{ \hat{\boldsymbol{\pi}}^2 + \kappa^2 \hat{\mathbf{x}}^2 + \frac{2\kappa}{\hbar} (\hat{x}_1 \hat{\pi}_2 - \hat{x}_2 \hat{\pi}_1) \right\} = \\ &= \hat{\boldsymbol{\pi}}^2 + 2\kappa \hat{L}\end{aligned}\tag{5.5}$$

y para el producto escalar entre $\hat{\mathbf{x}}$ y $\hat{\boldsymbol{\pi}}$

$$\hat{\mathcal{T}} (\hat{\mathbf{x}} \cdot \hat{\boldsymbol{\pi}} + \hat{\boldsymbol{\pi}} \cdot \hat{\mathbf{x}}) \hat{\mathcal{T}}^\dagger = -(\hat{\mathbf{x}} \cdot \hat{\boldsymbol{\pi}} + \hat{\boldsymbol{\pi}} \cdot \hat{\mathbf{x}}).\tag{5.6}$$

En consecuencia, \hat{L} y $(\hat{\mathbf{x}} \cdot \hat{\boldsymbol{\pi}} + \hat{\boldsymbol{\pi}} \cdot \hat{\mathbf{x}})$ tienen las propiedades de transformación usuales, pero ni $\hat{\mathbf{x}}^2$ ni $\hat{\boldsymbol{\pi}}^2$ quedan invariantes por una transformación de inversión temporal, aunque esta simetría es recuperada en ambos casos en el límite conmutativo.

Paridad

En el espacio bidimensional usual, una transformación de *paridad* es realizada por un operador lineal unitario que cambia (por ejemplo) el signo de q_2 y p_2 , dejando invariante¹³ q_1 y p_1 . Pero en el espacio de fases no-conmutativo, tal transformación de las variables dinámicas no deja invariante el primero y el tercero de los conmutadores de las ecuación (4.1).

En su lugar, definimos

$$\begin{aligned}\hat{x}_1^{\mathcal{P}} &:= \hat{\mathcal{P}}\hat{x}_1\hat{\mathcal{P}}^\dagger = \hat{x}_1^{\mathcal{T}}, & \hat{x}_2^{\mathcal{P}} &:= \hat{\mathcal{P}}\hat{x}_2\hat{\mathcal{P}}^\dagger = -\hat{x}_2^{\mathcal{T}}, \\ \hat{\pi}_1^{\mathcal{P}} &:= \hat{\mathcal{P}}\hat{\pi}_1\hat{\mathcal{P}}^\dagger = -\hat{\pi}_1^{\mathcal{T}}, & \hat{\pi}_2^{\mathcal{P}} &:= \hat{\mathcal{P}}\hat{\pi}_2\hat{\mathcal{P}}^\dagger = \hat{\pi}_2^{\mathcal{T}},\end{aligned}\tag{5.7}$$

donde $\hat{x}_i^{\mathcal{T}}$ y $\hat{\pi}_i^{\mathcal{T}}$ vienen dados por las ecuaciones (5.1).

También podemos analizar el comportamiento de las expresiones cuadráticas en las variables dinámicas al ser transformadas por esta transformación de paridad. En ese caso, obtenemos,

$$\begin{aligned}\hat{\mathcal{P}}\hat{L}\hat{\mathcal{P}}^\dagger &= \hat{\mathcal{T}}\hat{L}\hat{\mathcal{T}}^\dagger = -\hat{L}, \\ \hat{\mathcal{P}}\hat{\mathbf{x}}^2\hat{\mathcal{P}}^\dagger &= \hat{\mathcal{T}}\hat{\mathbf{x}}^2\hat{\mathcal{T}}^\dagger = \hat{\mathbf{x}}^2 + 2\theta\hat{L}, \\ \hat{\mathcal{P}}\hat{\boldsymbol{\pi}}^2\hat{\mathcal{P}}^\dagger &= \hat{\mathcal{T}}\hat{\boldsymbol{\pi}}^2\hat{\mathcal{T}}^\dagger = \hat{\boldsymbol{\pi}}^2 + 2\kappa\hat{L},\end{aligned}\tag{5.8}$$

$$\hat{\mathcal{P}}\{\iota(\hat{\mathbf{x}} \cdot \hat{\boldsymbol{\pi}} + \hat{\boldsymbol{\pi}} \cdot \hat{\mathbf{x}})\}\hat{\mathcal{P}}^\dagger = \hat{\mathcal{T}}\{\iota(\hat{\mathbf{x}} \cdot \hat{\boldsymbol{\pi}} + \hat{\boldsymbol{\pi}} \cdot \hat{\mathbf{x}})\}\hat{\mathcal{T}}^\dagger = \iota(\hat{\mathbf{x}} \cdot \hat{\boldsymbol{\pi}} + \hat{\boldsymbol{\pi}} \cdot \hat{\mathbf{x}}).$$

Aquí nuevamente, \hat{L} y $(\hat{\mathbf{x}} \cdot \hat{\boldsymbol{\pi}} + \hat{\boldsymbol{\pi}} \cdot \hat{\mathbf{x}})$ tienen las propiedades usuales de transformación, pero ni $\hat{\mathbf{x}}^2$ ni $\hat{\boldsymbol{\pi}}^2$ quedan invariantes por efecto de la transformación de paridad, a pesar que esta simetría es recuperada en el límite conmutativo en ambos casos.

Finalmente, remarquemos que las transformaciones de inversión temporal y paridad así definidas conmutan como se sigue de las ecuaciones (5.1) y (5.7). En efecto, tenemos

$$\begin{aligned}(\hat{x}_1^{\mathcal{P}})^{\mathcal{T}} &= \hat{x}_1 = (\hat{x}_1^{\mathcal{T}})^{\mathcal{P}}, & (\hat{x}_2^{\mathcal{P}})^{\mathcal{T}} &= -\hat{x}_2 = (\hat{x}_2^{\mathcal{T}})^{\mathcal{P}}, \\ (\hat{\pi}_1^{\mathcal{P}})^{\mathcal{T}} &= -\hat{\pi}_1 = (\hat{\pi}_1^{\mathcal{T}})^{\mathcal{P}}, & (\hat{\pi}_2^{\mathcal{P}})^{\mathcal{T}} &= \hat{\pi}_2 = (\hat{\pi}_2^{\mathcal{T}})^{\mathcal{P}}.\end{aligned}\tag{5.9}$$

Mas aún, la composición $\hat{\mathcal{P}}\hat{\mathcal{T}}$ deja invariante las primeras tres formas cuadráticas previamente consideradas y cambia el signo de la cuarta ,

$$\begin{aligned}\hat{\mathcal{P}}\hat{\mathcal{T}}\hat{L}\hat{\mathcal{T}}^\dagger\hat{\mathcal{P}}^\dagger &= -\hat{\mathcal{P}}\hat{L}\hat{\mathcal{P}}^\dagger = \hat{L}, \\ \hat{\mathcal{P}}\hat{\mathcal{T}}\hat{\mathbf{x}}^2\hat{\mathcal{T}}^\dagger\hat{\mathcal{P}}^\dagger &= \hat{\mathcal{P}}\left(\hat{\mathbf{x}}^2 + 2\theta\hat{L}\right)\hat{\mathcal{P}}^\dagger = \hat{\mathbf{x}}^2 + 2\theta\hat{L} - 2\theta\hat{L} = \hat{\mathbf{x}}^2, \\ \hat{\mathcal{P}}\hat{\mathcal{T}}\hat{\boldsymbol{\pi}}^2\hat{\mathcal{T}}^\dagger\hat{\mathcal{P}}^\dagger &= \hat{\mathcal{P}}\left(\hat{\boldsymbol{\pi}}^2 + 2\kappa\hat{L}\right)\hat{\mathcal{P}}^\dagger = \hat{\boldsymbol{\pi}}^2 + 2\kappa\hat{L} - 2\kappa\hat{L} = \hat{\boldsymbol{\pi}}^2.\end{aligned}\tag{5.10}$$

$$\hat{\mathcal{P}}\hat{\mathcal{T}}(\hat{\mathbf{x}} \cdot \hat{\boldsymbol{\pi}} + \hat{\boldsymbol{\pi}} \cdot \hat{\mathbf{x}})\hat{\mathcal{T}}^\dagger\hat{\mathcal{P}}^\dagger = -\hat{\mathcal{P}}(\hat{\mathbf{x}} \cdot \hat{\boldsymbol{\pi}} + \hat{\boldsymbol{\pi}} \cdot \hat{\mathbf{x}})\hat{\mathcal{P}}^\dagger = -(\hat{\mathbf{x}} \cdot \hat{\boldsymbol{\pi}} + \hat{\boldsymbol{\pi}} \cdot \hat{\mathbf{x}}).$$

¹³ Advertir que el cambio simultáneo de signo tanto en coordenadas como en momento es equivalente a una rotación de π rad sobre el plano.

Consecuentemente, cualquier Hamiltoniano no relativista definido sobre este espacio de fases no-conmutativo con un término cinético proporcional a $\hat{\pi}^2$ y un potencial central permanece invariante frente a la transformación \mathcal{PT} , al igual que \hat{L} .

Definición alternativa de las transformaciones discretas

Remarquemos que estas transformaciones discretas de las variables dinámicas quedan definidas a menos de una transformación lineal *canónica* en $Sp(4, \mathbb{R})$.

Si llamamos $\xi := (\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{\pi}_1, \hat{\pi}_2)^t$, las relaciones de conmutación del álgebra deformada de la ecuación (4.1) pueden ser escritas en forma matricial [48] como $[\xi_i, \xi_j] = \imath \hat{G}$, donde

$$\hat{G} = \begin{pmatrix} \theta \imath \sigma_2 & \mathbf{1}_2 \\ -\mathbf{1}_2 & \kappa \imath \sigma_2 \end{pmatrix} \quad (5.11)$$

siendo σ_2 la segunda matriz de Pauli. Adviértase que el determinante

$$\det([\xi_i, \xi_j]) = (1 - \kappa\theta)^2 \quad (5.12)$$

se anula para el *valor crítico* $\kappa_c = \theta^{-1}$ [1, 48], donde los operadores $\hat{x}_i, \hat{\pi}_i, i = 1, 2$, no representan a variables dinámicas independientes, como fue previamente discutido.

Estas relaciones de conmutación quedan invariantes frente a una transformación que preserve la hermiticidad de las variables dinámicas y que pertenezca a (una representación equivalente de) el grupo $Sp(4, \mathbb{R})$. En efecto, para $\kappa < \kappa_c$ podemos escribir $\hat{G} = AGA^t$ donde

$$G := \begin{pmatrix} \mathbf{0}_2 & \mathbf{1}_2 \\ -\mathbf{1}_2 & \mathbf{0}_2 \end{pmatrix} = \mathbf{1}_2 \otimes \imath \sigma_2 \quad (5.13)$$

y

$$A = \begin{pmatrix} \lambda \mathbf{1}_2 & -\frac{\theta}{2\lambda} \imath \sigma_2 \\ \frac{\kappa}{2\lambda} \imath \sigma_2 & \lambda \mathbf{1}_2 \end{pmatrix} \quad \text{con} \quad \lambda^2 = \frac{1}{2} \left(1 + \sqrt{1 - \kappa\theta} \right), \quad (5.14)$$

como puede ser fácilmente verificado. Luego, para una transformación lineal $\xi \rightarrow U\xi$ que preserve las relaciones de conmutación tenemos

$$U\hat{G}U^t = \hat{G} \quad \Rightarrow \quad UAGA^tU^t = AGA^t. \quad (5.15)$$

Luego

$$(A^{-1}UA)G(A^{-1}UA)^t = G \quad \Rightarrow \quad (A^{-1}UA) \in Sp(4, \mathbb{R}). \quad (5.16)$$

Por tanto, como fue previamente establecido, las transformaciones discretas \mathcal{T} y \mathcal{P} de las ecuaciones (5.1) y (5.7) quedan definidas a menos de una transformación lineal de $Sp(4, \mathbb{R})$ de las variables dinámicas.

6. SIMETRÍAS DISCRETAS PARA $\kappa > \kappa_c$

Puesto que las variables dinámicas deben ser representadas por operadores hermíticos, vemos que la definición de las transformaciones de inversión temporal y paridad en las ecuaciones (5.1) y (5.7) son válidas sólo para $\kappa < \kappa_c$. Para la región $\kappa > \kappa_c$ debemos adoptar otra definición compatible con las reglas de transformación. Es claro que en esta región no existirá el límite conmutativo.

Entonces, para $\kappa > \kappa_c$ se *define*

$$\begin{aligned}\hat{x}_1^{\mathcal{T}} &= \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{\theta\kappa}}} \left(\hat{x}_1 + \frac{1}{\kappa} \hat{\pi}_2 \right) = \hat{x}_1^{\mathcal{P}}, & \hat{x}_2^{\mathcal{T}} &= \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{\theta\kappa}}} \left(-\hat{x}_2 + \frac{1}{\kappa} \hat{\pi}_1 \right) = -\hat{x}_2^{\mathcal{P}}, \\ \hat{\pi}_1^{\mathcal{T}} &= \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{\theta\kappa}}} \left(\hat{\pi}_1 - \frac{1}{\theta} \hat{x}_2 \right) = -\hat{\pi}_1^{\mathcal{P}}, & \hat{\pi}_2^{\mathcal{T}} &= \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{\theta\kappa}}} \left(-\hat{\pi}_2 - \frac{1}{\theta} \hat{x}_1 \right) = \hat{\pi}_2^{\mathcal{P}},\end{aligned}\tag{6.1}$$

las cuales satisfacen las relaciones de conmutación (4.1) (con un factor (-1) adicional en el lado derecho de las ecuaciones en el caso de la transformación antilineal de inversión temporal) como puede ser fácilmente verificado.

Bajo estas transformaciones discretas, las expresiones cuadráticas previamente consideradas se transforman de acuerdo a

$$\begin{aligned}\hat{\mathcal{T}}\hat{L}\hat{\mathcal{T}}^\dagger &= \hat{\mathcal{P}}\hat{L}\hat{\mathcal{P}}^\dagger = \hat{L}, \\ \hat{\mathcal{T}}\hat{\mathbf{x}}^2\hat{\mathcal{T}}^\dagger &= \hat{\mathcal{P}}\hat{\mathbf{x}}^2\hat{\mathcal{P}}^\dagger = -\frac{\theta}{\kappa} \hat{\boldsymbol{\pi}}^2 - 2\theta \hat{L}, \\ \hat{\mathcal{T}}\hat{\boldsymbol{\pi}}^2\hat{\mathcal{T}}^\dagger &= \hat{\mathcal{P}}\hat{\boldsymbol{\pi}}^2\hat{\mathcal{P}}^\dagger = -\frac{\kappa}{\theta} \hat{\mathbf{x}}^2 - 2\kappa \hat{L},\end{aligned}\tag{6.2}$$

$$\hat{\mathcal{T}} \{ \iota (\hat{\mathbf{x}} \cdot \hat{\boldsymbol{\pi}} + \hat{\boldsymbol{\pi}} \cdot \hat{\mathbf{x}}) \} \hat{\mathcal{T}}^\dagger = \hat{\boldsymbol{\pi}} \{ \iota (\hat{\mathbf{x}} \cdot \hat{\boldsymbol{\pi}} + \hat{\boldsymbol{\pi}} \cdot \hat{\mathbf{x}}) \} \hat{\mathcal{P}}^\dagger = -\iota (\hat{\mathbf{x}} \cdot \hat{\boldsymbol{\pi}} + \hat{\boldsymbol{\pi}} \cdot \hat{\mathbf{x}}),$$

(compárese con la ecuación (5.8)). Estas cuatro formas cuadráticas son además invariantes frente a la transformación \mathcal{PT} .

Estas reglas de transformación difieren de aquellas dadas en las ecuaciones (5.3) - (5.6) y (5.8) para $\kappa < \kappa_c$, a pesar que la relación entre $\xi^{\mathcal{T}}$ y $\xi^{\mathcal{P}}$ es la misma que en ecuación (5.7) y que sus definiciones son consistentes con las del álgebra deformada dada en (4.1).

En esta región, las variables dinámicas transformadas por \mathcal{T} y \mathcal{P} están determinadas, al igual que en el caso anterior, a menos de una transformación lineal canónica de $Sp(4, \mathbb{R})$. En efecto, para $\kappa > \kappa_c$ podemos escribir $\hat{G} = BGB^t$ donde

$$B = \left(\frac{1}{\theta\kappa} \right)^{\frac{1}{4}} CD\tag{6.3}$$

con

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{\frac{\theta}{\kappa}} & 0 \\ 0 & \sqrt{\frac{\kappa}{\theta}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} \gamma \mathbf{1}_2 & -\frac{\theta}{2\gamma} \iota \sigma_2 \\ \frac{\kappa}{2\gamma} \iota \sigma_2 & \gamma \mathbf{1}_2 \end{pmatrix},\tag{6.4}$$

y

$$\gamma = \sqrt{\frac{\theta\kappa}{2}} \left(1 + \sqrt{1 - \frac{1}{\theta\kappa}} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (6.5)$$

como puede ser facilmente verificado.

Luego, una transformación lineal $\xi \rightarrow U\xi$ que preserve las relaciones de conmutación debe satisfacer

$$UBGB^tU^t = BGB^t \quad \Rightarrow \quad (B^{-1}UB) \in Sp(4, \mathbb{R}). \quad (6.6)$$

7. ESTRUCTURA ALGEBRAICA DE HAMILTONIANOS CON POTENCIALES CENTRALES

En este punto estudiaremos la estructura algebraica de los Hamiltonianos (no relativistas) con potenciales centrales definidos sobre el espacio de fases no conmutativo.

Mostraremos que el problema de autovalores puede ser referido a espacios de representación de representaciones unitarias irreducibles de los grupos $SL(2, \mathbb{R})$ o $SU(2)$, de acuerdo a que $\kappa < \kappa_c$ o $\kappa > \kappa_c$ respectivamente. La existencia de dos *fases cuánticas* para estos sistemas había sido encontrada en [1] empleando una realización particular de las variables dinámicas no-conmutativas en término de operadores de creación y destrucción usuales. En lo que sigue mostraremos que esta estructura algebraica es independiente de esta realización y está completamente determinada a partir de las relaciones de conmutación dadas por la ecuación (4.1).

El caso $0 < \kappa < \kappa_c$

Consideremos la región con $0 < \kappa < \kappa_c$ donde definimos

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_0 &= \frac{1}{4}\sqrt{\theta\kappa} \left(\frac{\hat{\pi}^2}{\kappa} + \frac{\hat{\mathbf{x}}^2}{\theta} + 2\hat{L} \right) = \mathcal{J}_0^\dagger, \\ \mathcal{J}_\pm &= \frac{1}{4\sqrt{\frac{1}{\theta\kappa} - 1}} \left\{ -\frac{\hat{\pi}^2}{\kappa} + \frac{\hat{\mathbf{x}}^2}{\theta} \mp \frac{i}{\sqrt{\theta\kappa}} (\hat{\pi} \cdot \hat{\mathbf{x}} + \hat{\mathbf{x}} \cdot \hat{\pi}) \right\} = \mathcal{J}_\mp^\dagger. \end{aligned} \quad (7.1)$$

Es inmediata la verificación de que estos operadores satisfacen las relaciones de conmutación características del álgebra de Lie $sl(2, \mathbb{R})$,

$$[\mathcal{J}_0, \mathcal{J}_\pm] = \pm\mathcal{J}_\pm, \quad [\mathcal{J}_+, \mathcal{J}_-] = -2\mathcal{J}_0, \quad (7.2)$$

con $\mathcal{J}_\pm = \mathcal{J}_1 \pm i\mathcal{J}_2$ ($\mathcal{J}_i, i = 0, 1, 2$, operadores hermíticos) y el invariante cuadrático de Casimir $\mathcal{J}^2 = \mathcal{J}_0(\mathcal{J}_0 \mp 1) - \mathcal{J}_\pm\mathcal{J}_\mp = \mathcal{J}_0^2 - \mathcal{J}_1^2 - \mathcal{J}_2^2$ dado por

$$\mathcal{J}^2 = \frac{\theta\kappa}{16} \left\{ \left(\frac{\hat{\mathbf{x}}^2}{\theta} + \frac{\hat{\pi}^2}{\kappa} + 2\hat{L} \right)^2 - \frac{1}{1 - \theta\kappa} \left(\frac{\hat{\mathbf{x}}^2}{\theta} - \frac{\hat{\pi}^2}{\kappa} \right)^2 - \frac{(\hat{\pi} \cdot \hat{\mathbf{x}} + \hat{\mathbf{x}} \cdot \hat{\pi})^2}{\theta\kappa(1 - \theta\kappa)} \right\}, \quad (7.3)$$

el cual no es un operador definido positivo [80].

Las ecuaciones (4.4)-(4.5) implican

$$[\hat{L}, \mathcal{J}_0] = 0, \quad [\hat{L}, \mathcal{J}_\pm] = 0 \quad \Rightarrow \quad [\hat{L}, \mathcal{J}^2] = 0. \quad (7.4)$$

Luego, \hat{L} puede ser incorporado como una extensión central del álgebra de $sl(2, \mathbb{R})$.

De hecho, se puede verificar que

$$\mathcal{J}^2 = \frac{1}{4} (\hat{L}^2 - 1) \geq -\frac{1}{4}, \quad (7.5)$$

lo que impone una condición acerca de las representaciones irreducibles aceptables del producto directo de los grupos $SL(2, \mathbb{R}) \otimes SO(2)$ (donde el segundo factor (Abeliano) es generado por \hat{L}). En particular, estas relaciones implican que sólo las *clases discretas* de representaciones unitarias irreducibles de $SL(2, \mathbb{R})$ [80, 81] serán de interés para nuestro propósito. La construcción de las representaciones unitarias irreducibles de $SL(2, \mathbb{R})$ es reseñada en el Apéndice B, mientras que la relación entre \mathcal{J}^2 y \hat{L}^2 es demostrada en el Apéndice C.

Puesto que un Hamiltoniano general $\hat{H}(\hat{\boldsymbol{\pi}}, \hat{\boldsymbol{x}})$ que conmuta con \hat{L} sólo puede ser función de $\hat{\boldsymbol{\pi}}^2$, $\hat{\boldsymbol{x}}^2$, $(\hat{\boldsymbol{\pi}} \cdot \hat{\boldsymbol{x}} + \hat{\boldsymbol{x}} \cdot \hat{\boldsymbol{\pi}})$ y \hat{L} , y a partir de las ecuaciones (7.1) podemos escribir

$$\begin{aligned} \frac{\hat{\boldsymbol{x}}^2}{\theta} &= \frac{2}{\sqrt{\theta\kappa}} \mathcal{J}_0 + \sqrt{\frac{1}{\theta\kappa} - 1} (\mathcal{J}_+ + \mathcal{J}_-) - \hat{L}, \\ \frac{\hat{\boldsymbol{\pi}}^2}{\kappa} &= \frac{2}{\sqrt{\theta\kappa}} \mathcal{J}_0 - \sqrt{\frac{1}{\theta\kappa} - 1} (\mathcal{J}_+ + \mathcal{J}_-) - \hat{L}, \\ \frac{(\hat{\boldsymbol{\pi}} \cdot \hat{\boldsymbol{x}} + \hat{\boldsymbol{x}} \cdot \hat{\boldsymbol{\pi}})}{\sqrt{\theta\kappa}} &= 2i \sqrt{\frac{1}{\theta\kappa} - 1} (\mathcal{J}_+ - \mathcal{J}_-), \end{aligned} \quad (7.6)$$

es claro que tales \hat{H} pueden ser expresados en términos de \mathcal{J}_0 , \mathcal{J}_\pm y \hat{L} únicamente. Por tanto, los subespacios característicos simultáneos de \hat{H} y \hat{L} están contenidos en espacios de representación de representaciones unitarias irreducibles del grupo no compacto $SL(2, \mathbb{R})$ (o, equivalentemente, $SU(1, 1)$) que satisfacen la condición de la ecuación (7.5).

Las representaciones unitarias irreducibles en la clase discreta están caracterizadas por el autovalor λ del operador de Casimir \mathcal{J}^2 , que toma valores $\lambda = k(k-1)$ con $k = \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \dots$. Para un k dado, el espacio de representación está generado por los autovectores simultáneos de \mathcal{J}^2 , \mathcal{J}_0 y \hat{L} ,

$$\begin{aligned} \mathcal{J}^2 |k, m, l\rangle &= k(k-1) |k, m, l\rangle, \\ \mathcal{J}_0 |k, m, l\rangle &= m |k, m, l\rangle, \quad \text{con } m = k, k+1, \dots \text{ o } m = -k, -(k+1), \dots, \end{aligned} \quad (7.7)$$

$$\hat{L} |k, m, l\rangle = l |k, m, l\rangle, \quad \text{con } l^2 = (2k-1)^2,$$

Advertir que estas representaciones, que pueden ser denotadas por $\langle k, l \rangle$, no son de dimensión finita [80, 81] (Ver Apéndice B).

Vale la pena mencionar que las transformaciones discretas de inversión temporal y paridad de las ecuaciones (5.8) dejan invariante el álgebra extendida $sl(2, \mathbb{R})$ de las ecuaciones (7.2) y (7.4).

De hecho, mientras que estas transformaciones cambian el signo de la extensión central del álgebra \hat{L} , se puede obtener directamente para el resto de los operadores

$$\begin{aligned}\mathcal{T}\mathcal{J}_0\mathcal{T}^\dagger &= \mathcal{P}\mathcal{J}_0\mathcal{P}^\dagger = \mathcal{J}_0, & \mathcal{T}\mathcal{J}_\pm\mathcal{T}^\dagger &= \mathcal{P}\mathcal{J}_\pm\mathcal{P}^\dagger = \mathcal{J}_\pm, \\ \Rightarrow \mathcal{T}\mathcal{J}^2\mathcal{T}^\dagger &= \mathcal{P}\mathcal{J}^2\mathcal{P}^\dagger = \mathcal{J}^2.\end{aligned}\tag{7.8}$$

Tenemos, por ejemplo,

$$\begin{aligned}\hat{L}\mathcal{T}|k, m, l\rangle &= -\left(\mathcal{T}\hat{L}\mathcal{T}^\dagger\right)\mathcal{T}|k, m, l\rangle = -l\mathcal{T}|k, m, l\rangle \\ \Rightarrow \mathcal{T}|k, m, l\rangle &\sim |k, m, -l\rangle.\end{aligned}\tag{7.9}$$

Luego, la transformación discreta mapea una representación irreducible $\langle k, l \rangle$ de $SL(2, \mathbb{R}) \otimes SO(2)$ que satisface la ecuación (7.5) sobre la otra con el mismo $|l|$, $\langle k, -l \rangle$, dejando invariante la suma directa $\langle k, l \rangle \oplus \langle k, -l \rangle$.

Por otro lado, de ecuación (7.2) se obtiene

$$\langle m, \lambda, l | \mathcal{J}_\pm | m, \lambda, l \rangle = 0.\tag{7.10}$$

Por tanto, la positividad de $\hat{\mathbf{x}}^2$ (o $\hat{\boldsymbol{\pi}}^2$) implica que, para cada representación irreducible,

$$l \leq \frac{2m}{\sqrt{\theta\kappa}}\tag{7.11}$$

para todos los valores de m . En particular, esto es posible sólo para las representaciones irreducibles de $sl(2, \mathbb{R})$ de la *clase discreta* correspondiente a autovalores m enteros o semi-enteros acotados por abajo, $m \geq k$ [80, 81]. En particular, $l \leq 2k/\sqrt{\theta\kappa}$ (advertir que $1/\sqrt{\theta\kappa} > 1$).

Podemos establecer una cota aún mas fuerte si tenemos en cuenta la ecuación (D.4) del Apéndice D, la cual establece que, en cualquier representación unitaria de $sl(2, \mathbb{R})$, tenemos

$$e^{i\alpha X_2} (AX_0 + BX_1) e^{-i\alpha X_2} = A\sqrt{1 - \frac{B^2}{A^2}} X_0\tag{7.12}$$

para A, B real, con $|A| > |B|$ y $\tanh \alpha = B/A$. Luego, $\hat{\mathbf{x}}^2$ en (7.6) (o, equivalentemente, $\hat{\boldsymbol{\pi}}^2$) puede ser diagonalizado por una transformación unitaria de modo que

$$\frac{\hat{\mathbf{x}}^2}{\theta} \rightarrow 2\sqrt{\frac{1}{\theta\kappa} - \left(\frac{1}{\theta\kappa} - 1\right)} \mathcal{J}_0 - \hat{L} = 2\mathcal{J}_0 - \hat{L}.\tag{7.13}$$

Por tanto, la positividad de $\hat{\mathbf{x}}^2$ (o, de forma equivalente, $\hat{\boldsymbol{\pi}}^2$) implica que

$$2m \geq l, \forall m \Rightarrow 2k \geq l.\tag{7.14}$$

Puesto que $l^2 = (2k - 1)^2$, se concluye que

$$l = \pm(2k - 1),\tag{7.15}$$

siendo aceptables ambos signos.

Finalmente, puesto que un Hamiltoniano con un potencial central $H(\hat{L}, \mathcal{J}_0, \mathcal{J}_\pm)$ es transformado por \mathcal{T} (o \mathcal{P}) en $\mathcal{T}H(\hat{L}, \mathcal{J}_0, \mathcal{J}_\pm)\mathcal{T}^\dagger = H(-\hat{L}, \mathcal{J}_0, \mathcal{J}_\pm)$, estas transformaciones discretas son simetrías del Hamiltoniano (con la degeneración correspondiente en los autovalores) si H depende sólo de $|\hat{L}|$.

El caso $\kappa < 0$

Consideremos ahora la región con $\kappa < 0$. Podemos definir los operadores

$$\mathcal{J}_0 = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{\theta|\kappa|}{1+\theta|\kappa|}} \left(\frac{\hat{\pi}^2}{|\kappa|} + \frac{\hat{\mathbf{x}}^2}{\theta} \right), \quad (7.16)$$

$$\mathcal{J}_{\pm} = \frac{1}{4} \left\{ \frac{(\hat{\pi} \cdot \hat{\mathbf{x}} + \hat{\mathbf{x}} \cdot \hat{\pi})}{\sqrt{1+\theta|\kappa|}} \pm i\sqrt{\theta|\kappa|} \left(-\frac{\hat{\pi}^2}{|\kappa|} + \frac{\hat{\mathbf{x}}^2}{\theta} + 2\hat{L} \right) \right\} = \mathcal{J}_1 \pm i\mathcal{J}_2,$$

(con $\mathcal{J}_i, i = 0, 1, 2$ operadores Hermíticos) los cuales también satisfacen las relaciones de conmutación características del álgebra de Lie de $sl(2, \mathbb{R})$ (ecuación (7.2)) y conmutan con \hat{L} . El invariante cuadrático de Casimir nuevamente toma la forma (ver Apéndice C)

$$\begin{aligned} \mathcal{J}^2 &= \frac{\theta|\kappa|}{16} \left\{ -\left(\frac{\hat{\mathbf{x}}^2}{\theta} + \frac{\hat{\pi}^2}{|\kappa|} + 2\hat{L} \right)^2 + \frac{1}{1+\theta|\kappa|} \left(\frac{\hat{\mathbf{x}}^2}{\theta} - \frac{\hat{\pi}^2}{|\kappa|} \right)^2 - \frac{(\hat{\pi} \cdot \hat{\mathbf{x}} + \hat{\mathbf{x}} \cdot \hat{\pi})^2}{\theta|\kappa|(1+\theta|\kappa|)} \right\} = \\ &= \frac{1}{4} (\hat{L}^2 - 1). \end{aligned} \quad (7.17)$$

Luego, solo el producto directo de representaciones irreducibles de $SL(2, \mathbb{R})$ en la clase discreta [80, 81] con aquellas de $SO(2)$ que satisfacen la condición (7.17), subespacios del espacio de Hilbert generado por autovectores simultáneos de $\mathcal{J}^2, \mathcal{J}_0$ y \hat{L} como en (7.7), son relevantes para describir los estados físicos de un sistema con un potencial central.

En efecto, un Hamiltoniano general no-relativista $\hat{H}(\hat{\pi}, \hat{\mathbf{x}})$ que conmuta con \hat{L} puede ser expresado en términos de los invariantes frente a rotación

$$\begin{aligned} \frac{\hat{\mathbf{x}}^2}{\theta} &= 2\sqrt{1 + \frac{1}{\theta|\kappa|}} \mathcal{J}_0 - \frac{i}{\sqrt{\theta|\kappa|}} (\mathcal{J}_+ - \mathcal{J}_-) - \hat{L}, \\ \frac{\hat{\pi}^2}{|\kappa|} &= 2\sqrt{1 + \frac{1}{\theta|\kappa|}} \mathcal{J}_0 + \frac{i}{\sqrt{\theta|\kappa|}} (\mathcal{J}_+ - \mathcal{J}_-) + \hat{L}, \\ (\hat{\pi} \cdot \hat{\mathbf{x}} + \hat{\mathbf{x}} \cdot \hat{\pi}) &= 2\sqrt{1 + \theta|\kappa|} (\mathcal{J}_+ + \mathcal{J}_-), \end{aligned} \quad (7.18)$$

y de \hat{L} mismo. Luego, \hat{H} es una función de $\mathcal{J}_0, \mathcal{J}_{\pm}$ y \hat{L} únicamente.

Por otro lado, tomando en cuenta la ecuación (D.7), es posible ver que la positividad de $\hat{\mathbf{x}}^2$ (o $\hat{\pi}^2$) requiere que $2m - l \geq 0$, lo que implica que $m = k, k + 1, \dots$ con k un entero o semientero positivo, y $l \leq 2k$. Por tanto, como en la sección anterior,

$$l = \pm(2k - 1). \quad (7.19)$$

En esta región las transformaciones discretas de paridad e inversión temporal de las ecuaciones (5.8) dejan invariante el álgebra extendida de $sl(2, \mathbb{R})$. En efecto, estas transformaciones cambian el signo de la extensión central \hat{L} mientras que para los generadores de $sl(2, \mathbb{R})$ obtenemos directamente

$$\begin{aligned} \mathcal{T}\mathcal{J}_0\mathcal{T}^\dagger &= \mathcal{P}\mathcal{J}_0\mathcal{P}^\dagger = \mathcal{J}_0, \quad \mathcal{T}\mathcal{J}_{\pm}\mathcal{T}^\dagger = -\mathcal{J}_{\pm} = -\mathcal{P}\mathcal{J}_{\pm}\mathcal{P}^\dagger, \\ \Rightarrow \quad \mathcal{T}\mathcal{J}^2\mathcal{T}^\dagger &= \mathcal{P}\mathcal{J}^2\mathcal{P}^\dagger = \mathcal{J}^2, \end{aligned} \quad (7.20)$$

lo que deja invariante la suma directa de las representaciones irreducibles $\langle k, l \rangle \oplus \langle k, -l \rangle$ con $l = \pm(2k - 1)$, como se ha discutido en la sección previa (ver (7.9)).

Por tanto, la región $\kappa < 0$ es análoga a la región con $0 < \kappa < \kappa_c$.

El caso $\kappa > \kappa_c$

Consideremos ahora la región $\kappa > \kappa_c$. Aquí definimos

$$J_3 = \frac{1}{4}\sqrt{\theta\kappa} \left(\frac{\hat{\pi}^2}{\kappa} + \frac{\hat{\mathbf{x}}^2}{\theta} + 2\hat{L} \right), \quad (7.21)$$

$$J_{\pm} = \frac{1}{4\sqrt{1 - \frac{1}{\theta\kappa}}} \left\{ -\frac{\hat{\pi}^2}{\kappa} + \frac{\hat{\mathbf{x}}^2}{\theta} \mp \frac{i}{\sqrt{\theta\kappa}} (\hat{\pi} \cdot \hat{\mathbf{x}} + \hat{\mathbf{x}} \cdot \hat{\pi}) \right\}.$$

Como puede ser inmediatamente verificado, a consecuencia de (4.1) estos operadores satisfacen las relaciones de conmutación

$$[J_3, J_{\pm}] = \pm J_{\pm}, \quad [J_+, J_-] = 2J_3, \quad (7.22)$$

que corresponden a un álgebra de Lie $su(2)$, con $J_{\pm} = J_1 \pm iJ_2$ ($J_i, i = 1, 2, 3$, operadores Hermíticos). En este caso el operador cuadrático de Casimir, $\mathbf{J}^2 = J_{\pm}J_{\mp} + J_3(J_3 \mp 1)$, viene dado por la misma expresión que en la ecuación (7.3) y que, en esta región, puede ser escrito como un operador manifiestamente positivo,

$$J^2 = \frac{\theta\kappa}{16} \left\{ \left(\frac{\hat{\mathbf{x}}^2}{\theta} + \frac{\hat{\pi}^2}{\kappa} + 2\hat{L} \right)^2 + \frac{1}{\theta\kappa - 1} \left(\frac{\hat{\mathbf{x}}^2}{\theta} - \frac{\hat{\pi}^2}{\kappa} \right)^2 + \frac{(\hat{\pi} \cdot \hat{\mathbf{x}} + \hat{\mathbf{x}} \cdot \hat{\pi})^2}{\theta\kappa(\theta\kappa - 1)} \right\}. \quad (7.23)$$

Acá nuevamente, el generador de las rotaciones \hat{L} puede ser incorporado como una extensión central del álgebra,

$$[\hat{L}, J_3] = 0, \quad [\hat{L}, J_{\pm}] = 0 \quad \Rightarrow \quad [\hat{L}, J^2] = 0, \quad (7.24)$$

y está relacionado al operador de Casimir por la igualdad (ver Apéndice C)

$$J^2 = \frac{1}{4} (\hat{L}^2 - 1), \quad (7.25)$$

la que impone una condición sobre las representaciones unitarias irreducibles admisibles del producto directo $SU(2) \otimes SO(2)$. En particular, advertir que $l = 0$ queda excluido.

Las expresiones (Hermíticas) cuadráticas en las variables dinámicas pueden ser escritas como

$$\frac{\hat{\mathbf{x}}^2}{\theta} = \frac{2}{\sqrt{\theta\kappa}} J_3 + \sqrt{1 - \frac{1}{\theta\kappa}} (J_+ + J_-) - \hat{L},$$

$$\frac{\hat{\pi}^2}{\kappa} = \frac{2}{\sqrt{\theta\kappa}} J_3 - \sqrt{1 - \frac{1}{\theta\kappa}} (J_+ + J_-) - \hat{L}, \quad (7.26)$$

$$\frac{(\hat{\pi} \cdot \hat{\mathbf{x}} + \hat{\mathbf{x}} \cdot \hat{\pi})}{\sqrt{\theta\kappa}} = 2i\sqrt{1 - \frac{1}{\theta\kappa}} (J_+ - J_-).$$

Consecuentemente, cualquier Hamiltoniano \hat{H} que conmute con \hat{L} puede ser expresado como una función de J_3 , J_\pm y \hat{L} mismo. En este caso, los autovectores simultáneos de \hat{L} y \hat{H} están contenidos en espacios de representación de representaciones unitarias irreducibles del grupo *compacto* $SU(2)$, que son de dimensión finita.

Las representaciones unitarias irreducibles de $SU(2) \otimes SO(2)$ pueden ser caracterizada por los índices $\langle j, l \rangle$ donde, como es bien sabido, j puede tomar valores enteros o semi-enteros no negativos, $j = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \dots$, y $l \in \mathbb{Z}$. La ecuación (7.25) impone la restricción $l^2 = (2j + 1)^2$. Para un dado j , el espacio de representación está generado por los autovectores simultáneos de J^2 , J_3 y \hat{L} ,

$$\begin{aligned} J^2 |j, m, l\rangle &= j(j+1) |j, m, l\rangle, \\ J_3 |j, m, l\rangle &= m |j, m, l\rangle, \quad \text{con } m = -j, -j+1, \dots, j-1, j, \\ \hat{L} |j, m, l\rangle &= l |j, m, l\rangle, \quad \text{con } l^2 = (2j+1)^2. \end{aligned} \quad (7.27)$$

De acuerdo a las ecuaciones (6.2), esta álgebra $su(2)$ queda invariante frente a las transformaciones discretas de paridad y *time-reversal* definidas en (6.1). En efecto, se obtiene

$$\begin{aligned} \mathcal{T} J_3 \mathcal{T}^\dagger &= \mathcal{P} J_3 \mathcal{P}^\dagger = -J_3, \quad \mathcal{T} J_\pm \mathcal{T}^\dagger = \mathcal{P} J_\pm \mathcal{P}^\dagger = J_\mp \\ &\left(\Rightarrow \mathcal{T} J_{1,2} \mathcal{T}^\dagger = J_{1,2} \right), \end{aligned} \quad (7.28)$$

que preserva las ecuaciones (7.22) y \mathbf{J}^2 ,

$$\mathcal{T} \mathbf{J}^2 \mathcal{T}^\dagger = \mathcal{T} (J_\pm J_\mp + J_3(J_3 \mp 1)) \mathcal{T}^\dagger = J_\mp J_\pm + J_3(J_3 \pm 1) = \mathbf{J}^2. \quad (7.29)$$

Más aún, puesto que en esta región las transformaciones discretas no cambian \hat{L} , concluimos que la representación unitaria irreducible $\langle j, l \rangle$ del producto directo $SU(2) \otimes SO(2)$, de dimensión $(2j+1)$, es también \mathcal{T} y \mathcal{P} -invariante.

Por ejemplo,

$$\begin{aligned} J_3 \mathcal{T} |j, m, l\rangle &= -(\mathcal{T} J_3 \mathcal{T}^\dagger) \mathcal{T} |j, m, l\rangle = -m \mathcal{T} |j, m, l\rangle \\ \Rightarrow \mathcal{T} |j, m, l\rangle &\sim |j, -m, l\rangle, \quad \text{con } m = -j, -j+1, \dots, j-1, j, \end{aligned} \quad (7.30)$$

y el vector transformado pertenece a la misma representación irreducible.

A pesar de esto, los Hamiltonianos en la clase que estamos considerando no son, en general, \mathcal{T} o \mathcal{P} invariantes, sino que tienen sus subespacios característicos contenidos en representaciones irreducibles de $SU(2) \otimes SO(2)$.

Por otra parte, de las ecuaciones (7.26) se puede ver que la positividad de $\hat{\mathbf{x}}^2$ (o $\hat{\boldsymbol{\pi}}^2$) implica, para las representaciones unitarias irreducibles $\langle j, l \rangle$, que

$$l \leq \frac{-2j}{\sqrt{\theta\kappa}} \leq 0. \quad (7.31)$$

Pero, $\hat{\mathbf{x}}^2$ (o $\hat{\boldsymbol{\pi}}^2$) puede ser diagonalizado a través de una transformación unitaria de $SU(2)$ como en la ecuación (D.9). En efecto, en cualquier representación unitaria de $SU(2)$, una combinación lineal de generadores de la forma $AJ_3 + BJ_1$, con $A, B \in \mathbb{R}$, puede ser transformada según

$$e^{i\varphi J_2} (AJ_3 + BJ_1) e^{-i\varphi J_2} = A \sqrt{1 + \frac{B^2}{A^2}} J_3, \quad (7.32)$$

donde $\varphi = \arctan\left(\frac{B}{A}\right)$ (ver Apéndice D). Luego,

$$\hat{\mathbf{x}}^2 \rightarrow 2\sqrt{\frac{1}{\kappa\theta} + \left(1 - \frac{1}{\kappa\theta}\right)} J_3 - \hat{L} = 2J_3 - \hat{L}. \quad (7.33)$$

Por tanto, la positividad de $\hat{\mathbf{x}}^2$ (o, equivalentemente, $\hat{\boldsymbol{\pi}}^2$) requiere que

$$2m \geq l, \quad \forall m = -j, -j+1, \dots, j-1, j, \quad \Rightarrow \quad l \leq -2j \leq 0. \quad (7.34)$$

Y como $l^2 = (2j+1)^2$, se concluye que

$$l = -(2j+1) \leq -1 \quad (7.35)$$

para la representación unitaria irreducible $\langle j, l \rangle$ que satisface la condición (7.25).

En conclusión, para todo Hamiltoniano con un potencial central como el dado en (4.6) (que también puede depender de \hat{L}) existe otra cantidad conservada que se corresponde al invariante de Casimir cuadrático de la ecuación (7.3) para $\kappa < \kappa_c$ o en (7.23) para $\kappa > \kappa_c$, cuyos autovalores determinan la representación irreducible de $SL(2, \mathbb{R})$ [80, 81] o de $SU(2)$ respectivamente. Hay también una restricción que relaciona este invariante de Casimir con el cuadrado del generador de las rotaciones en el plano no-conmutativo, \hat{L} . Más aún, la positividad de $\hat{\mathbf{x}}^2$ (o $\hat{\boldsymbol{\pi}}^2$), implícita en la Hermiticidad de las variables dinámicas, impone una restricción adicional que determina los posibles autovalores de \hat{L} para cada representación irreducible.

En estas condiciones, el problema de autovalores para \hat{H} se reduce, para $\kappa > \kappa_c$, a un problema finito-dimensional en la representación irreducible $\langle j, l \rangle$ de $SU(2) \otimes SO(2)$ con $l = -(2j+1)$.

Para $\kappa < \kappa_c$, sólo las representaciones unitarias irreducibles (infinito dimensionales) $\langle k, l \rangle$ de $SL(2, \mathbb{R})$ con \mathcal{J}_0 acotado inferiormente satisfacen la restricción. En este caso, $l = \pm(2k-1)$ y ambos signos están relacionados por una transformación de inversión temporal (o de paridad).

Advertir que de (7.1), ni \mathcal{J}_0 ni \mathcal{J}_1 tienen bien definido el (doble) límite para $\theta, \kappa \rightarrow 0$. En particular, no pueden ser definidos en el límite $\kappa \rightarrow 0$ ó $\theta \rightarrow 0$, a pesar de que el doble límite de \mathcal{J}^2 en (7.3) sí existe. En efecto, si definimos $L_0 = x_1\pi_2 - x_2\pi_1$ (el límite conmutativo de \hat{L}), obtenemos

$$\lim_{\theta, \kappa \rightarrow 0} \mathcal{J}^2 = \frac{1}{16} \left\{ 2\hat{\mathbf{x}}^2 \hat{\boldsymbol{\pi}}^2 + 2\hat{\boldsymbol{\pi}}^2 \hat{\mathbf{x}}^2 - (\hat{\mathbf{x}} \cdot \hat{\boldsymbol{\pi}} + \hat{\boldsymbol{\pi}} \cdot \hat{\mathbf{x}})^2 \right\} \Big|_{\theta, \kappa \rightarrow 0} = \frac{1}{4} (L_0^2 - 1) \quad (7.36)$$

(que claramente conmuta con $\hat{\mathbf{x}}^2$ y $\hat{\boldsymbol{\pi}}^2$ en este límite).

Por tanto, la estructura algebraica descrita anteriormente es una consecuencia de la no-conmutatividad presente a la vez tanto en coordenadas como en momentos.

En la siguiente sección aplicamos estos resultados a la resolución de ejemplos simples.

8. EL OSCILADOR ARMÓNICO ISÓTROPO

Un ejemplo simple es el del *oscilador isótropo* en este espacio no-conmutativo, ya que en este caso el Hamiltoniano

$$H_{osc} := \frac{\hat{\boldsymbol{\pi}}^2}{2\mu} + \frac{1}{2}\mu\omega^2 \hat{\mathbf{x}}^2 \quad (8.1)$$

es, en sí mismo, un elemento del álgebra de Lie generada por $\left\{ \hat{\boldsymbol{\pi}}^2, \hat{\mathbf{x}}^2, (\hat{\mathbf{x}} \cdot \hat{\boldsymbol{\pi}} + \hat{\boldsymbol{\pi}} \cdot \hat{\mathbf{x}}), \hat{L} \right\}$.

El oscilador armónico isótropo para $\kappa > \kappa_c$

Consideremos en primer lugar este Hamiltoniano en la región $\kappa > \kappa_c$,

$$\begin{aligned} H_{osc} &= \frac{\kappa + \theta\mu^2\omega^2}{2\mu} \left(\frac{2}{\sqrt{\theta\kappa}} J_3 - \hat{L} \right) - \frac{\kappa - \theta\mu^2\omega^2}{2\mu} \sqrt{1 - \frac{1}{\theta\kappa}} (J_+ + J_-) = \\ &= \frac{\kappa + \theta\mu^2\omega^2}{2\mu} \left(\frac{2}{\sqrt{\theta\kappa}} J_3 - \hat{L} \right) - \frac{\kappa - \theta\mu^2\omega^2}{\mu} \sqrt{1 - \frac{1}{\theta\kappa}} J_1, \end{aligned} \quad (8.2)$$

donde hemos utilizado la ecuación (7.26).

De acuerdo a la discusión de la sección 7, el Hamiltoniano en (8.2) puede ser diagonalizado a través de una *rotación* generada por J_2 . En efecto, si

$$\varphi = \arctan \left\{ - \left(\frac{\kappa - \theta\mu^2\omega^2}{\kappa + \theta\mu^2\omega^2} \right) \sqrt{\kappa\theta - 1} \right\}, \quad (8.3)$$

la transformación unitaria $e^{i\varphi J_2}$ lleva H_{osc} a la forma diagonal (ver ecuación (D.9))

$$\begin{aligned} e^{i\varphi J_2} H_{osc} e^{-i\varphi J_2} &= \\ &= \frac{1}{\mu\sqrt{\theta\kappa}} \left\{ (\kappa + \theta\mu^2\omega^2)^2 + (\kappa\theta - 1) (\kappa - \theta\mu^2\omega^2)^2 \right\}^{1/2} J_3 - \frac{\kappa + \theta\mu^2\omega^2}{2\mu} \hat{L}, \end{aligned} \quad (8.4)$$

de donde se concluye que los autovectores de H_{osc} en la representación irreducible $\langle j, l \rangle$ (con $l = -(2j + 1)$), de dimensión $2j + 1$, son

$$|\psi_{j,m,l}\rangle = e^{-i\varphi J_2} |j, m, l\rangle. \quad (8.5)$$

Los correspondientes autovalores de energía vienen dados por

$$\begin{aligned} E_m^{(j)} &= \frac{1}{\mu\sqrt{\theta\kappa}} \left\{ (\kappa + \theta\mu^2\omega^2)^2 + (\kappa\theta - 1) (\kappa - \theta\mu^2\omega^2)^2 \right\}^{1/2} m + \\ &+ \frac{\kappa + \theta\mu^2\omega^2}{2\mu} (2j + 1) = \frac{m}{\mu} \sqrt{(\kappa - \theta\mu^2\omega^2)^2 + 4\mu^2\omega^2} + \frac{\kappa + \theta\mu^2\omega^2}{2\mu} (2j + 1), \end{aligned} \quad (8.6)$$

donde $m = -j, -j + 1, \dots, j - 1, j$.

Tomando en consideración que en esta región

$$\sqrt{(\kappa - \theta\mu^2\omega^2)^2 + 4\mu^2\omega^2} = \sqrt{(\kappa + \theta\mu^2\omega^2)^2 + 4\mu^2\omega^2 (1 - \kappa\theta)} < (\kappa + \theta\mu^2\omega^2), \quad (8.7)$$

vemos que

$$E_m^{(j)} \geq E_{-j}^{(j)} \geq \left(\frac{\kappa + \theta\mu^2\omega^2}{2\mu} \right) \geq 0, \quad (8.8)$$

en acuerdo con la positividad de H_{osc} en ecuación (8.1).

Advertir que el espectro de H_{osc} queda invariante por el cambio $m \rightarrow -m$, a pesar de que el Hamiltoniano en (8.2) no es invariante frente a una transformación de inversión temporal o paridad (recordar que \mathcal{T} y \mathcal{P} cambian el signo de J_3 mientras que dejan inalterados a J_1 y \hat{L}). En efecto, para la transformación *antilineal* \mathcal{T} tenemos (ver (7.30))

$$|\psi_{j,-m,l}\rangle \sim e^{-i\varphi J_2} \mathcal{T} |j, m, l\rangle = e^{-i\varphi J_2} \mathcal{T} e^{i\varphi J_2} |\psi_{j,m,l}\rangle, \quad (8.9)$$

mapeando biunívocamente $E_m^{(j)} \leftrightarrow E_{-m}^{(j)}$.

Los autovalores en (8.6) pueden ser escritos como

$$E_m^{(j)} = \hbar\Omega_+ \left(n_+ + \frac{1}{2} \right) + \hbar\Omega_- \left(n_- + \frac{1}{2} \right), \quad (8.10)$$

donde hemos definido las frecuencias (positivas)

$$\Omega_{\pm} = \frac{1}{2\mu\hbar} \left\{ (\kappa + \theta\mu^2\omega^2) \pm \sqrt{(\kappa - \theta\mu^2\omega^2)^2 + 4\mu^2\omega^2\hbar^2} \right\} \quad (8.11)$$

y n_+, n_- están unívocamente determinados por j y m a través de las relaciones

$$\begin{aligned} n_+ + n_- + 1 &= 2j + 1, & n_+ - n_- &= 2m, & \Rightarrow \\ n_{\pm} &= j \pm m \geq 0. \end{aligned} \quad (8.12)$$

Luego, n_+, n_- son ambos enteros no negativos. Por otro lado, dados n_{\pm} , la ecuación (8.12) determina unívocamente a los enteros o semi-enteros $j \geq 0$ y m que satisface $-j \leq m \leq j$.

Por lo tanto, el espectro de H_{osc} coincide con el de dos osciladores armónicos desacoplados (en el espacio conmutativo usual) con frecuencias Ω_{\pm} , en completo acuerdo con los resultados de [48].

El oscilador armónico isótropo para $0 < \kappa < \kappa_c$

Podemos dar una solución similar al caso $0 < \kappa < \kappa_c$, donde el Hamiltoniano en la ecuación (8.1) puede escribirse como

$$\begin{aligned} H_{osc} &:= \frac{\kappa + \theta\mu^2\omega^2}{2\mu} \left(\frac{2}{\sqrt{\theta\kappa}} \mathcal{J}_0 - \hat{L} \right) - \frac{\kappa - \theta\mu^2\omega^2}{2\mu} \sqrt{\frac{1}{\theta\kappa} - 1} (\mathcal{J}_+ + \mathcal{J}_-) = \\ &= \frac{\kappa + \theta\mu^2\omega^2}{2\mu} \left(\frac{2}{\sqrt{\theta\kappa}} \mathcal{J}_0 - \hat{L} \right) - \frac{\kappa - \theta\mu^2\omega^2}{\mu} \sqrt{\frac{1}{\theta\kappa} - 1} \mathcal{J}_1, \end{aligned} \quad (8.13)$$

expresión que puede ser diagonalizada a través de una transformación unitaria en $SL(2, \mathbb{R})$, como se explica en el Apéndice D.

En efecto, si tomamos

$$A = \frac{\kappa + \theta\mu^2\omega^2}{\mu\sqrt{\theta\kappa}}, \quad B = -\frac{\kappa - \theta\mu^2\omega^2}{\mu} \sqrt{\frac{1}{\theta\kappa} - 1}, \quad (8.14)$$

$$\text{y } \tanh \alpha = \frac{B}{A},$$

aplicando los resultados citados en (D.4) a H_{osc} en la ecuación (8.13) obtenemos el operador diagonalizado

$$\begin{aligned} e^{i\alpha\mathcal{J}_2} H_{osc} e^{-i\alpha\mathcal{J}_2} &= \\ \frac{1}{\mu\sqrt{\theta\kappa}} \left\{ (\kappa + \theta\mu^2\omega^2)^2 - (1 - \kappa\theta) (\kappa - \theta\mu^2\omega^2)^2 \right\}^{1/2} \mathcal{J}_0 - \frac{\kappa + \theta\mu^2\omega^2}{2\mu} \hat{L}, \end{aligned} \quad (8.15)$$

en cualquier representación unitaria de $SL(2, \mathbb{R}) \otimes SO(2)$.

De la ecuación (8.15) se concluye que los autovectores del Hamiltoniano vienen dados por

$$|\phi_{k,m,l}\rangle = e^{-i\alpha\mathcal{J}_2} |k, m, l\rangle, \quad (8.16)$$

donde $|k, m, l\rangle$ pertenece a la representación unitaria irreducible $\langle k, l\rangle$, donde k es algún entero o semi-entero positivo, $m = k, k+1, \dots$ y $l = (2k-1)$ o $l = -(2k-1)$ (ver sección 7). Los correspondientes autovalores de energía son

$$\begin{aligned} E_m^{(k,\pm)} &= \frac{1}{\mu\sqrt{\theta\kappa}} \left\{ (\kappa + \theta\mu^2\omega^2)^2 - (1 - \kappa\theta) (\kappa - \theta\mu^2\omega^2)^2 \right\}^{1/2} m - \\ &\quad \mp \frac{\kappa + \theta\mu^2\omega^2}{2\mu} (2k-1) = \\ &= \frac{m}{\mu} \sqrt{(\kappa + \theta\mu^2\omega^2)^2 + 4\mu^2\omega^2(1 - \kappa\theta)} \mp \frac{\kappa + \theta\mu^2\omega^2}{2\mu} (2k-1). \end{aligned} \quad (8.17)$$

Notar que

$$E_m^{(k,\pm)} \geq E_k^{(k,\pm)} \geq \frac{\kappa + \theta\mu^2\omega^2}{2\mu} [2k \mp (2k-1)] \geq \frac{\kappa + \theta\mu^2\omega^2}{2\mu}, \quad (8.18)$$

nuevamente en acuerdo con la positividad de H_{osc} .

Más aún, advertir que, a pesar que H_{osc} en (8.13) no es invariante frente a time-reversal (o paridad), la restricción que relaciona \hat{L} a \mathcal{J}^2 y la condición de positividad de $\hat{\mathbf{x}}^2$ (o $\hat{\mathbf{p}}^2$) hacen que el espectro de energía sea \mathcal{T} -invariante, (en esta región, las transformaciones discretas cambian el signo de \hat{L} y \mathcal{J}_2 dejando invariante $\mathcal{J}_{1,3}$ - ver la ecuación (7.8)), ya que

$$\mathcal{T} |\phi_{k,m,l}\rangle = e^{-i\alpha\mathcal{J}_2} \mathcal{T} |k, m, l\rangle \sim e^{-i\alpha\mathcal{J}_2} |k, m, -l\rangle = |\phi_{k,m,-l}\rangle, \quad (8.19)$$

con $l = \pm(2k-1)$, mapeando biunívocamente $E_m^{(k,\pm)} \leftrightarrow E_m^{(k,\mp)}$.

Los autovalores de energía pueden ser escritos como

$$E_m^{(k,s)} = \Omega_+ \left(n_+ + \frac{1}{2} \right) + \Omega_- \left(n_- + \frac{1}{2} \right), \quad (8.20)$$

con $s = \pm 1$, donde las frecuencias (positivas) son

$$\Omega_{\pm} = \frac{1}{2\mu} \left\{ \sqrt{(\kappa + \theta\mu^2\omega^2)^2 + 4\mu^2\omega^2(1 - \kappa\theta)} \pm (\kappa + \theta\mu^2\omega^2) \right\} \quad (8.21)$$

y n_+, n_- están unívocamente determinados por m y $l = s(2k-1)$ a través de las relaciones

$$\begin{aligned} n_+ + n_- + 1 &= 2m, \quad n_+ - n_- = -l, \\ \Rightarrow n_{\pm} &= m \mp \frac{l}{2} - \frac{1}{2} \geq (1 \mp s) \left(k - \frac{1}{2} \right) \geq 0. \end{aligned} \quad (8.22)$$

Por tanto, aún en este caso, n_{\pm} son ambos enteros no negativos.

Inversamente, dados los enteros no negativos n_{\pm} , la ecuación (8.22) determina unívocamente m y l , con $k = (|l| + 1)/2$. Entonces, también en esta región el espectro de H_{osc} coincide con el de dos osciladores armónicos desacoplados de frecuencias Ω_{\pm} [48].

El oscilador armónico isótropo para $\kappa < 0$

Es esta región, el Hamiltoniano de la ecuación (8.1) puede escribirse como

$$H_{osc} := A\mathcal{J}_0 + B\mathcal{J}_2 + \left(\frac{|\kappa| - \theta\mu^2\omega^2}{2\mu} \right) \hat{L} \quad (8.23)$$

con

$$A = \frac{|\kappa| + \theta\mu^2\omega^2}{\mu} \sqrt{1 + \frac{1}{\theta|\kappa|}}, \quad B = \frac{\theta\mu^2\omega^2 - |\kappa|}{\mu} \sqrt{\frac{1}{\theta|\kappa|}}. \quad (8.24)$$

Aplicando los resultados citados en (D.7) con $\tanh \beta = -B/A$ a H_{osc} en ecuación (8.23) obtenemos el operador diagonal

$$e^{i\beta\mathcal{J}_1} H_{osc} e^{-i\beta\mathcal{J}_1} = \frac{1}{\mu} \left\{ (|\kappa| + \theta\mu^2\omega^2)^2 + 4\mu^2\omega^2 \right\}^{1/2} \mathcal{J}_0 + \left(\frac{|\kappa| - \theta\mu^2\omega^2}{2\mu} \right) \hat{L}. \quad (8.25)$$

Esto muestra que los autovectores del Hamiltoniano vienen dados por

$$|\phi_{k,m,l}\rangle = e^{-i\beta\mathcal{J}_1} |k, m, l\rangle, \quad (8.26)$$

donde $|k, m, l\rangle$ pertenece a la representación unitaria irreducible $\langle k, l\rangle$, con k un entero o semi-entero positivo, $m = k, k+1, \dots$ y $l = \pm(2k-1)$ (ver sección 7), correspondiente a los autovalores de energía

$$E_m^{(k,\pm)} = \frac{m}{\mu} \left\{ (|\kappa| - \theta\mu^2\omega^2)^2 + \left(1 + \frac{1}{\theta|\kappa|}\right) 4|\kappa|\theta\mu^2\omega^2 \right\}^{1/2} \pm \left(\frac{|\kappa| - \theta\mu^2\omega^2}{2\mu} \right) (2k-1). \quad (8.27)$$

Aquí nuevamente

$$E_m^{(k,\pm)} \geq E_k^{(k,\pm)} \geq \frac{||\kappa| - \theta\mu^2\omega^2|}{2\mu} (2k - |2k-1|) = \frac{||\kappa| - \theta\mu^2\omega^2|}{2\mu}, \quad (8.28)$$

en acuerdo con la positividad de H_{osc} .

Los autovalores de energía pueden además ser escritos como en la (8.20), donde las frecuencias vienen dadas en esta región por

$$\Omega_{\pm} = \frac{1}{2\mu} \left\{ \sqrt{(|\kappa| - \theta\mu^2\omega^2)^2 + (1 + |\kappa|\theta) 4\mu^2\omega^2} \pm ||\kappa| - \theta\mu^2\omega^2| \right\} \quad (8.29)$$

y, para $\mathfrak{s} = \text{sign}(|\kappa| - \theta\mu^2\omega^2)$,

$$\begin{aligned} n_+ + n_- + 1 &= 2m, & n_+ - n_- &= \mathfrak{s}l, \\ \Rightarrow n_{\pm} &= m \pm \mathfrak{s} \frac{l}{2} - \frac{1}{2} \geq \left(k - \frac{1}{2}\right) (1 \pm \mathfrak{s} \text{sign}(l)) \geq 0. \end{aligned} \quad (8.30)$$

Luego, n_{\pm} son ambos enteros no-negativos relacionados unívocamente a m y l , con $k = (|l| + 1)/2$. Por tanto, también en este caso encontramos que el espectro de H_{osc} coincide con el de dos osciladores armónicos desacoplados de frecuencias Ω_{\pm} [48].

9. EL PROBLEMA DE LANDAU

Consideremos ahora una extensión del Hamiltoniano de Landau en el gauge simétrico al espacio de fases no-conmutativo,

$$\begin{aligned}
 2\mu H_L &:= \left(\hat{\pi}_1 + \frac{eB}{2} \hat{x}_2 \right)^2 + \left(\hat{\pi}_2 - \frac{eB}{2} \hat{x}_1 \right)^2 \\
 &= \hat{\pi}^2 + \left(\frac{eB}{2} \right)^2 \hat{\mathbf{x}}^2 - eB \left\{ (1 - \kappa\theta) \hat{L} - \frac{\theta}{2} \hat{\pi}^2 - \frac{\kappa}{2} \hat{\mathbf{x}}^2 \right\} = \\
 &= \left(1 + \frac{eB\theta}{2} \right) \hat{\pi}^2 + \frac{eB}{4} (eB + 2\kappa) \hat{\mathbf{x}}^2 - eB(1 - \kappa\theta) \hat{L},
 \end{aligned} \tag{9.1}$$

donde B representa a un campo magnético constante y uniforme perpendicular al plano.

Este Hamiltoniano debe ser comparado con H_{osc} en la ecuación (8.1). Resulta evidente que el espectro puede ser determinado por el mismo mecanismo.

El problema de Landau para $\kappa > \kappa_c$

De las ecuaciones (7.26), podemos escribir al Hamiltoniano como

$$\begin{aligned}
 2\mu H_L &= \frac{(B^2 e^2 \theta + 4Be\theta\kappa + 4\kappa)}{2\sqrt{\theta\kappa}} J_3 + \frac{1}{2} \sqrt{1 - \frac{1}{\theta\kappa}} (B^2 e^2 \theta - 4\kappa) J_1 - \\
 &\quad - \frac{(B^2 e^2 \theta + 4Be + 4\kappa)}{4} L.
 \end{aligned} \tag{9.2}$$

Tomando en consideración (7.32), se puede ver que una rotación generada por J_2 en un ángulo

$$\varphi = \arctan \left(\frac{\sqrt{\theta\kappa - 1} (B^2 e^2 \theta - 4\kappa)}{B^2 e^2 \theta + 4Be\theta\kappa + 4\kappa} \right) \tag{9.3}$$

transforma el Hamiltoniano en

$$e^{-i\varphi J_2} (2\mu H_L) e^{i\varphi J_2} = \frac{(4Be + B^2 e^2 \theta + 4\kappa)}{2} \left(J_3 - \frac{L}{2} \right). \tag{9.4}$$

Por tanto, los autovectores de H_L en una representación irreducible $\langle j, l \rangle$ vienen dados por

$$|\psi_{j,m,l}\rangle = e^{i\varphi J_2} |j, m, l\rangle \tag{9.5}$$

con $l = -(2j + 1)$, para enteros o semi-enteros $j \geq 0$ y $-j \leq m \leq j$. El correspondiente autovalor es

$$E_m^{(j)} = \frac{(4Be + B^2 e^2 \theta + 4\kappa)}{4\mu} \left(m + j + \frac{1}{2} \right) \geq \frac{(4Be + B^2 e^2 \theta + 4\kappa)}{8\mu}. \tag{9.6}$$

Nótese que estos autovalores dependen sólo de los enteros no-negativos $n_a = (j + m)$. Por tanto, dado n_a , cada representación irreducible con $j \geq n_a/2$ contiene un estado con energía dada por

$(4Be + B^2e^2\theta + 4\kappa) (n_a + \frac{1}{2}) / 4\mu$ que, entonces, tiene degeneración infinita. Los vectores en esta secuencia pueden ser identificados por los enteros no negativos $n_b = j - m$. Comparando con el problema de Landau en el plano conmutativo usual, se puede ver que $(B^2e^2\theta + 4\kappa) / 4e\hbar$ aparece como una contribución adicional al campo magnético externo. Advertir que solo los valores negativos del entero $l \leq -1$ son posibles.

Podemos ahora evaluar la densidad de estados en cada nivel de Landau, teniendo en cuenta que cada representación irreducible que a él contribuye lo hace con único estado. Empleando la ec. (D.8) con φ dado por la ec. (9.3) vemos que el valor medio de $\hat{\mathbf{x}}^2$ en cada autovector del Hamiltoniano está dado por (ver ec. (7.26))

$$\langle j, m, l | e^{-i\varphi J_2} \hat{\mathbf{x}}^2 e^{i\varphi J_2} | j, m, l \rangle = m \left(\frac{4(B^2e^2\theta^2 + 4Be\theta + 4)}{B^2e^2\theta + 4Be + 4\kappa} - 2\theta \right) + \theta(2j + 1), \quad (9.7)$$

donde hemos tenido en cuenta que el valor medio $\langle j, m, l | J_1 | j, m, l \rangle = 0$.

Entonces, con $m = n_a - j$, tenemos que el valor medio de $\hat{\mathbf{x}}^2$ crece linealmente con j en cada nivel de Landau (fijado n_a),

$$\langle \hat{\mathbf{x}}^2 \rangle = j \frac{16j(\theta\kappa - 1)}{B^2e^2\theta + 4Be + 4\kappa} + \frac{2n_a(B^2e^2\theta^2 + 4Be\theta - 4\theta\kappa + 8)}{B^2e^2\theta + 4Be + 4\kappa} + \theta. \quad (9.8)$$

Suponiendo que el estado $|\psi_{j,m,l}\rangle$ está esencialmente concentrado en un *círculo de área* $\pi\langle \hat{\mathbf{x}}^2 \rangle$, dicho círculo contendrá un estado por cada semientero $0 \leq j' \leq j$.

Es decir, el círculo de radio cuadrado dado en la ec. (9.8) contendrá concentrados en su interior un número de estados dado por $\sum_{r=0}^{2j} = 2j + 1$. En consecuencia, la densidad de estados en el límite termodinámico ($j \rightarrow \infty$) puede aproximarse por

$$\rho_{\kappa > \kappa_c} = \frac{2j + 1}{\pi\langle \hat{\mathbf{x}}^2 \rangle} = \frac{B^2e^2\theta + 4Be + 4\kappa}{8\pi(\theta\kappa - 1)} + O(j^{-1}). \quad (9.9)$$

Nótese que esta densidad de estados es independiente del nivel de Landau y diverge para $\kappa \rightarrow \kappa_c^+$.

El problema de Landau para $0 < \kappa < \kappa_c$

Usando las ecuaciones (7.6), escribimos el Hamiltoniano como

$$2\mu H_L = \frac{(B^2e^2\theta + 4Be\theta\kappa + 4\kappa)}{2\sqrt{\theta\kappa}} \mathcal{J}_0 + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{\theta\kappa} - 1} (B^2e^2\theta - 4\kappa) \mathcal{J}_1 - \frac{(B^2e^2\theta + 4Be\hbar + 4\kappa)}{4} \hat{L}. \quad (9.10)$$

Luego, empleando (D.4) con

$$\tanh \alpha = \left(\frac{\sqrt{1 - \theta\kappa} (B^2e^2\theta - 4\kappa)}{B^2e^2\theta + 4Be\theta\kappa + 4\kappa} \right), \quad (9.11)$$

el Hamiltoniano puede ser transformado en

$$e^{i\alpha \mathcal{J}_2} (2\mu H_L) e^{-i\alpha \mathcal{J}_2} = \frac{(4Be + B^2e^2\theta + 4\kappa)}{2} \left(\mathcal{J}_0 - \frac{L}{2} \right). \quad (9.12)$$

Por tanto, los autovectores de H_L en la representación irreducible $\langle k, l \rangle$ de $SL(2, \mathbb{R}) \otimes SO(2)$ con k entero o semi-entero positivo y $l = \pm(2k - 1)$ (ver Sección 7), vienen dados por

$$|\psi_{k,m,s}\rangle = e^{-i\alpha\mathcal{J}_2} |k, m, s(2k - 1)\rangle, \quad (9.13)$$

con $s = \pm 1$. Los correspondientes autovalores vienen dados por

$$E_m^{(k,s)} = \frac{(4Be\hbar + B^2e^2\theta + 4\kappa)}{4\mu} \left[m - s \left(k - \frac{1}{2} \right) \right] \geq \frac{(4Be\hbar + B^2e^2\theta + 4\kappa)}{8\mu}. \quad (9.14)$$

Consideremos primero el caso con $s = +1$ (correspondientes a $k \geq \frac{1}{2}$ con $l = (2k - 1) \geq 0$). Escribiendo $m = k + n$ con $n = 0, 1, 2, \dots$, se obtiene

$$E_m^{(k,+1)} = \frac{(4Be\hbar + B^2e^2\theta + 4\kappa)}{4\mu} \left(n + \frac{1}{2} \right), \quad (9.15)$$

el cual es independiente de k (una degeneración infinita numerable).

Por otro lado, para $s = -1$ (estados con $k \geq 1$ y $l = -(2k - 1) \leq -1$), obtenemos

$$E_m^{(k,-1)} = \frac{(4Be\hbar + B^2e^2\theta + 4\kappa)}{4\mu} \left[n + (2k - 1) + \frac{1}{2} \right]. \quad (9.16)$$

Como $n' := n + (2k - 1) \in \mathbb{N}$, para un dado n' se tiene $2k - 1 = n' - n \geq 1$, y entonces $n = 0, 1, \dots, n' - 1$. Por tanto, estas representaciones del grupo con l negativo contribuyen a los subespacios característicos de H_L con energía $E_m^{(k,-1)} = \frac{(4Be\hbar + B^2e^2\theta + 4\kappa)}{4\mu} (n' + \frac{1}{2})$ con un número finito n' de autovectores linealmente independientes adicionales.

Luego vemos que, con todo esto, se obtiene un espectro equivalente al del modelo de Landau sobre el plano conmutativo usual con un campo magnético efectivo $B_{eff} = B + (B^2e^2\theta + 4\kappa)/4e$.

Consideremos ahora la densidad de estados en los niveles de Landau. Basta con tener en cuenta los correspondientes a representaciones con $l = (2k - 1) \geq 0$, ya que aquellas con $l \leq -1$ no contribuyen en el límite termodinámico.

Con $\hat{\mathbf{x}}^2$ escrito como en la ec. (7.6), empleando la ec. (D.5) con α dado en la ec. (9.11), tenemos que

$$\begin{aligned} & \langle k, m, (2k - 1) | e^{i\alpha\mathcal{J}_2} \hat{\mathbf{x}}^2 e^{-i\alpha\mathcal{J}_2} | k, m, (2k - 1) \rangle = \\ & = k \frac{16(1 - \theta\kappa)}{B^2e^2\theta + 4Be + 4\kappa} + 2n \frac{Be\theta(Be\theta + 4) - 4\theta\kappa + 8}{Be(Be\theta + 4) + 4\kappa} + \theta, \end{aligned} \quad (9.17)$$

donde hemos escrito $m = k + n$ y tenido en cuenta que $\langle k, m, (2k - 1) | \mathcal{J}_1 | k, m, (2k - 1) \rangle = 0$. Vemos entonces que, en un dado nivel de Landau, el valor medio $\langle \hat{\mathbf{x}}^2 \rangle$ crece linealmente con k .

Suponiendo que el estado $|\psi_{k,m,1}\rangle$ está esencialmente concentrado en un círculo de área $\pi\langle \hat{\mathbf{x}}^2 \rangle$, y teniendo en cuenta que cada representación irreducible con $l = 2k - 1 \geq 0$ contribuye con un sólo estado a cada nivel de Landau, en el círculo de radio cuadrado dado por la ec. (9.17) habrá concentrados un estado por cada semientero $\frac{1}{2} \leq k' \leq k$.

Es decir, dicho círculo contendrá un número de estados dado por $\sum_{r=1}^{2k} 1 = 2k$, de modo que, en el límite termodinámico ($k \rightarrow \infty$), podemos aproximar la densidad de estados por

$$\rho_{0 < \kappa, \kappa_c} = \frac{2k}{\pi\langle \hat{\mathbf{x}}^2 \rangle} = \frac{B^2e^2\theta + 4Be + 4\kappa}{8\pi(1 - \theta\kappa)} + O(k^{-1}), \quad (9.18)$$

resultado independiente del nivel de Landau al orden dominante en k . Nótese que esta densidad tiende suavemente al valor correspondiente al problema de Landau en el plano conmutativo cuando $\kappa, \theta \rightarrow 0$, $eB/2\pi$, mientras que diverge para $\kappa\theta \rightarrow 1^-$.

El problema de Landau para $\kappa < 0$

Empleando las ecuaciones (7.18), se obtiene

$$2\mu H_L = \frac{1}{2} \sqrt{1 + \frac{1}{\theta|\kappa|}} (B^2 e^2 \theta + 4|\kappa|) \mathcal{J}_0 + \frac{(B^2 e^2 \theta - 4Be\theta|\kappa| - 4|\kappa|)}{2\sqrt{\theta|\kappa|}} \mathcal{J}_2 - \frac{(B^2 e^2 \theta + 4Be - 4|\kappa|)}{4\hbar} \hat{L}. \quad (9.19)$$

Luego, empleando (D.7) con

$$\tanh \beta = - \left(\frac{B^2 e^2 \theta - 4Be\theta|\kappa| - 4|\kappa|}{\sqrt{1 + \theta|\kappa|} (B^2 e^2 \theta + 4|\kappa|)} \right), \quad (9.20)$$

el Hamiltoniano puede ser transformado unitariamente en

$$e^{i\beta\mathcal{J}_1} (2\mu H_L) e^{-i\beta\mathcal{J}_1} = \frac{|4Be + B^2 e^2 \theta - 4|\kappa||}{2} \left(\mathcal{J}_0 - t \frac{L}{2} \right), \quad (9.21)$$

donde $t = \text{sign}(B^2 e^2 \theta + 4Be - 4|\kappa|)$ (el signo del campo magnético efectivo).

Además en este caso k es un entero o semi-entero positivo y $l = s(2k - 1)$ con $s = \pm 1$ (ver Sección 7). Entonces, los autovectores de H_L son

$$|\psi_{k,m,s}\rangle = e^{-i\beta\mathcal{J}_1} |k, m, s(2k - 1)\rangle, \quad (9.22)$$

correspondientes al autovalor

$$E_m^{(k,s)} = \frac{|4Be + B^2 e^2 \theta - 4|\kappa||}{4\mu} \left[m - st \left(k - \frac{1}{2} \right) \right] \geq \frac{|4Be + B^2 e^2 \theta - 4|\kappa||}{8\mu}. \quad (9.23)$$

En este punto, el análisis continúa de forma similar al de la sección anterior con el reemplazo de $s \rightarrow st$. Entonces, se concluye que este sistema es también equivalente al modelo de Landau sobre el plano conmutativo usual con un campo magnético efectivo $B_{eff} = B + (B^2 e^2 \theta - 4|\kappa|)/4e$.

En particular, a la densidad de estados en cada nivel de Landau sólo contribuyen en el límite termodinámico los estados con $st = 1$ y, mediante un razonamiento similar al seguido en el caso anterior, a partir de las ecs. (7.18), (D.6) y (9.20) se obtiene que esa densidad está dada por

$$\rho_{\kappa < 0} = \frac{2k}{\pi \langle \hat{\mathbf{x}}^2 \rangle} = \frac{|Be(Be\theta + 4) - 4|\kappa||}{8\pi(\theta|\kappa| + 1)} + O(k^{-1}), \quad (9.24)$$

la que, para $\kappa \rightarrow 0^-$ y $\theta \rightarrow 0$, se reduce a $eB/2\pi$. Compárese con las ecuaciones (9.9) y (9.18). Notar que pueden resumirse los tres resultados para la densidad de estados en el límite termodinámico como

$$\rho = \left| \frac{B^2 e^2 \theta + 4Be + 4\kappa}{8\pi(1 - \theta\kappa)} \right|, \quad (9.25)$$

el cual presenta una singularidad para $\kappa \rightarrow \kappa_c$ de ambos lagos, en acuerdo con los resultados encontrados en [48].

10. HAMILTONIANOS CON POTENCIALES CENTRALES

Consideremos ahora Hamiltonianos no-relativistas con potenciales centrales como en ecuación (4.6).

Para cualquier $\kappa \neq 0$, es posible diagonalizar $\hat{\mathbf{x}}^2$ (y, consecuentemente, $V(\hat{\mathbf{x}}^2)$) expresándolo en términos de los generadores del grupo a través de una transformación unitaria, como fue discutido en la sección previa, transformación que también debe ser aplicada al término cinético como se describe a continuación. Luego, aplicaremos estos resultados al pozo de potencial cilíndrico.

El caso $\kappa > \kappa_c$

Con $\varphi = \arctan \sqrt{\kappa\theta - 1}$, de las ecuaciones (7.26) y (D.8) se obtiene

$$e^{i\varphi J_2} \left(\frac{\hat{\mathbf{x}}^2}{\theta} \right) e^{-i\varphi J_2} = 2J_3 - \hat{L}, \quad (10.1)$$

$$e^{i\varphi J_2} \left(\frac{\hat{\boldsymbol{\pi}}^2}{\kappa} \right) e^{-i\varphi J_2} = -2 \left(1 - \frac{2}{\kappa\theta} \right) J_3 - \hat{L} - \frac{2}{\kappa\theta} \sqrt{\kappa\theta - 1} (J_+ + J_-),$$

que, si tomamos en cuenta que $l = -(2j + 1)$ (ecuación (7.35)), implica que los elementos no nulos de la matriz Hamiltoniana son

$$\begin{aligned} & 2\mu \langle j, m, l | e^{i\varphi J_2} \hat{H} e^{-i\varphi J_2} | j, m', l \rangle = \\ & = \left\{ -2\kappa \left(1 - \frac{2}{\kappa\theta} \right) m + \kappa(2j + 1) + 2\mu V(\theta(2m + 2j + 1)) \right\} \delta_{m, m'} - \\ & - \frac{2}{\theta} \sqrt{\kappa\theta - 1} \left\{ \sqrt{(j - m + 1)(j + m)} \delta_{m-1, m'} + \sqrt{(j + m + 1)(j - m)} \delta_{m+1, m'} \right\}. \end{aligned} \quad (10.2)$$

Advertir que el problema de autovalores del Hamiltoniano en esta región se reduce a un problema matricial ya que las representaciones unitarias irreducibles de $SU(2)$ son de dimensión finita.

El caso $0 < \kappa < \kappa_c$

Si tomamos $\tanh \alpha = \sqrt{1 - \kappa\theta}$, de las ecuaciones (7.6) y (D.5) se obtiene

$$e^{i\alpha \mathcal{J}_2} \left(\frac{\hat{\mathbf{x}}^2}{\theta} \right) e^{-i\alpha \mathcal{J}_2} = 2\mathcal{J}_0 - \hat{L}, \quad (10.3)$$

$$e^{i\alpha \mathcal{J}_2} \left(\frac{\hat{\boldsymbol{\pi}}^2}{\kappa} \right) e^{-i\alpha \mathcal{J}_2} = 2 \left(\frac{2}{\kappa\theta} - 1 \right) \mathcal{J}_0 - \hat{L} - \frac{2}{\kappa\theta} \sqrt{1 - \kappa\theta} (\mathcal{J}_+ + \mathcal{J}_-),$$

que, tomando en cuenta (7.15), implica que los elementos matriciales no nulos del Hamiltoniano son

$$\begin{aligned}
& 2\mu \langle k, m, l | e^{i\alpha\mathcal{J}_2} \hat{H} e^{-i\alpha\mathcal{J}_2} | k, m', l \rangle = \\
& = \left\{ 2\kappa \left(\frac{2}{\kappa\theta} - 1 \right) m - \kappa l + 2\mu V(\theta(2m - l)) \right\} \delta_{m,m'} - \\
& - \frac{2}{\theta} \sqrt{1 - \kappa\theta} \left\{ \sqrt{\left(m - \frac{1}{2}\right)^2 - \left(k - \frac{1}{2}\right)^2} \delta_{m-1,m'} + \right. \\
& \left. + \sqrt{\left(m + \frac{1}{2}\right)^2 - \left(k - \frac{1}{2}\right)^2} \delta_{m+1,m'} \right\}, \tag{10.4}
\end{aligned}$$

donde k es un entero o semi-entero positivo, $m = k, k + 1, k + 2, \dots$ y $l = \pm(2k - 1)$. Advertir que en este caso, los autovectores del Hamiltoniano están contenidos en representaciones irreducibles infinito-dimensionales y, para ambos signos de l , el argumento del potencial es $\theta[2m \mp (2k - 1)] \geq \theta$.

El caso $\kappa < 0$

De las ecuaciones (7.18) y (D.6), tomando $\tanh \beta = -\left(\sqrt{1 + |\kappa|\theta}\right)^{-1}$, obtenemos

$$\begin{aligned}
& e^{i\beta\mathcal{J}_1} \left(\frac{\hat{\mathbf{x}}^2}{\theta} \right) e^{-i\beta\mathcal{J}_1} = 2\mathcal{J}_0 - \hat{L}, \\
& e^{i\beta\mathcal{J}_1} \left(\frac{\hat{\boldsymbol{\pi}}^2}{|\kappa|} \right) e^{-i\beta\mathcal{J}_1} = 2 \left(1 + \frac{2}{|\kappa|\theta} \right) \mathcal{J}_0 + \hat{L} + \frac{2i}{|\kappa|\theta} \sqrt{1 + |\kappa|\theta} (\mathcal{J}_+ - \mathcal{J}_-). \tag{10.5}
\end{aligned}$$

Teniendo en cuenta (7.19), concluimos que los elementos matriciales no nulos del Hamiltoniano son en este caso

$$\begin{aligned}
& 2\mu \langle k, m, l | e^{i\beta\mathcal{J}_1} \hat{H} e^{-i\beta\mathcal{J}_1} | k, m', l \rangle = \\
& = \left\{ 2|\kappa| \left(1 + \frac{2}{|\kappa|\theta} \right) m + |\kappa|l + 2\mu V(\theta(2m - l)) \right\} \delta_{m,m'} + \\
& + \frac{2i}{\theta} \sqrt{1 + |\kappa|\theta} \left\{ \sqrt{\left(m - \frac{1}{2}\right)^2 - \left(k - \frac{1}{2}\right)^2} \delta_{m-1,m'} - \right. \\
& \left. - \sqrt{\left(m + \frac{1}{2}\right)^2 - \left(k - \frac{1}{2}\right)^2} \delta_{m+1,m'} \right\}, \tag{10.6}
\end{aligned}$$

donde nuevamente k es un entero o semi-entero positivo, $m = k, k + 1, k + 2, \dots$ y $l = \pm(2k - 1)$.

11. EL POZO DE POTENCIAL CIRCULAR

En esta sección aplicamos los resultados previamente expuestos al caso del pozo de potencial circular sobre este plano no-conmutativo, para el cual

$$V(\hat{\mathbf{x}}^2) := V_0 \Theta(\hat{\mathbf{x}}^2 - A^2), \quad (11.1)$$

donde V_0 es una constante con unidades de energía, A es el *radio* del pozo y tomamos la función salto unitario como

$$\Theta(z) := \begin{cases} 0, & z \leq 0, \\ 1, & z > 0. \end{cases} \quad (11.2)$$

En cada región del parámetro κ , el operador $\Theta(\hat{\mathbf{x}}^2 - A^2)$ queda definido a través de su descomposición espectral, como fue explicado para un potencial general en la sección previa.

El caso $\kappa > \kappa_c$

En esta región, de (10.1) obtenemos

$$\begin{aligned} e^{i\varphi J_2} \Theta(\hat{\mathbf{x}}^2 - A^2) e^{-i\varphi J_2} &:= \Theta\left(2J_3 - \hat{L} - \frac{A^2}{\theta}\right) = \\ &= \sum_j \sum_{m=-j}^j |j, m, l\rangle \Theta\left(2m + (2j + 1) - \frac{A^2}{\theta}\right) \langle j, m, l| \end{aligned} \quad (11.3)$$

donde la suma se extiende sobre todas las representaciones irreducibles $\langle j, l \rangle$ de $SU(2) \otimes SO(2)$ con $l = -(2j + 1)$.

Definamos el entero o semi-entero $m_{0,j}$ por

$$2m_{0,j} = \left\lfloor \frac{A^2}{\theta} \right\rfloor - (2j + 1) \geq -(2j + 1), \quad (11.4)$$

donde $[x]$ significa el mayor entero menor o igual que x . Luego,

$$e^{i\varphi J_2} \Theta(\hat{\mathbf{x}}^2 - A^2) e^{-i\varphi J_2} = \sum_j \sum_{m > -j}^j |j, m, l\rangle \Theta(m - m_{0,j}) \langle j, m, l|, \quad (11.5)$$

que es el proyector ortogonal sobre un subespacio (finito dimensional - posiblemente trivial) de cada representación irreducible. En efecto, la suma sobre el lado derecho excluye aquellos vectores $|j, m, l\rangle$ para los cuales el *radio medio cuadrado* es menor o igual que el radio cuadrado del pozo circular (ver ecuación (10.1)), $2m + 2j + 1 \leq A^2/\theta$.

Escribiendo $|\psi_j\rangle = e^{-i\varphi J_2} \sum_{m=-j}^j C_m |j, m, l\rangle$, obtenemos para los autovectores de \hat{H} en una representación irreducible $\langle j, l \rangle$

$$\begin{aligned} &2\mu \langle j, m, l| e^{i\varphi J_2} (\hat{H} - E) |\psi_j\rangle = \\ &= \left\{ -2\kappa \left(1 - \frac{2}{\kappa\theta}\right) m + \kappa(2j + 1) + 2\mu V_0 \Theta(m - m_{0,j}) - 2\mu E \right\} C_m - \\ &-\frac{2}{\theta} \sqrt{\kappa\theta - 1} \left\{ \sqrt{(j - m + 1)(j + m)} C_{m-1} + \sqrt{(j + m + 1)(j - m)} C_{m+1} \right\} = 0, \end{aligned} \quad (11.6)$$

la cual es una relación de recursión lineal de tres términos para los coeficientes de Fourier C_m con $-j \leq m \leq j$.

Advertir que la primera ecuación de esta recursión ($m = -j$) se reduce a

$$\left\{ 2\kappa \left(1 - \frac{2}{\kappa\theta} \right) j + \kappa(2j+1) + 2\mu V_0 \Theta(-j - m_{0,j}) - 2\mu E \right\} C_{-j} - \frac{2}{\theta} \sqrt{\kappa\theta - 1} \sqrt{2j} C_{1-j} = 0. \quad (11.7)$$

Luego, si $C_{-j} = 0 \Rightarrow C_{1-j} = 0$ y se obtiene la solución trivial. Por tanto, $C_{-j} \neq 0$. La linealidad del sistema nos permite tomar $C_{-j} = 1$, por ejemplo, y entonces la ecuación (11.7) determina C_{-j+1} como una función lineal de E .

Luego se aplica (11.6) $(2j - 1)$ veces para construir recursivamente los $(2j - 1)$ coeficientes de Fourier restantes como polinomios de E de grado creciente. Al hacerlo se obtiene C_j como un polinomio de grado $2j$. Finalmente, la última ecuación ($m = j$),

$$\left\{ -2\kappa \left(1 - \frac{2}{\kappa\theta} \right) j + \kappa(2j+1) + 2\mu V_0 \Theta(j - m_{0,j}) - 2\mu E \right\} C_j - \frac{2}{\theta} \sqrt{\kappa\theta - 1} \sqrt{2j} C_{j-1} = 0, \quad (11.8)$$

determina los autovalores como raíces de un polinomio de grado $(2j + 1)$.

Por ejemplo, para $j = 0$ se tiene una sola ecuación,

$$2\mu E = \kappa + 2\mu V_0 \Theta \left(-\frac{1}{2} \left[\frac{A^2}{\theta} - 1 \right] \right), \quad (11.9)$$

la cual determina la energía del único estado en esta representación irreducible. Advertir que la partícula en este estado siente el potencial sólo si el radio del pozo es $A < \sqrt{\theta}$.

Para $j = 1/2$, con $C_{-1/2} = 1$, se tiene

$$C_{1/2} = \frac{\theta [2\mu E - 3\kappa - 2\mu V_0 \Theta(-\frac{1}{2} - m_{0,1/2})] + 2}{2\sqrt{\theta\kappa - 1}} \quad (11.10)$$

donde $m_{0,1/2} = \frac{1}{2} \left[\frac{A^2}{\theta} - 2 \right]$, y la condición

$$\left\{ -\kappa \left(1 - \frac{2}{\kappa\theta} \right) + 2\kappa + 2\mu V_0 \Theta \left(\frac{1}{2} - m_{0,1/2} \right) - 2\mu E \right\} C_{1/2} - \frac{2}{\theta} \sqrt{\kappa\theta - 1} C_{-1/2} = 0, \quad (11.11)$$

deviene en un polinomio de grado 2 cuyas raíces,

$$E_{\pm} = \frac{\kappa}{\mu} \left[1 \pm \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\mu V_0}{\kappa} \left(\frac{4}{\theta\kappa} + \frac{\mu V_0}{\kappa} - 2 \right) \left[\Theta \left(\frac{1}{2} - m_{0,1/2} \right) - \Theta \left(-\frac{1}{2} - m_{0,1/2} \right) \right] + 1} \right] + \frac{1}{2} V_0 \left[\Theta \left(-\frac{1}{2} - m_{0,1/2} \right) + \Theta \left(\frac{1}{2} - m_{0,1/2} \right) \right], \quad (11.12)$$

corresponden a los dos autovectores de \hat{H} en esta representación irreducible, determinada por los coeficientes en (11.10). Tener en cuenta que, en esta representación, la partícula puede sentir el potencial sólo si $A < \sqrt{3\theta}$.

Para el análisis del caso general introduciremos la función generatriz de los coeficientes y transformaremos las relaciones de recursión en una ecuación diferencial. Llamemos

$$a = b - \frac{1}{b}, \quad \text{con } b = \sqrt{\theta\kappa - 1}, \quad (11.13)$$

$$z = \frac{\theta\mu [E - V_0\Theta(m - m_0)]}{\sqrt{\theta\kappa - 1}} - \frac{\theta\kappa(2j + 1)}{2\sqrt{\theta\kappa - 1}},$$

y escribamos

$$C_m = \frac{\sqrt{(j - m)!} \sqrt{(j + m)!}}{\sqrt{(2j)!}} K_{m+j}. \quad (11.14)$$

Luego, de la ecuación (11.6) se obtiene

$$(a(n - j) + z) K_n + (2j - n + 1) K_{n-1} + (n + 1) K_{n+1} = 0, \quad (11.15)$$

para $n = 1, 2, \dots, 2j - 1$ y

$$(-aj + z) K_0 + K_1 = 0, \quad (11.16)$$

$$(aj + z) K_{2j} + K_{2j-1} = 0,$$

para $n = 0$ y $n = 2j$ respectivamente.

Definimos la función generatriz de los coeficientes K_n como

$$f(x) := \sum_{n=0}^{2j} K_n x^n \quad (11.17)$$

y, para z constante, transformamos la relación de recursión de (11.15) en la ecuación diferencial lineal

$$(2jx + z - aj)f(x) + (ax - x^2 + 1)f'(x) = 0, \quad (11.18)$$

cuya solución puede escribirse como

$$f(x) = \left(1 - \frac{x}{b}\right)^{j + \frac{bz}{b^2+1}} (1 + bx)^{j - \frac{bz}{b^2+1}}. \quad (11.19)$$

Los coeficientes derivados de $f(x)$ pueden ser expresados en término de los polinomios de Jacobi,

$$K_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(0) = \frac{(-1)^n}{b^n} P_n^{\left(\frac{bz}{b^2+1} + j - n, -2j - 1\right)} (1 + 2b^2). \quad (11.20)$$

Estos coeficientes son polinomios en z de grado n que satisfacen (11.15) para cualquier $2j \geq n \geq 0$, como puede ser fácilmente verificado a partir de su relación con las funciones hipergeométricas ¹⁴.

¹⁴En efecto, los polinomios de Jacobi están relacionados con la función hipergeométrica Gaussiana a través de

$$P_n^{(\alpha, \beta)}(y) = \frac{(\alpha + 1)_n}{n!} {}_2F_1\left(-n, n + \alpha + \beta + 1; \alpha + 1; \frac{1 - y}{2}\right), \quad (11.21)$$

Consideremos primero aquellas representaciones irreducibles ($2j+1$ -dimensionales) con $j \leq m_{0,j}$. En este caso, $\Theta(m - m_{0,j}) = 0$ para todo $-j \leq m \leq j$ y la partícula no experimentará el salto de potencial. Por tanto, los correspondientes autovalores del Hamiltoniano quedan determinados por la segunda condición de la ecuación (11.16),

$$\begin{aligned} (aj + z) \frac{(-1)^{2j}}{b^{2j}} P_{2j}^{\left(\frac{bz}{b^2+1} - j, -2j-1\right)} (1 + 2b^2) + \frac{(-1)^{2j-1}}{b^{2j-1}} P_{2j-1}^{\left(\frac{bz}{b^2+1} - j+1, -2j-1\right)} (1 + 2b^2) \\ = -(2j + 1) \frac{(-1)^{2j+1}}{b^{2j+1}} P_{2j+1}^{\left(\frac{bz}{b^2+1} - j-1, -2j-1\right)} (1 + 2b^2) = 0, \end{aligned} \quad (11.23)$$

donde la recursión de estos polinomios para $n = 2j$ ha sido utilizada. Luego, las $2j + 1$ raíces de los polinomios en z

$$P_{2j+1}^{\left(\frac{bz_r}{b^2+1} - j-1, -2j-1\right)} (1 + 2b^2) = 0, \quad z_r, r = 1, 2, \dots, 2j + 1, \quad (11.24)$$

dan los autovalores como

$$E_r = z_r \frac{\sqrt{\theta\kappa - 1}}{\theta\mu} + \frac{(2j + 1)\kappa}{2\mu}. \quad (11.25)$$

Por otro lado, para aquellas representaciones irreducibles con $j > m_{0,j}$, se debe construir un segundo conjunto de coeficientes que satisfacen la relación de recursión con el valor corrido de z como en la segunda línea de (11.16), y luego determinar el espectro imponiendo las dos *condiciones de empalme* correspondientes a la ecuación (11.15) con $m = m_{0,j}$ y $m = m_{0,j} + 1$.

En definitiva, refrirámonos al pozo de potencial circular infinito. De las ecuaciones (11.13) y (11.15) se ve que $C_m \sim O(V_0^{-1})$ para cualquier $m \geq m_{0,j} + 1$. Por tanto, en el límite $V_0 \rightarrow \infty$ se debe tener

$$(am_{0,j} + z) K_{m_{0,j}+j} + (j - m_{0,j} + 1) K_{m_{0,j}+j-1} = 0, \quad (11.26)$$

que, de acuerdo con la relación de recursión (11.15), implica que los autovalores quedan determinados por las raíces del polinomio de grado $(m_{0,j} + j + 1)$ en z

$$P_{m_{0,j}+j+1}^{\left(\frac{bz}{b^2+1} - m_{0,j}-1, -2j-1\right)} (1 + 2b^2) = 0. \quad (11.27)$$

Consecuentemente, en esta representación irreducible hay $(m_{0,j} + j + 1)$ autovectores linealmente independientes del Hamiltoniano, mientras que aquellos estados en que $m \geq m_{0,j} + 1$ no son accesibles a la partícula.

donde $(\alpha)_n := \Gamma(\alpha + n)/\Gamma(\alpha)$ es el símbolo de Pochhammer. Luego, la relación de recursión que satisfacen estos polinomios puede ser mapeada a la relación

$$\begin{aligned} 2(\alpha)_{n+1} {}_2F_1\left(-n-1, n+\alpha+\beta+1; \alpha; \frac{1-y}{2}\right) - \\ (\alpha+1)_n (\alpha-\beta+2n(y-1) + y(\alpha+\beta+1) - 1) {}_2F_1\left(-n, n+\alpha+\beta+1; \alpha+1; \frac{1-y}{2}\right) - \\ n(y-1)(\beta+n)(\alpha+2)_{n-1} {}_2F_1\left(1-n, n+\alpha+\beta+1; \alpha+2; \frac{1-y}{2}\right) = 0, \end{aligned} \quad (11.22)$$

que satisface la función hipergeométrica [82, 85].

El caso $0 < \kappa < \kappa_c$

A partir de la ecuación (10.3) podemos escribir

$$\begin{aligned} e^{i\alpha\mathcal{J}_2} \Theta(\hat{\mathbf{x}}^2 - A^2) e^{-i\alpha\mathcal{J}_2} &:= \Theta\left(2\mathcal{J}_0 - \hat{L} - \frac{A^2}{\theta}\right) = \\ &= \sum_{k \geq \frac{1}{2}} \sum_{l = \pm(2k-1)} \sum_{m=k}^{\infty} |k, m, l\rangle \Theta\left(2m - l - \frac{A^2}{\theta}\right) \langle k, m, l| \end{aligned} \quad (11.28)$$

para $\alpha = \tanh^{-1} \sqrt{1 - \kappa\theta}$ real.

Si escribimos $m = k + n$ con $n = 0, 1, 2, \dots$ y $l = s(2k - 1)$ con $s = \pm 1$, vemos que la función salto unitario en el lado derecho de (11.28) se anula para

$$0 \leq n \leq \frac{A^2}{2\theta} - \frac{s}{2} + k(s - 1). \quad (11.29)$$

Luego, definimos $n_{0,k}^{(s)}$ como el máximo entero en este conjunto,

$$n_{0,k}^{(s)} = \left\lfloor \frac{A^2}{2\theta} - \frac{s}{2} \right\rfloor + k(s - 1) \geq 0 \quad (11.30)$$

donde $\lfloor x \rfloor$ significa el mayor entero menor o igual que x y escribimos

$$\begin{aligned} e^{i\alpha\mathcal{J}_2} \Theta(\hat{\mathbf{x}}^2 - A^2) e^{-i\alpha\mathcal{J}_2} &= \\ &= \sum_{k \geq \frac{1}{2}} \sum_{s = \pm} \sum_{m=k}^{\infty} |k, m, s(2k - 1)\rangle \Theta\left(m - k - n_{0,k}^{(s)}\right) \langle k, m, s(2k - 1)|. \end{aligned} \quad (11.31)$$

Ésta es la resolución espectral del operador que, en cada representación irreducible, se reduce a un proyector ortogonal sobre el subespacio caracterizado por la condición $m > k + n_{0,k}^{(\pm)}$. En efecto, la suma sobre el lado derecho excluye aquellos vectores $|k, m, \pm(2k - 1)\rangle$ para los cuales *el radio medio cuadrado* es menor o igual que el radio cuadrado del pozo circular (ver ecuación (10.1)), $2m \mp (2k - 1) \leq A^2/\theta$.

Escribiendo $|\psi_{k,\pm}\rangle = e^{-i\alpha\mathcal{J}_2} \sum_{m \geq k}^{\infty} C_m |k, m, \pm(2k - 1)\rangle$, obtenemos para los autovectores de \hat{H} en la representación irreducible $\langle k, s(2k - 1)\rangle$ la siguiente relación de recurrencia de tres términos,

$$\begin{aligned} 2\mu \langle k, m, s(2k - 1)| e^{i\alpha\mathcal{J}_2} (\hat{H} - E) |\psi_{k,s}\rangle &= \\ &= \left\{ 2\kappa \left(\frac{2}{\kappa\theta} - 1 \right) m - s\kappa(2k - 1) + 2\mu V_0 \Theta\left(m - k - n_{0,k}^{(s)}\right) - 2\mu E \right\} C_m - \\ &\quad - \frac{2}{\theta} \sqrt{1 - \kappa\theta} \left\{ \sqrt{\left(m - \frac{1}{2}\right)^2 - \left(k - \frac{1}{2}\right)^2} C_{m-1} + \right. \\ &\quad \left. + \sqrt{\left(m + \frac{1}{2}\right)^2 - \left(k - \frac{1}{2}\right)^2} C_{m+1} \right\} = 0. \end{aligned} \quad (11.32)$$

Remarquemos en primer lugar que, a pesar de que los generadores en la ecuación (7.1) no tienen un límite bien definido cuando $\kappa \rightarrow 0$, la relación de recursión previa sí lo tiene,

$$\begin{aligned} & \left\{ 2m + \mu\theta \left[V_0 \Theta \left(m - k - n_{0,k}^{(s)} \right) - E \right] \right\} C_m - \\ & - \left\{ \sqrt{(m-k)(m+k-1)} C_{m-1} + \sqrt{(m-k+1)(m+k)} C_{m+1} \right\} = 0. \end{aligned} \quad (11.33)$$

Esta relación tiene dos soluciones linealmente independientes que han sido encontradas en [74], donde el espacio de Hilbert de estados del pozo de potencial no-conmutativo (con $\kappa = 0$) ha sido realizado en términos de operadores de Hilbert-Schmidt definidos sobre un espacio de Hilbert auxiliar. En efecto, la solución general para C_m en (11.33) para $m \leq (k + n_{0,k}^{(s)} + 1)$ o $m \geq (k + n_{0,k}^{(s)} + 2)$, puede ser escrita como una combinación lineal de la forma $C_{k+n} = a\psi_{n,k}(z) + b\phi_{n,k}(z)$, donde

$$\begin{aligned} \psi_{n,k}(z) &= \sqrt{\frac{n!(2k-1)!}{(n+2k-1)!}} L_n^{(2k-1)}(z) = \sqrt{\frac{(n+2k-1)!}{n!(2k-1)!}} M(-n, 2k, z), \\ \phi_{n,k}(z) &= \sqrt{\frac{n!(n+2k-1)!}{(2k-1)!}} U(n+1, 2-2k, -z). \end{aligned} \quad (11.34)$$

En estas definiciones, $L_n^{(\alpha)}(x)$ es el polinomio asociado de Laguerre, $M(a, b, x)$ y $U(a, b, x)$ son las funciones hipergeométricas confluentes de Kummer y $z = \mu\theta \left[E - V_0 \Theta \left(n - n_{0,k}^{(s)} \right) \right]$ es constante para $n \leq n_{0,k}^{(s)}$ y para $n > n_{0,k}^{(s)}$.

Consideremos primero el caso en que $m \leq k + n_{0,k}^{(s)}$, para el cual z en la ecuación de recursión toma el valor $z = \mu\theta E > 0$. El primer paso en (11.33) (con $m = k$) se reduce a

$$(2k - z) C_k - \sqrt{2k} C_{k+1} = 0. \quad (11.35)$$

Es evidente que, con el fin de obtener soluciones no-triviales, se debe tomar $C_k \neq 0$ y, por linealidad, es posible tomar $C_k = 1$.

Más aún, es posible verificar que sólo $\psi_{n,k}(z)$ satisface la primera ecuación,

$$\begin{aligned} (2k - z) \psi_{0,k}(z) - \sqrt{2k} \psi_{1,k}(z) &= 0, \\ (2k - z) \phi_{0,k}(z) - \sqrt{2k} \phi_{1,k}(z) &= 1. \end{aligned} \quad (11.36)$$

Luego, ya que $\psi_{0,k}(z) = 1$, se tiene

$$C_{k+n} = \psi_{n,k}(z) = \sqrt{\frac{n!(2k-1)!}{(n+2k-1)!}} L_n^{(2k-1)} \left(\frac{\mu\theta E}{\hbar^2} \right), \quad 0 \leq n \leq n_{0,k}^{(s)}. \quad (11.37)$$

Si se buscan los estados ligados, la condición de normalizabilidad debe ser impuesta ya que los coeficientes deben satisfacer la desigualdad de Bessel,

$$\sum_{n=0}^{\infty} |C_{k+n}|^2 < \infty. \quad (11.38)$$

Entonces, el comportamiento de $\psi_{n,k}(z)$ y $\phi_{n,k}(z)$ para grandes n debe ser tomado en cuenta cuando se considera el caso $m \geq (k + n_{0,k}^{(s)} + 1)$, donde $z = \mu\theta [E - V_0]$.

Para los dos factores en $\psi_{n,k}(z)$ tenemos [82, 83]

$$\sqrt{\frac{n!(2k-1)!}{(n+2k-1)!}} \approx \sqrt{(2k-1)!} n^{\frac{1}{2}-k} (1 + O(n^{-1})), \quad (11.39)$$

$$L_n^{(2k-1)}(z) \approx \frac{e^{z/2} n^{k-\frac{3}{4}} z^{\frac{1}{4}-k}}{\sqrt{\pi}} \left\{ \sin \left[\pi \left(k + \frac{1}{4} \right) - 2\sqrt{z(k+n)} \right] + O(n^{-1/2}) \right\}.$$

Luego, para $E < V_0$ ($z < 0$), este comportamiento conlleva a coeficientes exponencialmente crecientes, $C_{k+n} \sim n^{-1/4} e^{2\sqrt{n}\sqrt{\frac{\mu\theta}{k^2}[V_0-E]}}$, y deben ser descartados. Para estados de scattering ($E > V_0 \Rightarrow z > 0$), $\psi_{n,k}(z)$ se comporta como $n^{-1/4}$ veces una función oscilatoria, dando origen a coeficientes acotados (los cuales no conllevan a soluciones normalizables).

Por otro lado, de la ecuación (9) en la página 279 de la ref. [84] tenemos que

$$U(a, b, x) =$$

$$\frac{(1+i)}{2} \gamma^{-\frac{1}{4}+\gamma} x^{\frac{1}{4}-\frac{b}{2}} \exp \left[-\gamma + \frac{x}{2} - i\gamma\pi + 2i\sqrt{\gamma x} \right] \left\{ 1 + O \left(\frac{1}{\sqrt{|\gamma|}} \right) \right\}, \quad (11.40)$$

para $a \rightarrow \infty$, con $\gamma = \frac{b}{2} - a$, $\varepsilon < \arg \gamma < 3\pi - \varepsilon$, y $|\arg x - \arg \gamma| \leq \pi$. Más aún, la aproximación de Stirling conduce a

$$\sqrt{\frac{n!(n+2k-1)!}{(2k-1)!}} \approx \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{(2k-1)!}} e^{-n} n^{n+k} (1 + O(n^{-1})). \quad (11.41)$$

Luego,

$$\phi_{n,k}(z) \approx \frac{\sqrt{\pi} e^{-z/2} (-z)^{k-\frac{3}{4}}}{\sqrt{(2k-1)!}} n^{-1/4} e^{-2\sqrt{n}\sqrt{-z}} (1 + O(n^{-1/2})) \quad (11.42)$$

el cual, para estados ligados ($z < 0$), tiene un comportamiento exponencialmente decreciente mientras que, para estados de scattering ($z > 0$) se comporta como $n^{-1/4}$ veces una función oscilante.

Por tanto, para construir estados (normalizables) ligados debemos escribir $C_{k+n} = N \phi_{n,k}(z)$ para $n \geq (n_{0,k}^{(s)} + 1)$. La constante de proporcionalidad N y los autovalores de energía quedan determinados por dos *condiciones de empalme* seguidas de la ecuación (11.33) con $m = k + n_{0,k}^{(s)}$ y $m = k + n_{0,k}^{(s)} + 1$, ecuaciones en las que ambos tipos de coeficientes aparecen:

$$\begin{aligned} & \left\{ 2 \left(k + n_{0,k}^{(s)} \right) - \mu\theta E \right\} C_{k+n_{0,k}^{(s)}} - \left\{ \sqrt{n_{0,k}^{(s)} \left(2k - 1 + n_{0,k}^{(s)} \right)} C_{k+n_{0,k}^{(s)}-1} + \right. \\ & \quad \left. + \sqrt{\left(n_{0,k}^{(s)} + 1 \right) \left(2k + n_{0,k}^{(s)} \right)} C_{k+n_{0,k}^{(s)}+1} \right\} = 0, \\ & \left\{ 2 \left(k + n_{0,k}^{(s)} + 1 \right) + \mu\theta [V_0 - E] \right\} C_{k+n_{0,k}^{(s)}+1} - \left\{ \sqrt{\left(n_{0,k}^{(s)} + 1 \right) \left(2k + n_{0,k}^{(s)} \right)} C_{k+n_{0,k}^{(s)}} + \right. \\ & \quad \left. + \sqrt{\left(n_{0,k}^{(s)} + 2 \right) \left(2k + n_{0,k}^{(s)} + 1 \right)} C_{k+n_{0,k}^{(s)}+2} \right\} = 0, \end{aligned} \quad (11.43)$$

donde

$$C_{k+n_{0,k}^{(s)}-1} = \psi_{n_{0,k}^{(s)}-1,k}(\mu\theta E), \quad C_{k+n_{0,k}^{(s)}} = \psi_{n_{0,k}^{(s)},k}(\mu\theta E), \quad (11.44)$$

$$C_{k+n_{0,k}^{(s)}+1} = N \phi_{n_{0,k}^{(s)}+1,k}(\mu\theta(E-V_0)), \quad C_{k+n_{0,k}^{(s)}+2} = N \phi_{n_{0,k}^{(s)}+2,k}(\mu\theta(E-V_0)).$$

Para estados de scattering, con $z = \mu\theta[E - V_0] > 0$, los coeficientes para $n \geq n_{0,k}^{(s)} + 1$ deben ser tomados como una combinación lineal de la forma $C_{k+n} = N_1 \psi_{n,k}(z) + N_2 \phi_{n,k}(z)$, puesto que ambas funciones se comportan de forma similar. En este caso las constantes $N_{1,2}$ quedan determinadas por las condiciones de empalme de la ecuación (11.43) como funciones de E .

Esto está en acuerdo con los resultados de [74]. En particular, para el pozo de potencial circular infinito ($V_0 \rightarrow \infty$), de (11.33) se concluye que $C_m = O(V_0^{-1})$ para $m \geq k + n_{0,k}^{(s)} + 1$. Luego, la primera condición de empalme en (11.43) requiere que

$$\left\{ 2 \left(k + n_{0,k}^{(s)} \right) - \mu\theta E \right\} C_{k+n_{0,k}^{(s)}} - \sqrt{n_{0,k}^{(s)} \left(2k - 1 + n_{0,k}^{(s)} \right)} C_{k+n_{0,k}^{(s)}-1} \xrightarrow{V_0 \rightarrow \infty} 0. \quad (11.45)$$

En este límite, esto impone la siguiente condición que determina el espectro,

$$\left\{ 2 \left(k + n_{0,k}^{(s)} \right) - \mu\theta E \right\} \psi_{n_{0,k}^{(s)},k}(\mu\theta E) - \sqrt{n_{0,k}^{(s)} \left(2k - 1 + n_{0,k}^{(s)} \right)} \psi_{n_{0,k}^{(s)}-1,k}(\mu\theta E) \\ = \sqrt{\left(n_{0,k}^{(s)} + 1 \right) \left(2k + n_{0,k}^{(s)} \right)} \psi_{n_{0,k}^{(s)}+1,k} = 0, \quad (11.46)$$

donde la relación de recursión que satisface $\psi_{n,k}(z)$ ha sido utilizada.

Por tanto, de (11.34) se concluye que los autovalores de energía quedan determinados por las $n_{0,k}^{(s)} + 1$ raíces de los polinomios asociados de Laguerre $L_{n_{0,k}^{(s)}+1}^{(2k-1)}(z)$,

$$L_{n_{0,k}^{(s)}+1}^{(2k-1)}(z_r) = 0, \quad \text{with } z_r = \mu\theta E_r, \quad r = 1, 2, \dots, n_{0,k}^{(s)} + 1. \quad (11.47)$$

Advertir que, para un k dado y $s = +1$ ($l \geq 0$), el número de autovectores linealmente independientes del Hamiltoniano en esta representación irreducible es

$$n_{0,k}^{(+)} + 1 = \left\lfloor \frac{A^2}{2\theta} - \frac{1}{2} \right\rfloor + 1, \quad (11.48)$$

el cual es finito e independiente de k (y al menos 1 si suponemos que $\frac{A^2}{\theta} \geq 1$). Por otro lado, para $s = -1$ ($l < 0$), el número de autovectores independientes es

$$n_{0,k}^{(-)} + 1 = \left\lfloor \frac{A^2}{2\theta} + \frac{1}{2} \right\rfloor - (2k - 1) \quad (11.49)$$

que, para A dado, decrece linealmente con k . En particular, no hay soluciones no-triviales para

$$k > \frac{1}{2} \left\lfloor \frac{A^2}{2\theta} + \frac{1}{2} \right\rfloor + \frac{1}{2}. \quad (11.50)$$

Por tanto, para cada $l = 2k - 1$ positivo, el Hamiltoniano del pozo de potencial circular sobre el plano no-conmutativo tiene un número finito de autovectores que es independiente de $k = \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \dots$, mientras que para negativo $l = -(2k - 1)$, hay solo un número finito de representaciones irreducibles donde el Hamiltoniano tiene autovectores, y su número decrece linealmente con k . Estos resultados están además en acuerdo con [74]. Advertir que en el límite $\theta \rightarrow 0$ se recupera un número infinito por cada $l \in \mathbb{Z}$, como corresponde a un sistema definido en el espacio conmutativo usual.

Volvamos ahora al caso $0 < \kappa < \kappa_c$, en la ecuación (11.32). Una posibilidad consiste en el desarrollo en potencias de κ de los distintos elementos y la determinación perturbativa de la corrección a los coeficientes C_m y autovalores de energía.

Alternativamente, es posible transformar la relación de recursión en una ecuación diferencial ordinaria cuya solución es la función generatriz de los coeficientes. En efecto, escribamos la ecuación (11.32) como

$$(an - w)C_{k+n} - \sqrt{n(2k+n-1)}C_{k+n-1} - \sqrt{(n+1)(2k+n)}C_{k+n+1} = 0, \quad (11.51)$$

donde

$$a = b + \frac{1}{b} > 2, \quad b = \sqrt{1 - \theta\kappa} < 1, \quad (11.52)$$

$$w = \frac{\theta\mu}{\sqrt{1 - \theta\kappa}} \left[E - V_0\Theta \left(n - n_{0,k}^{(s)} \right) \right] - \frac{2k}{\sqrt{1 - \theta\kappa}} + \frac{\theta\kappa(2k(s+1) - s)}{2\sqrt{1 - \theta\kappa}},$$

y definimos

$$C_{k+n} = \frac{\sqrt{(2k-1)!\sqrt{n!}}}{\sqrt{(2k+n-1)!}} K_n. \quad (11.53)$$

Luego, obtenemos para los coeficientes K_n

$$(w - an)K_n + (2k + n - 1)K_{n-1} + (n + 1)K_{n+1} = 0 \quad (11.54)$$

para $n \geq 1$ y

$$wK_0 + K_1 = 0 \quad (11.55)$$

para $n = 0$.

Definamos ahora

$$f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} K_n x^n. \quad (11.56)$$

Multiplicando ambos lados de la ecuación (11.54) por x^n , reordenando términos y tomando w como una constante tenemos para $f(x)$ la ecuación diferencial

$$(1 - ax + x^2) f'(x) + (2kx + w)f(x) = 0, \quad (11.57)$$

cuya solución es

$$f(x) = (1 - bx)^{-\left(\frac{bw+2k}{1-b^2}\right)} \left(1 - \frac{x}{b}\right)^{\left(\frac{bw+2k}{1-b^2}\right)-2k}. \quad (11.58)$$

Los coeficientes finalmente vienen dados por

$$K_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(0). \quad (11.59)$$

En particular, $f(0) = 1$, $f'(0) = -w$ y ecuación (11.55) se satisface. Es fácilmente verificable que K_n así obtenido satisface la ecuación (11.54) para $n \geq 1$. Entonces, es posible escribir

$$C_{n+k} = \Psi_{n,k}(w) := \frac{\sqrt{(2k-1)!}}{\sqrt{(2k+n-1)!}\sqrt{n!}} f^{(n)}(0), \quad \text{for } n = 0, 1, 2, \dots, n_{0,k}^{(s)}, \quad (11.60)$$

donde $\Psi_{n,k}(w)$ son polinomios en w de grado n , con coeficientes dependientes de b , que pueden ser expresados en término de los polinomios de Jacobi [82, 85] $P_n^{(\alpha,\beta)}(t)$ como

$$\Psi_{n,k}(w) := \frac{\sqrt{(2k-1)!}\sqrt{n!}}{\sqrt{(2k+n-1)!}} \left(-\frac{1}{b}\right)^n P_n^{\left(\frac{bw+2k}{1-b^2}-2k-n, 2k-1\right)}(1-2b^2). \quad (11.61)$$

Advertir que $f(x)$ se reduce a la función generatriz de los polinomios asociados de Laguerre $L_n^{(2k-1)}(w+2k)$ [82] en el límite $b \rightarrow 1^-$ ($\kappa \rightarrow 0^+$):

$$f_0(x) := \lim_{b \rightarrow 1^-} f(x) = \frac{e^{-\frac{x(w+2k)}{1-x}}}{(1-x)^{2k}}, \quad (11.62)$$

con

$$\frac{1}{n!} f_0^{(n)}(0) = L_n^{2k-1}(w+2k). \quad (11.63)$$

Una segunda solución a la relación de recursión es obtenida a partir de la solución de la ecuación diferencial *inhomogénea* (con w corrido por el término dependiente de V_0)

$$(1-ax+x^2)g'(x) + (2kx+w)g(x) = 1, \quad (11.64)$$

dado por

$$g(x) = \frac{b}{bw+2k} {}_2F_1\left(1, 2k; 1 + \frac{2k+bw}{1-b^2}; \frac{1-bx}{1-b^2}\right). \quad (11.65)$$

En efecto, por construcción, los coeficientes

$$K'_n = \frac{1}{n!} g^{(n)}(0) \quad (11.66)$$

satisfacen las relaciones de la ecuación (11.54) para $n \geq 1$, pero no la primera con $n = 0$. Es claro de (11.64) que

$$K'_1 + wK'_0 = 1. \quad (11.67)$$

Estos coeficientes pueden ser empleados para expresar C_{n+k} para $n \geq n_{0,k}^{(s)} + 1$ y, como antes, la ecuación (11.51) para $n = n_{0,k}^{(s)}, n_{0,k}^{(s)} + 1$ provee las dos condiciones de empalme entre ambos comportamientos, necesarias para determinar el espectro.

En concreto, consideremos el pozo de potencial circular infinito. De las ecuaciones (11.51) y (11.52) concluimos que $C_{k+n} = O(V_0^{-1})$ para $n \geq n_{0,k}^{(s)} + 1$. Luego (11.51) implica que

$$\left(an_{0,k}^{(s)} - w\right) C_{k+n_{0,k}^{(s)}} - \sqrt{n_{0,k}^{(s)}} \left(2k + n_{0,k}^{(s)} - 1\right) C_{k+n_{0,k}^{(s)}-1} \xrightarrow{V_0 \rightarrow \infty} 0. \quad (11.68)$$

En términos de los polinomios $\Psi_{n,k}(w)$, esta condición se lee como

$$\begin{aligned} (an_{0,k}^{(s)} - w) \Psi_{n_{0,k}^{(s)},k}(w) - \sqrt{n_{0,k}^{(s)}(2k + n_{0,k}^{(s)} - 1)} \Psi_{n_{0,k}^{(s)}-1,k}(w) = \\ = \sqrt{(n_{0,k}^{(s)} + 1)(2k + n_{0,k}^{(s)})} \Psi_{n_{0,k}^{(s)}+1,k}(w) = 0, \end{aligned} \quad (11.69)$$

donde la relación de recursión satisfecha por los $\Psi_{n,k}(w)$ ha sido utilizada.

Por tanto, el espectro queda determinado por las $n_{0,k}^{(s)} + 1$ raíces ω_r del polinomio $\Psi_{n_{0,k}^{(s)}+1,k}(w)$,

$$\Psi_{n_{0,k}^{(s)}+1,k}(w_r) \sim P_{n_{0,k}^{(s)}+1}^{\left(\frac{bw_r+2k}{1-b^2}-2k-n_{0,k}^{(s)}-1, 2k-1\right)}(1-2b^2) = 0, \quad r = 1, 2, \dots, n_{0,k}^{(s)} + 1, \quad (11.70)$$

como

$$E_r = \theta\mu \left\{ w_r \sqrt{1 - \theta\kappa} + 2k - \theta\kappa \left(k(1+s) - \frac{s}{2} \right) \right\}. \quad (11.71)$$

El análisis del número de autovectores linealmente independientes del Hamiltoniano en cada representación irreducible $\langle k, l \rangle$ es similar a la discutida previamente en el caso $\kappa = 0$ de forma que no será repetida. En particular, el espectro converge suavemente a aquel de la ecuación (11.47) cuando $\kappa \rightarrow 0^+$.

El caso $\kappa < 0$

De la ecuación (10.6) se obtiene el operador

$$\begin{aligned} e^{i\beta\mathcal{J}_1} \Theta(\hat{\mathbf{x}}^2 - A^2) e^{-i\beta\mathcal{J}_1} &:= \Theta \left(2\mathcal{J}_0 - \hat{L} - \frac{A^2}{\theta} \right) = \\ &= \sum_{k \geq \frac{1}{2}} \sum_{s=\pm 1} \sum_{m=k}^{\infty} |k, m, s(2k-1)\rangle \Theta \left(m - k - n_{0,k}^{(s)} \right) \langle k, m, s(2k-1)| \end{aligned} \quad (11.72)$$

donde $\beta = -\coth^{-1} \sqrt{1 + |\kappa|\theta}$ y $n_{0,k}^{(s)}$ dado en (11.30). La ecuación (11.72) es la resolución espectral del proyector ortogonal sobre los subespacios caracterizados por la condición $m > k + n_{0,k}^{(\pm)}$ (estados cuyo radio cuadrado medio es mayor que el radio cuadrado del pozo circular).

Escribimos $|\psi_{k,\pm}\rangle = e^{-i\beta\mathcal{J}_1} \sum_{m \geq k}^{\infty} C_m |k, m, \pm(2k-1)\rangle$ y obtenemos a partir de (10.6)

$$\begin{aligned} 2\mu \langle k, m, s(2k-1) | e^{i\beta\mathcal{J}_1} (\hat{H} - E) | \psi_{k,s} \rangle = \\ = \left\{ 2|\kappa| \left(1 + \frac{2}{|\kappa|\theta} \right) m + s|\kappa|(2k-1) + 2\mu V_0 \Theta \left(m - k - n_{0,k}^{(s)} \right) - 2\mu E \right\} C_m + \\ + \frac{2i}{\theta} \sqrt{1 + |\kappa|\theta} \left\{ \sqrt{\left(m - \frac{1}{2} \right)^2 - \left(k - \frac{1}{2} \right)^2} C_{m-1} - \right. \\ \left. - \sqrt{\left(m + \frac{1}{2} \right)^2 - \left(k - \frac{1}{2} \right)^2} C_{m+1} \right\} = 0, \end{aligned} \quad (11.73)$$

igualdad que puede ser reescrita como la relación de recursión de tres términos

$$-i(an - w)C_{k+n} + \sqrt{n(2k + n - 1)}C_{k+n-1} - \sqrt{(n+1)(2k+n)}C_{k+n+1} = 0, \quad (11.74)$$

donde hemos definido

$$a = b + \frac{1}{b} > 2, \quad b = \sqrt{1 + \theta|\kappa|} > 1, \quad (11.75)$$

$$w = \frac{\theta\mu}{\sqrt{1 + \theta|\kappa|}} \left[E - V_0\Theta \left(n - n_{0,k}^{(s)} \right) \right] - \frac{2k}{\sqrt{1 + \theta|\kappa|}} - \frac{\theta\kappa(2k(s+1) - s)}{2\sqrt{1 + \theta|\kappa|}}.$$

Escribimos

$$C_{k+n} = i^n \frac{\sqrt{(2k-1)! \sqrt{n!}}}{\sqrt{(2k+n-1)!}} K_n. \quad (11.76)$$

para obtener

$$(an - w)K_n + (2k + n - 1)K_{n-1} + (n + 1)K_{n+1} = 0 \quad (11.77)$$

para $n \geq 1$ y

$$-wK_0 + K_1 = 0 \quad (11.78)$$

para $n = 0$.

Si definimos

$$f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} K_n x^n, \quad (11.79)$$

de las ecuaciones (11.77) y (11.78) (y para w constante) se obtiene

$$(1 + ax + x^2) f'(x) + (2kx - w)f(x) = 0, \quad (11.80)$$

cuya solución es

$$f(x) = \left(1 + \frac{x}{b}\right)^{-2k - \frac{bw+2k}{b^2-1}} (1 + bx)^{\frac{2k+bw}{b^2-1}}, \quad (11.81)$$

donde hemos impuesto $f(0) = 1$. Los coeficientes están finalmente dados como en (11.59). En particular, $K_0 = 1$ y $K_1 = w$ satisfacen (11.78). Es posible verificar que la ecuación (11.77) es también satisfecha para $n \geq 1$.

Entonces, escribimos finalmente

$$C_{n+k} = \tilde{\Psi}_{n,k}(w) := i^n \frac{\sqrt{(2k-1)!}}{\sqrt{(2k+n-1)! \sqrt{n!}}} f^{(n)}(0), \quad \text{for } n = 0, 1, 2, \dots, \quad (11.82)$$

donde $\tilde{\Psi}_{n,k}(w)$ son polinomios en w de grado n , con coeficientes dependientes de b , los cuales también pueden ser expresados en término de los polinomios de Jacobi como,

$$\tilde{\Psi}_{n,k}(w) := i^n \frac{\sqrt{(2k-1)! \sqrt{n!}}}{\sqrt{(2k+n-1)!}} \left(\frac{1}{b}\right)^n P_n^{\left(-\frac{2k+bw}{b^2-1}, -2k-n, 2k-1\right)} (1 - 2b^2). \quad (11.83)$$

Aquí nuevamente $f(x)$ se reduce a la función generatriz asociada a los polinomios asociados de Laguerre en el límite $b \rightarrow 1^+$ ($\kappa \rightarrow 0^-$),

$$f_0(x) := \lim_{b \rightarrow 1^+} f(x) = \frac{e^{-x} (1+x)^{2k}}{(1+x)^{2k}}, \quad (11.84)$$

con

$$\frac{1}{n!} f_0^{(n)}(0) = (-1)^n L_n^{2k-1}(w+2k). \quad (11.85)$$

Una segunda solución a la relación de recursión (con w corrido por el término que depende de V_0) está dada por la solución de la ecuación diferencial *inhomogénea*

$$(1+ax+x^2)g'(x) + (2kx-w)g(x) = 1, \quad (11.86)$$

dada por

$$g(x) = -\frac{b}{bw+2k} {}_2F_1\left(1, 2k; 1 + \frac{2k+bw}{b^2-1}; -\frac{1+bx}{b^2-1}\right). \quad (11.87)$$

Los coeficientes

$$K'_n = \frac{1}{n!} g^{(n)}(0) \quad (11.88)$$

satisfacen las relaciones dadas en (11.77) para $n \geq 1$, pero para $n = 0$ tenemos

$$K'_1 - wK'_0 = 1. \quad (11.89)$$

Consideremos nuevamente un pozo cilíndrico de altura infinita en esta región de parámetros. Por argumentos análogos a los utilizados en la sección anterior, pero esta vez haciendo uso de la recursión que satisfacen los polinomios $\tilde{\Psi}_{n,k}(w)$, se concluye que el espectro del sistema queda determinado por las raíces ω_r de $\tilde{\Psi}_{n_{0,k}^{(s)}+1,k}(w)$,

$$\Psi_{n_{0,k}^{(s)}+1,k}(w_r) \sim P_{n_{0,k}^{(s)}+1}^{\left(-\frac{2k+bw_r}{b^2-1}-2k-n_{0,k}^{(s)}-1, 2k-1\right)}(1-2b^2) = 0, \quad r = 1, 2, \dots, n_{0,k}^{(s)}+1, \quad (11.90)$$

como

$$E_r = \frac{1}{\theta\mu} \left\{ w_r \sqrt{1 + \theta|\kappa|} + 2k + \theta|\kappa| \left(k(s+1) - \frac{s}{2} \right) \right\} \quad (11.91)$$

(las cuales coinciden con la expresión dada en (11.71) con $\kappa_c > \kappa > 0$).

De aquí en adelante, el análisis continúa de manera similar al de la sección previa: hay un número finito ($n_{0,k}^{(s)}+1$) de autovectores linealmente independientes del Hamiltoniano en cada representación irreducible $\langle k, l \rangle$, el mismo para todo $l = 2k-1$ positivo y un número decreciente para $l = -(2k-1)$ negativo. El espectro converge a aquel dado por la ecuación (11.47) cuando $\kappa \rightarrow 0^-$.

12. CONCLUSIONES

En esta sección hemos estudiado la estructura algebraica de Hamiltonianos no relativistas con potenciales centrales sobre un espacio de fases no-conmutativo. En este plano no-conmutativo hemos definido el generador de las rotaciones \hat{L} y generadores de traslaciones K_i que juegan un rol similar al de los generadores de *traslaciones magnéticas*. Hemos mencionado que con \hat{L} y con expresiones bilineales en K_i y π_i es posible generar un álgebra de Lie de $su(2)$ o $sl(2, \mathfrak{R})$, según sea $\kappa > \kappa_c$ o $\kappa < \kappa_c$, respectivamente. Si bien ellas son reflejo de la rica estructura algebraica de estos sistemas, no son esas álgebras las que no ayudan a resolver el problema de autovalores del Hamiltoniano, por lo que hemos relegado al Apéndice E su consideración. Por el contrario, son expresiones bilineales en coordenadas y momentos no conmutativos las que nos permiten construir generadores de álgebras de Lie $su(2)$ o $sl(2, \mathfrak{R})$, según la región de parámetros, los que, junto al generador de rotaciones, resultan útiles en el estudio de Hamiltonianos con potencial central.

En efecto, independientemente del sector de parámetros de no-conmutatividad considerado, Hamiltonianos invariantes frente a rotaciones sobre el plano no-conmutativo sólo pueden ser función de tres posibles combinaciones bilineales hermíticas de coordenadas y momentos, $\hat{\pi}^2$, $\hat{\mathbf{x}}^2$ y $(\hat{\pi} \cdot \hat{\mathbf{x}} + \hat{\mathbf{x}} \cdot \hat{\pi})$, además del propio generador de las rotaciones \hat{L} . Por construcción, esos operadores cuadráticos conmutan con \hat{L} y, como consecuencia de las reglas de conmutación que satisfacen, ecuación (4.1), hemos visto que generan un álgebra de Lie $su(2)$ o $sl(2, \mathfrak{R})$, dependiendo si $\kappa > \kappa_c$ o $\kappa < \kappa_c$.

En esas condiciones, Hamiltonianos invariantes frente a rotaciones pueden expresarse en términos de los generadores del álgebra y de \hat{L} , operador que hemos mostrado que se encuentra relacionado con el Casimir cuadrático. En consecuencia, los subespacios característicos del Hamiltoniano pueden ordenarse de acuerdo a las representaciones irreducibles del grupo que los contiene y el problema de autovalores admite una solución algebraica. Cabe señalar que esta estructura sólo es posible si ambos parámetros de no-conmutatividad son no nulos, dado que los generadores de esas álgebras no Abelianas no tienen un límite definido para κ o θ tendiendo a cero.

Hemos mostrado que, para las dos fases cuánticas estudiadas, es posible definir los operadores de inversión temporal (\mathcal{T}) y paridad (\mathcal{P}). Para $\kappa < \kappa_c$, encontramos que \hat{L} (el generador de las rotaciones) y $(\hat{\pi} \cdot \hat{\mathbf{x}} + \hat{\mathbf{x}} \cdot \hat{\pi})$, tienen las propiedades de transformación usual bajo inversión temporal y paridad, mientras que $\hat{\pi}^2$ y $\hat{\mathbf{x}}^2$ dejan de ser invariantes. Estos operadores se transforman con un término adicional proporcional a \hat{L} y al producto de los parámetros de no-conmutatividad entre momentos y coordenadas respectivamente. Por tanto, las reglas de transformación usuales son recuperadas en los límites conmutativos. Cabe señalar que todos los operadores permanecen invariantes frente a la transformación \mathcal{PT} .

También hemos determinado las reglas de transformación en la región $\kappa > \kappa_c$, sector que no está conectado con el caso conmutativo, encontrando que las formas cuadráticas de interés son también aquí invariantes frente a la transformación \mathcal{PT} .

El estudio de sistemas sencillos ya considerados en la literatura, como es el caso del oscilador armónico isótropo y el problema de Landau, nos permitió comparar los resultados obtenidos en este contexto algebraico con los ya conocidos, resultado de realizaciones lineales de coordenadas y momentos no-conmutativos en términos de variables dinámicas (u operadores de creación y destrucción) ordinarias, encontrando un pleno acuerdo.

Para el oscilador armónico isótropo se encuentra que el espectro corresponde al de dos osciladores armónicos (unidimensionales) de diferentes frecuencias. Cabe destacar que, si bien este Hamiltoniano no es invariante frente la transformación de inversión temporal, su espectro sí lo es, de modo que el mapeo a dos osciladores con diferentes frecuencias es consistente. De otra manera, se habría tenido un sistema que no es invariante frente a inversión temporal que puede ser mapeado a dos sistemas

que si lo son.

El problema de Landau puede ser resuelto de forma similar en este contexto, obteniendo las mismas conclusiones que de su descripción mediante un *shift de Bopp* en las variables dinámicas. En particular, se encuentran niveles con degeneración infinita, pero el campo magnético adquiere una contribución adicional que depende de los parámetros de no conmutatividad, en acuerdo con trabajos previos sobre el tema.

Finalmente, hemos analizado el problema de un pozo de potencial en el plano no-conmutativo. El *borde* en este espacio difuso debe ser implementado mediante una restricción sobre los vectores del espacio de Hilbert en función de su *radio cuadrado medio*. El caso del pozo con $\kappa = 0$ había sido resuelto en [74], mediante la realización del espacio de Hilbert en términos de operadores de la clase de Hilbert-Schmidt, y representando a las variables dinámicas como operadores sobre ese espacio. En nuestra formulación (con $\kappa \neq 0$), el espacio de Hilbert se representa como suma directa de representaciones unitarias irreducibles de los grupos mencionados y el problema de autovalores se reduce a esos espacios de representación (de dimensión finita para $SU(2)$, correspondiente a $\kappa > \kappa_c$, y de dimensión infinita para $SL(2, \mathbb{R})$, en el caso en que $\kappa < \kappa_c$). Por esa vía hemos podido determinar las autoenergías de pozos cilíndricos infinitos (en las diferentes regiones de parámetros) en términos de los ceros de polinomios, reproduciendo en particular los resultados de [74] en el límite $\kappa \rightarrow 0$. Hasta donde sabemos, los resultados así obtenidos para $\kappa \neq 0$ son originales [70].

En resumen, hemos mostrado que es posible tratar a los sistemas de mecánica cuántica con potenciales centrales definidos sobre el espacio de fases no-conmutativo explotando de la forma antes descrita las propiedades algebraicas de las formas bilineales en coordenadas y momentos, en lugar de utilizar alguna realización particular en término de variables conmutativas usuales.

Parte III

No-conmutatividad en $(2+1)$ y el grupo de Lorentz

En esta última parte estudiaremos modelos de una partícula en $(2+1)$ dimensiones espacio-temporales con una no-conmutatividad no-standard inducida por el corrimiento de las variables canónicas de coordenadas y momento mediante la suma de generadores de una representación unitaria irreducible del grupo de Lorentz en ese espacio. Esta definición, que da al espacio de estados la estructura de un producto directo, será interpretada en el contexto de la descomposición de Levi del álgebra deformada que satisfacen las variables no-conmutativas [86].

Consideraremos el problema de Landau y del oscilador armónico tanto para partículas de Schrödinger como de Dirac, cuyos Hamiltonianos son obtenidos a través de un *shift de Bopp no abeliano* de las variables dinámicas del problema usual en el plano conmutativo. El espectro para estos modelos se estudia a través de teoría de perturbaciones, tanto para pequeños como para grandes parámetros de no-conmutatividad.

Mientras que en el espacio conmutativo usual el problema de Landau se reduce al de un oscilador armónico con un término de momento angular, en este espacio no conmutativo la extensión es no trivial ya que \hat{L}_μ tiene una estructura interna dada por los generadores de $SL(2, \mathbb{R})$.

Como las representaciones unitarias irreducibles de $SL(2, \mathbb{R})$ pueden ser realizadas en términos de funciones de una variable de cuadrado integrable, se concluye que estos modelos son equivalentes a modelos cuánticos de una partícula que vive en un espacio con una dimensión compacta adicional.

Las contribuciones originales de esta sección fueron desarrolladas en colaboración con H. A. Falomir (de la Universidad Nacional de La Plata) y J. Gamboa, F. Méndez (de la Universidad Santiago de Chile) y M. Loewe (de la Universidad Católica de Chile) y publicadas en [81, 86].

13. INTRODUCCIÓN

Como hemos señalado anteriormente, la idea de un espacio-tiempo no-conmutativo en su versión convencional adopta coordenadas que satisfacen el álgebra

$$[x^\mu, x^\nu] = i\theta^{\mu\nu}, \quad (13.1)$$

donde $\theta^{\mu\nu}$ es una matriz constante antisimétrica. Esta situación es hallada, por ejemplo, en teoría de cuerdas en presencia de un campo tensorial antisimétrico de fondo [23]. Pero, puesto que $\theta^{\mu\nu}$ define direcciones preferenciales, la ecuación (13.1) implica la violación de la invariancia de Lorentz como consecuencia indeseable [3, 4, 5, 39, 40].

Con el fin de restaurar esa simetría, diferentes tipos de no-conmutatividad han sido estudiados [41]. Por ejemplo, en el modelo de Snyder, el parámetro $\theta^{\mu\nu}$ es reemplazado por un término proporcional a los generadores del grupo de Lorentz, con un factor de proporcionalidad que establece una distancia mínima en la teoría (Ver página 24).

Estas ideas también fueron puestas en práctica en una serie de papers [42] empleando el álgebra de Doplicher, Fredenhagen y Roberts [43], en donde los operadores $\theta^{\mu\nu}$ son considerados como las coordenadas usuales de un espacio-tiempo extendido a diez dimensiones, con la hipótesis de que el triple conmutador de las coordenadas x^μ se anula. Esta álgebra fue extendida más tarde por Amorim [44] mediante la introducción de un momento canónico conjugado a esas nuevas coordenadas.

El tipo de no-conmutatividad en el espacio de fases que aquí consideraremos, donde el número de grados de libertad es extendido adicionando a variables dinámicas ordinarias un término proporcional al generador del álgebra de Lie de un grupo no-Abeliano [53, 54], ha sido empleada en la formulación de algunos modelos cuánticos de interés, encontrando aplicación en la descripción del grafeno, un nuevo material recientemente obtenido experimentalmente que se comporta como un sistema bidimensional. En [56] fue estudiado un modelo continuo bidimensional que toma algunos elementos del modelo de tight-binding para este material y reproduce el efecto Hall cuántico entero anómalo característico del grafeno.

En lo que sigue consideraremos modelos con este tipo de no-conmutatividad tanto en coordenadas como en momentos. Esta deformación del álgebra de Heisenberg es introducida mediante la traslación en un término proporcional a los generadores del grupo de Lorentz en $2+1$ dimensiones, $SO(1, 2)$, en una representación unitaria irreducible (*irrep*) de este grupo no compacto [80, 88, 89]. Como se verá a continuación, bajo estas condiciones, los generadores del grupo de Lorentz pueden ser construidos como operadores sobre el espacio de Hilbert del sistema físico de manera tal que transforman correctamente a los distintos operadores según su naturaleza, permitiendo así construir modelos covariantes.

Esta deformación del álgebra de Heisenberg puede ser efectivamente realizada en un espacio-tiempo no-conmutativo tridimensional a través de un corrimiento de variables dinámicas ordinarias (conmutativas) mediante la suma de un término proporcional a los generadores en una *irrep* del grupo de Lorentz en el espacio de Minkowski en $2+1$, isomorfo a $SL(2, \mathbb{R})/\mathbb{Z}$, aprovechando el hecho de que la dimensión de este grupo coincide con la dimensión del espacio-tiempo considerado. Una idea similar fue recientemente desarrollada para un espacio no-conmutativo tetradimensional a través de un corrimiento en las coordenadas proporcional al vector de Pauli-Lubanski [87].

En este capítulo será considerado el comportamiento de partículas de Schrödinger y de Dirac en ese espacio-tiempo no-conmutativo de $2+1$ dimensiones, para las cuales todas las variables del *espacio de fases* se obtienen mediante el corrimiento de Bopp no abeliano antes descrito. Esto otorga al espacio de Hilbert la estructura de un producto directo entre el espacio de las funciones de

cuadrado sumable en el plano usual con el espacio de representación de una representación unitaria irreducible de $SL(2, \mathbb{R})$.

En efecto, si se exige que las variables del espacio de fase no-conmutativo sean operadores Hermíticos, se estará sujeto a considerar *irreps* unitarias de este grupo las cuales no son de dimensión finita. Mas aún, puesto que el espacio de representación de las *irreps* unitarias de $SL(2, \mathbb{R})$ pueden ser realizadas en términos de funciones definidas sobre el círculo unitario o funciones analíticas sobre el disco abierto, tal como es discutido en el Apéndice B (ver referencia [80]), estos modelos considerados resultan ser equivalentes a sistemas cuánticos con una dimensión adicional (compacta).

14. ESTABLECIENDO EL PROBLEMA

De acuerdo a las ideas previamente expuestas, se considera el álgebra de Heisenberg modificada (\mathfrak{H}) para las variables dinámicas (Hermíticas) dada por:

$$\begin{aligned} [\hat{x}_\mu, \hat{x}_\nu] &= -i\theta^2 \epsilon_{\mu\nu\rho} \hat{s}^\rho, & [\hat{p}_\mu, \hat{p}_\nu] &= -i\kappa^2 \epsilon_{\mu\nu\rho} \hat{s}^\rho, \\ [\hat{x}_\mu, \hat{p}_\nu] &= i(\eta_{\mu\nu} - \kappa\theta \epsilon_{\mu\nu\rho} \hat{s}^\rho), & [\hat{x}_\mu, \hat{s}_\nu] &= -i\theta \epsilon_{\mu\nu\rho} \hat{s}^\rho, \\ [\hat{p}_\mu, \hat{s}_\nu] &= -i\kappa \epsilon_{\mu\nu\rho} \hat{s}^\rho, & [\hat{s}_\mu, \hat{s}_\nu] &= -i\epsilon_{\mu\nu\rho} \hat{s}^\rho, \end{aligned} \quad (14.1)$$

donde $\eta := \text{diag}(1, -1, -1)$ es la métrica en el espacio de Minkowski de 2+1 dimensiones y $s_\mu, \mu = 0, 1, 2$ son los generadores de una *irrep* de $SL(2, \mathbb{R})$ donde θ y κ juegan el rol de una escala ultravioleta e infraroja respectivamente.

Se pueden definir los generadores de las transformaciones de Lorentz en el espacio no-conmutativo en 2+1 independientemente de la realización del álgebra. En efecto, si establecemos $\hat{M}_\mu := \hat{L}_\mu + \hat{s}_\mu$, con $\hat{L}^\lambda := \frac{1}{2} \epsilon^{\lambda\mu\nu} [(\hat{x}_\nu - \theta \hat{s}_\nu)(\hat{p}_\mu - \kappa \hat{s}_\mu) - (\hat{x}_\mu - \theta \hat{s}_\mu)(\hat{p}_\nu - \kappa \hat{s}_\nu)]$, se puede probar que:

$$\begin{aligned} [\hat{M}_\mu, \hat{M}_\nu] &= -i\epsilon_{\mu\nu\lambda} \hat{M}^\lambda & [\hat{M}_\mu, \hat{s}_\nu] &= -i\epsilon_{\mu\nu\lambda} \hat{s}^\lambda, \\ [\hat{M}_\mu, \hat{x}_\nu] &= -i\epsilon_{\mu\nu\lambda} \hat{x}^\lambda, & [\hat{M}_\mu, \hat{p}_\nu] &= -i\epsilon_{\mu\nu\lambda} \hat{p}^\lambda. \end{aligned} \quad (14.2)$$

Este conjunto de ecuaciones muestra que es posible definir operadores sobre el espacio de Hilbert del sistema físico que satisfacen el álgebra de Lie de $SO(1, 2)$ y que transforma a los operadores de coordenadas y momentos como *trivectores*, de modo que este tipo de no-conmutatividad en este espacio permite construir modelos con simetría de Lorentz.

Con el fin de tener un mejor entendimiento acerca de todas las simetrías del espacio no-conmutativo en cuestión, estudiamos la descomposición de Levi del álgebra de Heisenberg modificada \mathfrak{H} . Este método provee una forma de definir una nueva (y más conveniente) base en la cual \mathfrak{H} se descompone en una suma semidirecta de un ideal soluble¹⁵ y una subálgebra semisimple¹⁶. Este teorema establece [90]:

¹⁵Se dice que un álgebra \mathfrak{G} es soluble si existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $\mathfrak{G}^{(k)} = 0$ y $\mathfrak{G}^{(k-1)} \neq 0$, donde $\mathfrak{G}^{(j)} = [\mathfrak{G}^{(j-1)}, \mathfrak{G}^{(j-1)}]$ y $\mathfrak{G}^{(1)} = \mathfrak{G}$, para cualquier $j \in \mathbb{N}$.

¹⁶Un álgebra \mathcal{S} es semisimple si no contiene ningún ideal soluble excepto $\mathbf{1}$.

Sea un álgebra de Lie finito-dimensional \mathfrak{H} . Si \mathfrak{H} no es soluble, existe una subálgebra \mathcal{S} de \mathfrak{H} tal que $\mathfrak{H} = \mathcal{S} \oplus SR(\mathfrak{H})$, donde $SR(\mathfrak{H})$ es el radical soluble de \mathfrak{H} ¹⁷. En esta descomposición $\mathcal{S} \sim \mathfrak{H}/SR(\mathfrak{H})$ y se tendrá las siguientes relaciones de conmutación:

$$[\mathcal{S}; \mathcal{S}] = \mathcal{S}, \quad [\mathcal{S}; SR(\mathfrak{H})] \subseteq SR(\mathfrak{H}), \quad [SR(\mathfrak{H}); SR(\mathfrak{H})] \subseteq SR(\mathfrak{H}). \quad (14.3)$$

Con el fin de calcular $SR(\mathfrak{H})$ usamos la siguiente proposición:
Si estamos tratando con un álgebra de Lie de dimensión finita, luego

$$SR(\mathfrak{H}) = \{x \in \mathfrak{H} / Tr(ad_x \circ ad_y) = 0, \forall y \in [\mathfrak{H}, \mathfrak{H}]\}, \quad (14.4)$$

donde ad_x es el mapa adjunto de x , $ad_x := [x, \cdot]$.

Algoritmo para calcular la descomposición de Levi

- Primero se debe encontrar una base de la subálgebra $[\mathfrak{H}, \mathfrak{H}]$. Para nuestro caso en particular, es fácil ver de las ecuaciones (14.1) que $[\mathfrak{H}, \mathfrak{H}] = span \{\mathbf{1}, \hat{s}_0, \hat{s}_1, \hat{s}_2\}$.
- Luego, por cada elemento de la base de $\mathfrak{H} := span \{\hat{\xi}_i\}$ se debe calcular el mapa adjunto de ese elemento con respecto al resto de los elementos de la base. Claramente ad_x es un mapa lineal, y en consecuencia tiene una representación matricial. En este caso dicha representación estará contenida en $\mathbb{R}^{9 \times 9}$, además $\hat{\xi} = (\mathbf{1}, \hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3, \hat{p}_1, \hat{p}_2, \hat{p}_3, \hat{s}_1, \hat{s}_2, \hat{s}_3)^t$ e $i = 0, \dots, 9$.
- En tercer lugar, es necesario calcular el mapa de Killing de \mathfrak{H} , $\mathcal{K}_{ij}(\mathfrak{H}) := Tr[ad_{\hat{\xi}_i} \circ ad_{\hat{\xi}_j}]$, donde $\hat{\xi}_i$ es un elemento de la base de \mathfrak{H} mientras que $\hat{\xi}_j$ es un elemento de la base de $[\mathfrak{H}, \mathfrak{H}]$. Naturalmente, la regla de composición para el mapa adjunto en la representación matricial se reduce al producto usual de matrices.
- Ahora, ya es posible calcular una base para $SR(\mathfrak{H})$. En efecto:

$$x = \sum_{i=0}^9 \alpha_i \hat{\xi}_i \in SR(\mathfrak{H}) \iff \sum_{i=0}^9 \alpha_i Tr[ad_{\hat{\xi}_i} \circ ad_{\hat{\xi}_j}] = 0, \quad \forall \hat{\xi}_j \in [\mathfrak{H}, \mathfrak{H}] \quad (14.5)$$

donde todo el problema se reduce a resolver un sistema de ecuaciones lineales para las constantes α_i .

Aplicando este método se encuentra que $SR(\mathfrak{H})$ es isomorfo al álgebra de Heisenberg \mathcal{H} , y que \mathcal{S} es isomorfo a $sl(2, \mathbb{R})$, por lo que se obtiene,

$$\mathfrak{H} := \mathcal{H} \oplus sl(2, \mathbb{R}). \quad (14.6)$$

De esta última ecuación se deduce la posibilidad de establecer como base de \mathfrak{H} los operadores del álgebra de Heisenberg usual sumados a generadores de $sl(2, \mathbb{R})$. Otra consecuencia interesante de esta última ecuación es que la realización del álgebra no es única, por el contrario, dos realizaciones

¹⁷El radical soluble de \mathfrak{H} es, por definición, el ideal soluble maximal de \mathfrak{H} , el cual viene dado por la suma de todos los ideales solubles del álgebra.

de \mathfrak{H} estarán relacionadas a través de una transformación canónica ($\Omega_{\mathfrak{H}}$) del álgebra, donde $\Omega_{\mathfrak{H}}$ puede ser escrita fácilmente en términos de las transformaciones canónicas de $\mathcal{H}(\Omega)$ y de $sl(2, \mathbb{R})$ ($\tilde{\Omega}$):

$$\Omega_{\mathfrak{H}} = \Omega \otimes \tilde{\Omega}. \quad (14.7)$$

Las condiciones que determinan a Ω y $\tilde{\Omega}$ son

$$\Omega \eta_{\mu\nu} \Omega^t = \eta_{\mu\nu}, \quad \tilde{\Omega} \mathbf{B}^\sigma \tilde{\Omega}^t = \mathbf{B}^\sigma \tilde{\Omega}, \quad \sigma = 0, 1, 2. \quad (14.8)$$

donde establecimos $(\mathbf{B}^\sigma)_{\mu\nu} := -(\mathbf{B}^\sigma)_{\nu\mu} = \epsilon_{\mu\nu\rho} \eta^{\rho\sigma}$. Es simple probar que la segunda ecuación en (14.8) resulta equivalente a $\tilde{\Omega}^t \mathbf{B}^\sigma = \mathbf{B}^\sigma \tilde{\Omega}$.

En lo sucesivo, realizaremos el álgebra \mathfrak{H} en términos de variables dinámicas $(x^\mu, p_\mu, s_\mu$ con $\mu = 0, 1, 2)$ que satisfacen el álgebra de Heisenberg usual y el álgebra de $sl(2, \mathbb{R})$,

$$\begin{aligned} [x^\mu, x^\nu] &= 0, & [p_\mu, p_\nu] &= 0, & [x^\mu, p_\nu] &= \iota \delta_\nu^\mu, \\ [x^\mu, s_\nu] &= 0, & [p_\mu, s_\nu] &= 0, & [s_\mu, s_\nu] &= -\iota \epsilon_{\mu\nu\lambda} s^\lambda, \end{aligned} \quad (14.9)$$

a través de una especie de *shift de Bopp no-Abeliano*:

$$\hat{x}_\mu \rightarrow x_\mu + \theta s_\mu, \quad \hat{p}_\mu \rightarrow p_\mu + \kappa s_\mu. \quad (14.10)$$

Para esta representación \hat{M}_μ se reduce a $M_\mu := L_\mu + s_\mu$, con $L^\lambda := \frac{1}{2} \epsilon^{\lambda\mu\nu} (x_\nu p_\mu - x_\mu p_\nu)$, el cual satisface:

$$\begin{aligned} [L_\mu, x_\nu] &= -\iota \epsilon_{\mu\nu\lambda} x^\lambda, & [L_\mu, p_\nu] &= -\iota \epsilon_{\mu\nu\lambda} p^\lambda, \\ [L_\mu, L_\nu] &= -\iota \epsilon_{\mu\nu\lambda} L^\lambda, & [L_\mu, s_\nu] &= 0. \end{aligned} \quad (14.11)$$

La estrategia para formular los modelos previamente mencionados en el espacio no-conmutativo será: dado un Hamiltoniano $H(\mathbf{p}, \mathbf{x})$ en el espacio de Minkowski (conmutativo), generalizarlo tomando $H(\hat{\mathbf{p}}, \hat{\mathbf{x}})$ y luego analizarlo realizando las variables no-conmutativas a través del *shift* establecido en la ecuación (14.10).

En particular, como fue previamente mencionado, el espacio de los vectores de estado del sistema físico es el producto directo entre el espacio de Hilbert de las funciones de cuadrado sumable en el plano conmutativo y el espacio de representación de la representación unitaria irreducible de $SL(2, \mathbb{R})$ considerada (también de dimensión infinita). Como la representación de este último espacio puede ser realizada en término de funciones de cuadrado integrable definidas sobre el círculo unitario o de funciones analíticas sobre el disco abierto unitario, según sea la *irrep* considerada [80], estos modelos también pueden ser interpretados como la descripción de una partícula que vive en un espacio con una dimensión espacial compacta adicional.

Como el conmutador entre las componentes espaciales del momento en la ecuación (14.1) se mapea en $[p_1 + \kappa s_1, p_2 + \kappa s_2] = -\iota \kappa^2 s_0$, donde s_0 es el generador de las rotaciones en el plano espacial en la *irrep* considerada de $SL(2, \mathbb{R})$, puede interpretarse esa relación como consecuencia de la presencia de un campo magnético no-abeliano uniforme. Por ello, los modelos a considerar son una especie de generalización del problema de Landau al caso no-Abeliano [55]. Este punto de vista fue empleado en [56] para construir un modelo continuo que incorpora contribuciones a orden dominante de las relaciones de dispersión del modelo de tight-binding para el grafeno. En el contexto actual, también se incorpora no-conmutatividad en la componente temporal de *tri-momento*.

Por otra parte, relaciones de conmutación como la de la ecuación (14.1) para operadores de coordenadas en un espacio euclídeo tridimensional pero con los generadores de $SU(2)$ en el miembro de la derecha, han permitido simular interacciones dipolares y han derivado en modelos con estados de vacío infinitamente degenerados y con rompimiento espontáneo de simetría [53], habiéndose encontrado aplicación, por ejemplo, en la descripción de la triple superconductividad [91]. Por el contrario, en el actual contexto hemos de considerar *irrep*'s unitarias de un grupo no compacto las que, en consecuencia, no son de dimensión finita.

En lo que sigue aplicaremos estas ideas al problema de Landau y al oscilador armónico, tanto en el caso de partículas de Schrödinger como de Dirac.

15. MODELO DE LANDAU PARA PARTÍCULAS DE SCHRÖDINGER

Caso conmutativo usual

Con el fin de establecer la notación, consideremos primero el Hamiltoniano de Schrödinger del problema de Landau. Describamos al campo electromagnético externo como $A_0 = 0$ y $A_i(\mathbf{x}) = -\frac{B}{2}\epsilon_{ij}x^j$. Para una partícula de masa M , el acoplamiento mínimo requiere que el Hamiltoniano H tenga la forma

$$2MH := (p_i - eA_i(x))^2 = \left(p_i - \frac{eB}{2}\epsilon_{ij}x_j \right)^2, \quad (15.1)$$

el cual es un operador que conmuta con el generador de las rotaciones en el plano, $L_0 = L_{12}$ (ver ecuación (14.11)).

Como es sabido, a este operador se lo puede llevar a la forma del Hamiltoniano de un oscilador armónico a través de la transformación canónica de variables

$$q := \frac{p_1}{\sqrt{eB}} + \frac{\sqrt{eB}}{2}x_2, \quad p := \frac{p_2}{\sqrt{eB}} - \frac{\sqrt{eB}}{2}x_1, \quad (15.2)$$

para las que se tiene

$$[q, p] = \left[\frac{p_1}{\sqrt{eB}} + \frac{\sqrt{eB}}{2}x_2, \frac{p_2}{\sqrt{eB}} - \frac{\sqrt{eB}}{2}x_1 \right] = \iota. \quad (15.3)$$

y así obtener

$$H = \left(\frac{eB}{M} \right) \frac{(p^2 + q^2)}{2} = \left(\frac{eB}{M} \right) \left[a^\dagger a + \frac{1}{2} \right] \quad (15.4)$$

donde

$$a = \frac{q + \iota p}{\sqrt{2}}, \quad a^\dagger = \frac{q - \iota p}{\sqrt{2}}, \quad [a, a^\dagger] = 1. \quad (15.5)$$

Además, se introduce el conjunto de variables canónicas independientes

$$Q := \frac{p_2}{\sqrt{eB}} + \frac{\sqrt{eB}}{2}x^1, \quad P := \frac{p_1}{\sqrt{eB}} - \frac{\sqrt{eB}}{2}x^2, \quad (15.6)$$

el cual satisface

$$\begin{aligned} [P, Q] &= -\iota, & [P, p] &= 0, & [P, q] &= 0, \\ [Q, p] &= 0, & [Q, q] &= 0. \end{aligned} \quad (15.7)$$

De manera similar se definen los operadores de creación y aniquilación

$$b = \frac{Q + iP}{\sqrt{2}}, \quad b^\dagger = \frac{Q - iP}{\sqrt{2}}, \quad (15.8)$$

los cuales satisfacen

$$[b, b^\dagger] = 1, \quad [b, a] = 0, \quad [b, a^\dagger] = 0. \quad (15.9)$$

Los autovectores del Hamiltoniano vienen dados en consecuencia por

$$|n, n_b\rangle = \frac{(a^\dagger)^n (b^\dagger)^{n_b}}{\sqrt{n!} \sqrt{n_b!}} |0, 0\rangle, \quad (15.10)$$

con $n, n_b = 0, 1, 2, \dots$, y los correspondientes autovalores por

$$E_n = \left(\frac{eB}{M}\right) \left[n + \frac{1}{2}\right], \quad (15.11)$$

degenerados en el índice n_b . Aquí se ha identificado, $|0, 0\rangle \leftrightarrow \psi_0(q, Q) = \pi^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{q^2 + Q^2}{2}}$, y la normalización adoptada implica que $\langle n', n'_b | n, n_b \rangle = \delta_{n', n} \delta_{n'_b, n_b}$.

Para L_0 se obtiene

$$L_0 = x_1 p_2 - x_2 p_1 = -\frac{1}{2} (p^2 + q^2) + \frac{1}{2} (P^2 + Q^2) = b^\dagger b - a^\dagger a, \quad (15.12)$$

y para sus autovalores resulta la diferencia $l = n_b - n \in \mathbb{Z}$.

Extensión al espacio no-conmutativo

La generalización del Hamiltoniano de este sistema al espacio no-conmutativo definido por la ecuación (14.1) es

$$2M\hat{H} := \left(\hat{p}_i - \frac{eB}{2}\epsilon_{ij}\hat{x}_j\right)^2 + 2M\kappa s_0 = \left[p_i + \kappa s_i - \frac{eB}{2}\epsilon_{ij}(x_j + \theta s_j)\right]^2 + 2M\kappa s_0 \quad (15.13)$$

(donde el último término en el miembro derecho viene como consecuencia del *shift* aplicado a p_0 en (14.10)), el cual conmuta con $M_0 = L_0 + s_0$ como se sigue de (14.2).

Si definimos $\hat{\pi}_i := \hat{p}_i - \frac{eB}{2}\epsilon_{ij}\hat{x}_j$, se tiene de (14.1)

$$[\hat{\pi}_1, \hat{\pi}_2] = -ieB - i \left[\kappa^2 + \left(\theta \frac{eB}{2}\right)^2 \right] s_0, \quad (15.14)$$

lo que muestra que el modelo en consideración puede ser interpretado como la introducción (además del campo magnético correspondiente al grupo $U(1)$) de un *campo magnético* constante no-Abeliano en la *dirección temporal* (rotaciones espaciales) del álgebra de Lie $sl(2, \mathbb{R})$.

En términos de a^\dagger y a , definidos en (15.5), y de los generadores Hermíticos s_μ en (14.9), este Hamiltoniano se puede escribir como

$$\hat{H} = H + \kappa s_0 + \frac{\sqrt{2eB}}{2M} \left\{ \left[\kappa + i\theta \frac{eB}{2} \right] a^\dagger s_+ + \left[\kappa - i\theta \frac{eB}{2} \right] a s_- \right\} + \left[\kappa^2 + \left(\theta \frac{eB}{2}\right)^2 \right] \frac{(s_0^2 - \mathbf{s}^2)}{2M}, \quad (15.15)$$

donde

$$s_{\pm} := s_1 \pm \iota s_2, \quad \mathbf{s}^2 := s_0^2 - s_1^2 - s_2^2. \quad (15.16)$$

El parámetro κ aparece como una escala de energía para los grados de libertad *internos* mientras que $\frac{\theta eB}{2\kappa}$ (para $\kappa \neq 0$) es una medida de la intensidad relativa de la no-conmutatividad entre coordenadas y entre momentos respecto al campo magnético externo aplicado.

En el Apéndice B se da una breve reseña de las representaciones unitarias irreducibles de $SL(2, \mathbb{R})$. Dada una *irrep* unitaria, el espacio de representación está generado por la base de autovectores simultáneos de s_0 y \mathbf{s}^2 ,

$$\mathbf{s}^2 |\lambda, m\rangle = \lambda |\lambda, m\rangle, \quad s_0 |\lambda, m\rangle = m |\lambda, m\rangle, \quad (15.17)$$

donde λ y m son números reales.

El espacio de Hilbert es entonces generado por las combinaciones lineales de vectores de la forma

$$|n, n_b; \lambda, m\rangle := |n, n_b\rangle \otimes |\lambda, m\rangle, \quad (15.18)$$

que son autovectores comunes a H , L_0 , \mathbf{s}^2 y s_0 , normalizados de forma tal de satisfacer

$$\langle n, n_b; \lambda, m | n', n'_b; \lambda, m' \rangle = \delta_{n, n'} \delta_{n_b, n'_b} \delta_{m, m'}. \quad (15.19)$$

Recordemos que

$$a^\dagger |n, n_b\rangle = \sqrt{n+1} |n+1, n_b\rangle, \quad a |n, n_b\rangle = \sqrt{n} |n-1, n_b\rangle, \quad (15.20)$$

y (ver ecuación (B.16))

$$s_{\pm} |\lambda, m\rangle = \sqrt{m(m \pm 1) - \lambda} |\lambda, m \pm 1\rangle. \quad (15.21)$$

Además se tiene $[\hat{H}, M_0] = 0$, donde $M_0 = L_0 + s_0$ tiene autovalores $j = l + m = n_b - n + m$, enteros o semi-enteros de acuerdo a la *irrep* de $SL(2, \mathbb{R})$ considerada [80]. En efecto, sea $z := \kappa + \iota \theta \frac{eB}{2}$; luego es simple obtener

$$[2M\hat{H}, L_0] = \sqrt{2eB} [za^\dagger s_+ + \bar{z}as_-, -a^\dagger a] = \sqrt{2eB} (za^\dagger s_+ - \bar{z}as_-), \quad (15.22)$$

y

$$[2M\hat{H}, s_0] = \sqrt{2eB} [za^\dagger s_+ + \bar{z}as_-, s_0] = \sqrt{2eB} (-za^\dagger s_+ + \bar{z}as_-). \quad (15.23)$$

Más aún, $[\hat{H}, b^\dagger b] = 0$. Entonces, dados los valores de λ , j y n_b , es posible dar un desarrollo de los autovectores de \hat{H} de la forma

$$|\psi_{E, j, n_b}\rangle = \sum_{n-m=n_b-j} C_{n, m} |n, n_b; \lambda, m\rangle. \quad (15.24)$$

De (15.15), se obtiene de forma inmediata una relación de recurrencia para los coeficientes

$$\begin{aligned} \langle n, n_b; \lambda, m | 2M(\hat{H} - E) |\psi_{E, j, n_b}\rangle = \\ = \{2eB(n+1/2) - 2M(E - \kappa m) + \bar{z}z(m^2 - \lambda)\} C_{n, m} + \end{aligned} \quad (15.25)$$

$$+ z\sqrt{2eB}\sqrt{n}\sqrt{m(m-1) - \lambda} C_{n-1, m-1} + \bar{z}\sqrt{2eB}\sqrt{n+1}\sqrt{(m+1)m - \lambda} C_{n+1, m+1} = 0,$$

donde $m = j - n_b + n$.

Si se toma $z = 0$, se recuperan los niveles de Landau usuales,

$$C_{n,m} [eB(n + 1/2) - ME] = 0 \quad \Rightarrow \quad E = \frac{eB}{M} \left(n + \frac{1}{2} \right). \quad (15.26)$$

Lamentablemente, no es evidente como resolver la relación de recurrencia (15.25) de forma general. Sin embargo se obtiene una simplificación para el caso de *irreps* unitarias de la serie discreta (ver Apéndice B), con $\lambda = k(k - 1)$ y $m \leq -k$, donde k es un entero o semi-entero positivo, puesto que para estas *irreps* el miembro derecho de la ecuación (15.24) se reduce a una suma finita. En efecto,

$$m = j - n_b + n \leq -k \quad \Rightarrow \quad 0 \leq n \leq n_b - j - k, \quad (15.27)$$

lo que implica que $j - n_b \leq -k$ para obtener soluciones no triviales, teniéndose así

$$|\psi_{E,j,n_b}\rangle = \sum_{n=0}^{n_b-k-j} C_{n,j-n_b+n} |n, n_b; k(k-1), j - n_b + n\rangle. \quad (15.28)$$

De esa forma, el problema de autovalores de \hat{H} se reduce a uno matricial, observándose por otra parte la degeneración infinita característica del problema de Landau, consecuencia directa de que la única dependencia de j y n_b se da a través de la diferencia $J := j - n_b$.

Por otra parte, para una *irrep* de la serie discreta con $m = j - n_b + n \geq k$, se tiene $n \geq k - j + n_b$ y se debe determinar toda la serie.

Si, por ejemplo, se toma $j - n_b = -1/2$ y $m \leq -k$ para la *irrep* con $k = 1/2$, se obtiene un única solución no trivial con $n = 0$ y $m = -\frac{1}{2}$,

$$|\psi_{E_0, n_b - \frac{1}{2}, n_b}\rangle = C_{0, -\frac{1}{2}} \left| 0, n_b; -\frac{1}{4}, -\frac{1}{2} \right\rangle, \quad \text{con} \quad E_0 = \frac{eB}{M} \left(\frac{1}{2} \right) - \frac{\kappa}{2} - \frac{\bar{z}z}{4M}, \quad (15.29)$$

con una degeneración infinita en el índice $n_b = 0, 1, 2, \dots$. En este caso, la no-conmutatividad del espacio de fases produce un corrimiento negativo en la energía del estado fundamental usual.

Para la misma *irrep* con $j - n_b = -\frac{3}{2}$, la solución pertenece al subespacio bidimensional (para cada n_b) que contiene a los autovectores independientes

$$\begin{aligned} |\psi_{E_1, n_b - \frac{3}{2}, n_b}\rangle &= \left(1 + \frac{M\kappa}{eB} + O(z^2) \right) |0, n_b; -\frac{1}{4}, -\frac{3}{2}\rangle - \left\{ \frac{z}{\sqrt{2eB}} + O(z^2) \right\} |1, n_b; -\frac{1}{4}, -\frac{1}{2}\rangle \\ |\psi_{E'_1, n_b - \frac{3}{2}, n_b}\rangle &= \left\{ \frac{\bar{z}}{\sqrt{2eB}} + O(z^2) \right\} |0, n_b; -\frac{1}{4}, -\frac{3}{2}\rangle + \left(1 + O(z^2) \right) |1, n_b; -\frac{1}{4}, -\frac{1}{2}\rangle \end{aligned} \quad (15.30)$$

que corresponden a autovalores dados por una función más compleja de los parámetros de no-conmutatividad y que a orden cuadrático en $|z|$ se reducen a

$$\begin{aligned} E_1 &= \frac{Be}{M} \left(\frac{1}{2} \right) - \frac{3\kappa}{2} + \frac{3\bar{z}z}{4M} + O(z^3), \\ E'_1 &= \frac{Be}{M} \left(1 + \frac{1}{2} \right) - \frac{\kappa}{2} + \frac{3\bar{z}z}{4M} + O(z^3), \end{aligned} \quad (15.31)$$

nuevamente degenerados en el índice n_b . Al igual que para el anterior caso, aquí encontramos un corrimiento de $O(z^2)$ en los niveles de Landau respecto de los del plano conmutativo usual.

Similarmente, para $j - n_b = -\frac{5}{2}$ los autovalores (degenerados en n_b) hasta orden cuadrático en $|z|$ son

$$\begin{aligned} E_2 &= \frac{Be}{M} \left(\frac{1}{2} \right) - \frac{5\kappa}{2} + \frac{5\bar{z}z}{4M} + O(z^3) , \\ E'_2 &= \frac{Be}{M} \left(1 + \frac{1}{2} \right) - \frac{3\kappa}{2} + \frac{9\bar{z}z}{4M} + O(z^3) , \\ E''_2 &= \frac{Be}{M} \left(2 + \frac{1}{2} \right) - \frac{\kappa}{2} + \frac{5\bar{z}z}{4M} + O(z^3) . \end{aligned} \tag{15.32}$$

Espectro obtenido por teoría de perturbaciones

Para pequeños $|z|$

Con el fin de explicar la estructura del espectro es posible utilizar teoría de perturbaciones para pequeños valores de los parámetros de no-conmutatividad. Por conveniencia, se tomará como Hamiltoniano sin perturbar a H_0 y como perturbación a V , operadores que vienen dados por

$$\begin{aligned} 2MH_0 &= 2eB \left[a^\dagger a + \frac{1}{2} \right] + 2M\kappa s_0 + \bar{z}z (s_0^2 - \mathbf{s}^2) , \\ 2MV &= \sqrt{2eB} \left\{ za^\dagger s_+ + \bar{z}as_- \right\} . \end{aligned} \tag{15.33}$$

Como H_0 conmuta con L_0 , s_0 y $b^\dagger b$, los autovectores y autovalores sin perturbar vienen dados por

$$\begin{aligned} \Psi_{n,n_b,m} &= |n, n_b\rangle \otimes |\lambda, m\rangle , \quad H_0 \Psi_{n,n_b,m} = E_{n,m}^{(0)} \Psi_{n,n_b,m} , \\ E_{n,m}^{(0)} &= \frac{1}{2M} \left\{ 2eB \left(n + \frac{1}{2} \right) + 2M\kappa m + \bar{z}z (m^2 - \lambda) \right\} , \end{aligned} \tag{15.34}$$

que son degenerados en el índice n_b .

Puesto que V conmuta con $b^\dagger b$, la corrección a primer orden para los autovalores en teoría de perturbaciones viene dada por

$$E_{n,m}^{(1)} = (\Psi_{n,n_b,m}, V \Psi_{n,n_b,m}) = 0 , \tag{15.35}$$

y son todos nulos.

La corrección a segundo orden viene dada por

$$E_{n,m}^{(2)} = \sum'_{n',m'} \frac{|\langle \Psi_{n',m',n_b}, V \Psi_{n,m,n_b} \rangle|^2}{E_{n,m}^{(0)} - E_{n',m'}^{(0)}} , \tag{15.36}$$

donde los términos $n' = n$ y $m' = m$ son excluidos de la serie. De (15.33) se obtiene

$$\begin{aligned} & (\Psi_{n',n_b,m'}, 2MV\Psi_{n,n_b,m}) = \\ & = \sqrt{2eBz}\sqrt{n+1}\sqrt{m(m+1)-\lambda}\delta_{n',n+1}\delta_{m',m+1} + \\ & + \sqrt{2eB\bar{z}}\sqrt{n}\sqrt{m(m-1)-\lambda}\delta_{n',n-1}\delta_{m',m-1}, \end{aligned} \quad (15.37)$$

de donde se sigue que

$$\begin{aligned} E_{n,m}^{(2)} &= \frac{-1}{2M} \frac{|z|^2(n+1)[m(m+1)-\lambda]}{1 + \frac{M\kappa}{eB} + \frac{|z|^2}{2eB}(2m+1)} + \frac{1}{2M} \frac{|z|^2n[m(m-1)-\lambda]}{1 + \frac{M\kappa}{eB} + \frac{|z|^2}{2eB}(2m-1)} = \\ &= -\frac{|z|^2}{2M} \{2nm + [m(m+1)-\lambda]\} + O(|z|^3). \end{aligned} \quad (15.38)$$

Por lo tanto, a segundo orden en $|z|$, se obtiene para los autovalores

$$\begin{aligned} E_{n,m} &= \frac{eB}{M} \left(n + \frac{1}{2}\right) + \kappa m + \frac{|z|^2}{2M} (m^2 - \lambda) - \frac{|z|^2}{2M} \{2nm + [m(m+1)-\lambda]\} + O(|z|^3) = \\ &= \frac{eB - |z|^2 m}{M} \left(n + \frac{1}{2}\right) + \kappa m + O(|z|^3), \end{aligned} \quad (15.39)$$

para toda *irrep* unitaria de $SL(2, \mathbb{R})$. Advertir que, a este orden y para cada m , éstos son los niveles de Landau correspondientes a un *campo magnético efectivo* con dependencia lineal en m , corrido rígidamente por el término κm . Además el término dominante en el parámetro θ es cuadrático.

De considerar nuevamente la *irrep* unitaria de la serie discreta con $k = \frac{1}{2}$ y $m \leq -k$ se obtiene (a menos de términos de orden $O(|z|^3)$),

$$\begin{aligned} E_{0,-\frac{1}{2}} &= \frac{eB + \frac{|z|^2}{2}}{M} \left(\frac{1}{2}\right) - \frac{\kappa}{2}, & E_{0,-\frac{3}{2}} &= \frac{eB + \frac{3|z|^2}{2}}{M} \left(\frac{1}{2}\right) - \frac{3\kappa}{2}, & E_{0,-\frac{5}{2}} &= \frac{eB + \frac{5|z|^2}{2}}{M} \left(\frac{1}{2}\right) - \frac{5\kappa}{2}, \dots \\ E_{1,-\frac{1}{2}} &= \frac{eB + \frac{|z|^2}{2}}{M} \left(1 + \frac{1}{2}\right) - \frac{\kappa}{2}, & E_{1,-\frac{3}{2}} &= \frac{eB + \frac{3|z|^2}{2}}{M} \left(1 + \frac{1}{2}\right) - \frac{3\kappa}{2}, & E_{1,-\frac{5}{2}} &= \frac{eB + \frac{5|z|^2}{2}}{M} \left(1 + \frac{1}{2}\right) - \frac{5\kappa}{2}, \dots \\ E_{2,-\frac{1}{2}} &= \frac{eB + \frac{|z|^2}{2}}{M} \left(2 + \frac{1}{2}\right) - \frac{\kappa}{2}, & E_{2,-\frac{3}{2}} &= \frac{eB + \frac{3|z|^2}{2}}{M} \left(2 + \frac{1}{2}\right) - \frac{3\kappa}{2}, & E_{2,-\frac{5}{2}} &= \frac{eB + \frac{5|z|^2}{2}}{M} \left(2 + \frac{1}{2}\right) - \frac{5\kappa}{2}, \dots \end{aligned} \quad (15.40)$$

lo cual está en completo acuerdo con las ecuaciones (15.31)-(15.32).

Para grandes $|z|$

Aquí se considerarán las correcciones a las autoenergías en el límite de grandes valores de los parámetros de no-conmutatividad, obtenidas mediante la teoría de perturbaciones. En este caso, se puede tomar como Hamiltoniano sin perturbar al operador

$$\mathcal{H}_0 := \frac{\bar{z}z}{2M} (s_0^2 - \mathbf{s}^2) \quad (15.41)$$

y como perturbación

$$\mathcal{V} := \kappa s_0 + \frac{\sqrt{2eB}}{2M} \left(z a^\dagger s_+ + \bar{z} a s_- \right) + \frac{eB}{M} \left(a^\dagger a + \frac{1}{2} \right). \quad (15.42)$$

De tal forma, los autovectores y autovalores de \mathcal{H}_0 son

$$\begin{aligned} \chi_{n,n_b,m} &:= |n, n_b\rangle \otimes |\lambda, m\rangle, \\ \mathcal{E}_{n,m}^{(0)} &= \frac{\bar{z}z}{2M} (m^2 - \lambda), \end{aligned} \quad (15.43)$$

los cuales dependen solamente de m y son degenerados en n y n_b .

Tanto \mathcal{H}_0 como \mathcal{V} conmutan con $b^\dagger b$, por lo que es posible referirse a los subespacios con n_b definido y considerar solamente la degeneración en n . La corrección a primer orden para los autovalores en teoría de perturbaciones vienen dados por los elementos de matriz

$$(\chi_{n',n_b,m}, \mathcal{V} \chi_{n,n_b,m}) = \delta_{n',n} \left\{ \kappa m + \frac{eB}{M} \left(n + \frac{1}{2} \right) \right\}, \quad (15.44)$$

los cuales ya son diagonales en n .

El segundo término ($O(|z|)$) en el miembro de la derecha de la ecuación (15.42) contribuye a segundo orden en teoría de perturbaciones con una corrección $O\left(\frac{eB}{M}\right)$. Luego,

$$\mathcal{E}_{n,m} = \frac{\bar{z}z}{2M} (m^2 - \lambda) + \kappa m + O\left(\frac{eB}{M}\right). \quad (15.45)$$

En consecuencia, se ve que los parámetros de no-conmutatividad aparecen como una escala de energía típica para la separación de las series sucesivas de niveles de Landau. Para $|z|/M \gg 1$, sólo los estados con el mínimo valor de m^2 se manifestarán a bajas energías.

16. MODELO DE LANDAU PARA PARTÍCULAS DE DIRAC

Caso conmutativo usual

La ecuación de Dirac en 2+1 viene dada por

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - M) \Psi = 0, \quad (16.1)$$

donde se ha tomado

$$\gamma^0 = \sigma_3, \quad \gamma^1 = -i\sigma_2, \quad \gamma^2 = i\sigma_1, \quad (16.2)$$

y se satisface $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\eta^{\mu\nu}$ con $(g^{\mu\nu}) = \text{diag}(1, -1, -1)$. De (16.1) se obtiene el Hamiltoniano $H = \alpha_i \mathbf{p}_i + M\beta$, donde $\alpha_1 = -\sigma_1$, $\alpha_2 = -\sigma_2$ and $\beta = \sigma_3$.

En presencia de un campo electromagnético, el acoplamiento mínimo induce el cambio $p_\mu \rightarrow p_\mu - eA_\mu$. Por tanto, el Hamiltoniano se escribe como

$$H = \alpha_i (p_i - eA_i) - eA_0 + M\beta. \quad (16.3)$$

Nuevamente consideramos un campo magnético constante perpendicular al plano del sistema, y al igual que en el caso de partículas de Schrödinger, tomamos $A_0 = 0$ y $A_i(\mathbf{x}) = -\frac{B}{2}\epsilon_{ij}x^j$, obteniendo así

$$\begin{aligned} H &= \alpha_1\sqrt{eB}q + \alpha_2\sqrt{eB}p + M\beta = \\ &= \begin{pmatrix} M & -\sqrt{2eB}a^\dagger \\ -\sqrt{2eB}a & -M \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (16.4)$$

en términos de los operadores definidos en (15.2) y (15.5).

Teniendo en cuenta que

$$[H, L_0] = [H, b^\dagger b - a^\dagger a] = \sqrt{2eB} \begin{pmatrix} 0 & -a^\dagger \\ a & 0 \end{pmatrix} \quad (16.5)$$

y

$$[H, \sigma_3] = -\sqrt{2eB} [a^\dagger \sigma_+ + a \sigma_-, \sigma_3] = 2\sqrt{2eB} \begin{pmatrix} 0 & a^\dagger \\ -a & 0 \end{pmatrix}, \quad (16.6)$$

se concluye que H conmuta con $J_0 := L_0 + \frac{\sigma_3}{2}$. En consecuencia, resulta conveniente escribir los autovectores de H y J_0 como

$$\psi_{n,n_b} = \begin{pmatrix} C_1 |n, n_b\rangle \\ C_2 |n-1, n_b\rangle \end{pmatrix}, \quad (16.7)$$

con $n \geq 1$. En efecto, tenemos

$$J_0 \psi_{n,n_b} = \begin{pmatrix} C_1 (L_0 + \frac{1}{2}) |n, n_b\rangle \\ C_2 (L_0 - \frac{1}{2}) |n-1, n_b\rangle \end{pmatrix} = j_0 \psi_{n,n_b}, \quad (16.8)$$

con autovalor $j_0 = n_b - n + \frac{1}{2}$.

Por otra parte, $(H - E)\psi_{n,n_b} = 0$ implica que

$$\begin{pmatrix} M - E & -\sqrt{2eBn} \\ -\sqrt{2eBn} & -(M + E) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (16.9)$$

Soluciones no triviales exigen

$$E^2 - M^2 - 2eBn = 0 \quad \Rightarrow \quad E_{\pm,n} = \pm\sqrt{M^2 + 2eBn}, \quad (16.10)$$

y

$$C_2 = \frac{E_{\pm,n} - M}{\sqrt{2eBn}} C_1, \quad (16.11)$$

ambos independientes de n_b . Luego, los autovectores vienen dados por

$$\psi_{\pm,n,n_b} = \begin{pmatrix} \sqrt{2eBn} |n, n_b\rangle \\ [-M \pm \sqrt{M^2 + 2eBn}] |n-1, n_b\rangle \end{pmatrix}, \quad (16.12)$$

con $n \geq 1$, degenerados en el índice n_b .

Existe otra solución para $n = 0$, dada por

$$\psi_{0,n_b} = \begin{pmatrix} |0, n_b\rangle \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (16.13)$$

con $j_0 = n_b + 1/2$ y $E_0 = M$, también degenerada en n_b .

Extensión al espacio no-conmutativo

Se adopta como Hamiltoniano del sistema al operador Hermítico

$$\begin{aligned}\hat{H} &= \alpha_i (\hat{p}_i - eA_i(\hat{\mathbf{x}})) + \kappa s_0 + M\beta = \\ &= H \otimes \mathbf{1} + \kappa (\alpha_i \otimes s_i + \mathbf{1}_2 \otimes s_0) - \theta \frac{eB}{2} \epsilon_{ij} \alpha_i \otimes s_j,\end{aligned}\tag{16.14}$$

en donde el término $(\kappa \mathbf{1}_2 \otimes s_0)$ proviene del shift de p_0 en la ecuación (14.10). A este operador se lo puede reescribir como

$$\hat{H} = H \otimes \mathbf{1} + \kappa \mathbf{1} \otimes s_0 - z\sigma_- \otimes s_+ - \bar{z}\sigma_+ \otimes s_-, \tag{16.15}$$

donde $\sigma_{\pm} = \frac{\sigma_1 \pm i\sigma_2}{2}$, $s_{\pm} := s_1 \pm is_2$ (ver (B.12)).

Además, \hat{H} tiene una simetría generada por

$$J := \left(L_0 + \frac{1}{2} \sigma_3 \right) \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1}_2 \otimes s_0. \tag{16.16}$$

En efecto, (ver (B.13)),

$$\begin{aligned}[J, \hat{H}] &= -\frac{z}{2} [\sigma_3, \sigma_-] \otimes s_+ - \frac{\bar{z}}{2} [\sigma_3, \sigma_+] \otimes s_- - \\ &\quad - z\sigma_- \otimes [s_0, s_+] - \bar{z}\sigma_+ \otimes [s_0, s_-] = 0.\end{aligned}\tag{16.17}$$

Más aún, puesto que $[b^\dagger b, \hat{H}] = 0$, los autovalores serán degenerados en el índice n_b .

Dada una *irrep* unitaria de $SL(2, \mathbb{R})$, podemos escoger un sistema completo de autovectores ortonormales en el subespacio de Hilbert caracterizado por los autovalores de n_b y j (autovalores de J) como

$$\begin{cases} \psi_{n,\uparrow} = \begin{pmatrix} |n, n_b\rangle \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \left| \lambda, j - n_b - \frac{1}{2} + n \right\rangle, \\ \psi_{n,\downarrow} = \begin{pmatrix} 0 \\ |n, n_b\rangle \end{pmatrix} \otimes \left| \lambda, j - n_b + \frac{1}{2} + n \right\rangle.\end{cases}\tag{16.18}$$

En ambos casos el autovalor de J es $(n_b - n \pm \frac{1}{2}) + (j - n_b \mp \frac{1}{2} + n) = j$.

Señalemos que

$$[(H - E) \otimes \mathbf{1} + \kappa \mathbf{1}_2 \otimes s_0] \psi_{n,\uparrow} = \left[M - E + \kappa \left(j - n_b - \frac{1}{2} + n \right) \right] \psi_{n,\uparrow} - \sqrt{2eBn} \psi_{n-1,\downarrow}, \tag{16.19}$$

y

$$[(H - E) \otimes \mathbf{1} + \kappa \mathbf{1}_2 \otimes s_0] \psi_{n,\downarrow} = \left[-M - E + \kappa \left(j - n_b + \frac{1}{2} + n \right) \right] \psi_{n,\downarrow} - \sqrt{2eB(n+1)} \psi_{n+1,\uparrow}. \tag{16.20}$$

Además,

$$\sigma_- \otimes s_+ \psi_{n,\uparrow} = \sqrt{(j - n_b + n)^2 - \left(\lambda + \frac{1}{4} \right)} \psi_{n,\downarrow}, \tag{16.21}$$

y

$$\sigma_+ \otimes s_- \psi_{n,\downarrow} = \sqrt{(j - n_b + n)^2 - \left(\lambda + \frac{1}{4}\right)} \psi_{n,\uparrow}, \quad (16.22)$$

mientras que

$$\sigma_+ \otimes s_- \psi_{n,\uparrow} = 0 = \sigma_- \otimes s_+ \psi_{n,\downarrow}. \quad (16.23)$$

Si se propone el siguiente desarrollo para los autovectores del Hamiltoniano,

$$\begin{aligned} \Psi &= \sum_{n=0}^{\infty} (C_n \psi_{n,\uparrow} + D_n \psi_{n,\downarrow}) = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \begin{pmatrix} C_n |n, n_b\rangle \otimes |\lambda, j - n_b - \frac{1}{2} + n\rangle \\ D_n |n, n_b\rangle \otimes |\lambda, j - n_b + \frac{1}{2} + n\rangle \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (16.24)$$

la condición $(\hat{H} - E) \Psi = 0$ conduce de forma directa a la relación de recurrencia

$$\begin{cases} C_n \left[M - E + \kappa \left(j - n_b - \frac{1}{2} + n \right) \right] - D_{n-1} \sqrt{2eBn} - D_n \bar{z} \sqrt{(j - n_b + n)^2 - \left(\lambda + \frac{1}{4} \right)} = 0, \\ D_n \left[-M - E + \kappa \left(j - n_b + \frac{1}{2} + n \right) \right] - C_{n+1} \sqrt{2eB(n+1)} - C_n z \sqrt{(j - n_b + n)^2 - \left(\lambda + \frac{1}{4} \right)} = 0, \end{cases} \quad (16.25)$$

para $n \geq 0$, donde $D_{-1} := 0$. Notar que las soluciones dependen de j y n_b sólo a través de la diferencia $j - n_b$.

Es simple ver que el límite $\kappa, \theta \rightarrow 0$ reproduce los resultados de las ecuaciones (16.10), (16.12) y (16.13).

El problema de obtener los autovectores del Hamiltoniano parece ser mas complejo que en el caso de las partículas de Schrödinger. Pero como antes, ciertas *irreps* unitarias de $SL(2, \mathbb{R})$ reducen el problema de autovalores a uno matricial.

En efecto, de considerar nuevamente la serie discreta caracterizada por $\lambda = k(k-1)$ y $m \leq -k$, se obtiene $m = j - n_b + n - \frac{1}{2} \leq -k \Rightarrow 0 \leq n \leq n_b - j - k + \frac{1}{2}$.

Por ejemplo, tomando $k = \frac{1}{2}$ con $j - n_b = 0$ se obtiene de manera simple

$$C_0 \left(-E - \frac{\kappa}{2} + M \right) = 0. \quad (16.26)$$

Luego, $E = M - \frac{\kappa}{2}$ y $\Psi \sim \psi_{0,\uparrow}$.

Para $j - n_b = -1$, los autovalores son los ceros del determinante

$$\begin{vmatrix} -\frac{3\kappa}{2} + M - E & 0 & -\bar{z} \\ 0 & -\frac{\kappa}{2} + M - E & -\sqrt{2Be} \\ -z & -\sqrt{2Be} & -\frac{\kappa}{2} - M - E \end{vmatrix} = 0. \quad (16.27)$$

Se trata de los ceros de un polinomio de grado tres en E , cuyas raíces están dadas por las expresiones estándar que no serán reproducidas aquí.

Espectro en teoría de perturbaciones

Para pequeños $|z|$

Con el fin de explicar la estructura del espectro para pequeños valores del parámetro de no-conmutatividad se utiliza nuevamente teoría de perturbaciones tomando a $H_0 := H \otimes \mathbf{1} + \kappa \mathbf{1} \otimes s_0$ como el Hamiltoniano sin perturbar y a $V := -z\sigma_- \otimes s_+ - \bar{z}\sigma_+ \otimes s_-$ como perturbación.

Como H_0 conmuta con $(L_0 + \frac{1}{2}\sigma_3)$ y con s_0 , es factible tomar como autovectores normalizados y autovalores no perturbados a

$$\Psi_{0,n_b,m} = \begin{pmatrix} |0, n_b\rangle \\ 0 \end{pmatrix} \otimes |\lambda, m\rangle, \quad E_{0,m}^{(0)} = M + \kappa m, \quad (16.28)$$

$$\Psi_{\pm,n,n_b,m} = C_{\pm,n} \begin{pmatrix} \sqrt{2eBn} |n, n_b\rangle \\ [M \mp \sqrt{M^2 + 2eBn}] |n-1, n_b\rangle \end{pmatrix} \otimes |\lambda, m\rangle, \quad E_{\pm,n,m}^{(0)} = \pm \sqrt{M^2 + 2eBn} + \kappa m,$$

degenerados en $n_b \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, con

$$C_{\pm,n} = \left\{ 2(M^2 + 2eBn) \mp 2M\sqrt{M^2 + 2eBn} \right\}^{-\frac{1}{2}}. \quad (16.29)$$

Puesto que $[b^\dagger b, V] = 0$, es posible referirnos al subespacio con n_b dado. Luego, todas las correcciones a primer orden en la energía en teoría de perturbaciones se cancelan automáticamente. En efecto, vienen dadas por

$$(\Psi_{0,n_b,m}, V\Psi_{0,n_b,m}) = 0 = (\Psi_{\pm,n,n_b,m}, V\Psi_{\pm,n,n_b,m}). \quad (16.30)$$

Por otro lado,

$$(\Psi_{s',n',n_b,m'}, V\Psi_{0,n_b,m}) = -\delta_{n',1}\delta_{m',m+1}zC_{s',n'} \left[M - s'\sqrt{M^2 + 2eB} \right] \sqrt{m(m+1) - \lambda}, \quad (16.31)$$

$$E_{0,m}^{(0)} - E_{s',n',m'}^{(0)} = M - s'\sqrt{M^2 + 2eBn'} + \kappa(m - m'),$$

y

$$\begin{aligned} & (\Psi_{s',n',n_b,m'}, V\Psi_{s,n,n_b,m}) = \\ & = -C_{s',n'}C_{s,n} \left\{ \delta_{n',n+1}\delta_{m',m+1}z \left[M - s'\sqrt{M^2 + 2eB(n+1)} \right] \sqrt{2eBn}\sqrt{m(m+1) - \lambda} + \right. \\ & \quad \left. + \delta_{n',n-1}\delta_{m',m-1}\bar{z}\sqrt{2eB(n-1)} \left[M - s\sqrt{M^2 + 2eBn} \right] \sqrt{m(m-1) - \lambda} \right\}, \quad (16.32) \end{aligned}$$

$$E_{s,n,m}^{(0)} - E_{s',n',m'}^{(0)} = s\sqrt{M^2 + 2eBn} - s'\sqrt{M^2 + 2eBn'} + \kappa(m - m'),$$

A través de (16.31) y (16.32) resulta sencillo calcular las correcciones a la energía a segundo orden ($O(|z|^2)$) en teoría de perturbaciones.

Por tanto, para toda *irrep* unitaria de $SL(2, \mathbb{R})$ y a primer orden en $|z|$, los autovalores vienen dados por la ecuación (16.28). Al igual que en el caso de partículas de Schrödinger, los autovalores muestran un corrimiento lineal en m y no dependen de θ a primer orden. Esto está en acuerdo también con las ecuaciones (16.26) y (16.27), a menos de términos de $O(|z|^2)$.

Para grandes $|z|$

En el límite para grandes $|z|$, se define como Hamiltoniano no perturbado al operador

$$\mathcal{H}_0 := \kappa \mathbf{1} \otimes s_0 - z \sigma_- \otimes s_+ - \bar{z} \sigma_+ \otimes s_- \quad (16.33)$$

y como perturbación

$$\mathcal{V} := H \otimes \mathbf{1} = M \sigma_3 \otimes \mathbf{1} - \sqrt{2eB} \left[a^\dagger \sigma_+ + a \sigma_- \right] \otimes \mathbf{1}, \quad (16.34)$$

Como $[\mathcal{H}_0, \frac{1}{2} \sigma_3 + s_0] = 0$, es posible ver que los autovectores normalizados de \mathcal{H}_0 están dados por

$$\Phi_{n,n_b,j,\pm} = |n, n_b\rangle \otimes \begin{pmatrix} c_1(j, \pm) |\lambda, j - \frac{1}{2}\rangle \\ c_2(j, \pm) |\lambda, j + \frac{1}{2}\rangle \end{pmatrix}, \quad (16.35)$$

siendo j el autovalor de $(\frac{1}{2} \sigma_3 + s_0)$ y

$$c_1(j, \pm) = -\frac{\sqrt{2} \bar{z}}{\kappa} \frac{\sqrt{[j^2 - (\lambda + \frac{1}{4})]}}{\sqrt{1 + 4\gamma [j^2 - (\lambda + \frac{1}{4})] \pm \sqrt{1 + 4\gamma [j^2 - (\lambda + \frac{1}{4})]}}}, \quad (16.36)$$

$$c_2(j, \pm) = \frac{2\mathcal{E}_{j,\pm}^{(0)} + \kappa(1 - 2j)}{\sqrt{2}\kappa \sqrt{1 + 4\gamma [j^2 - (\lambda + \frac{1}{4})] \pm \sqrt{1 + 4\gamma [j^2 - (\lambda + \frac{1}{4})]}}},$$

con $\gamma := \bar{z}z/\kappa^2$ y $\mathcal{E}_{j,\pm}^{(0)}$ los correspondientes autovalores,

$$\mathcal{E}_{j,\pm}^{(0)} := \kappa \left(j \pm \frac{1}{2} \sqrt{1 + 4\gamma \left[j^2 - \left(\lambda + \frac{1}{4} \right) \right]} \right), \quad (16.37)$$

degenerados en los índices n y n_b .

Las correcciones a las autoenergías a primer orden en teoría de perturbaciones, $\mathcal{E}_{j,\pm}^{(1)}$, establecen contribuciones no nulas solamente del primer término del miembro derecho en la ecuación (16.34), determinadas por los elementos de matriz

$$\begin{aligned} \left(\Phi_{n',n'_b,j,\pm}, \mathcal{V} \Phi_{n,n_b,j,\pm} \right) &= M \delta_{n',n} \delta_{n'_b,n_b} \left\{ |c_1(j, \pm)|^2 - |c_2(j, \pm)|^2 \right\} = \\ &= \frac{\mp M}{\sqrt{1 + 4\gamma [j^2 - (\lambda + \frac{1}{4})]}} \delta_{n',n} \delta_{n'_b,n_b}, \end{aligned} \quad (16.38)$$

que son diagonales.

Resulta simple ver que las correcciones a segundo orden en teoría de perturbaciones contienen una contribución $O(M^2/|z|)$ del primer término del miembro derecho de la ecuación (16.34) y contribuciones $O(eB/|z|)$ del segundo término en el miembro derecho de la misma ecuación.

En consecuencia, en estos modelos los parámetros de no-conmutatividad aparecen como una escala de energía típica para la separación entre las sucesivas series de niveles de Landau, y a bajas energías sólo los estados con el mínimo valor de j se manifestarán efectivamente.

17. OSCILADOR ARMÓNICO PARA PARTÍCULAS DE SCHRÖDINGER

Caso conmutativo usual

Sea el Hamiltoniano de Schrödinger de un oscilador armónico isótropo:

$$2MH := p_i^2 + M^2\omega^2 x_i^2, \quad (17.1)$$

que evidentemente conmuta con L_0 .

En términos de los operadores definidos en (15.5) y (15.8), H y L_0 son diagonales y toman la forma:

$$H := \omega(a^\dagger a + b^\dagger b + 1), \quad L_0 := b^\dagger b - a^\dagger a. \quad (17.2)$$

Sus autovectores son de la forma

$$|n_a, n_b\rangle := \frac{(a^\dagger)^{n_a}}{\sqrt{n_a!}} \frac{(b^\dagger)^{n_b}}{\sqrt{n_b!}} |0, 0\rangle, \quad n, N = 0, 1, 2, \dots$$

donde $a|0, 0\rangle = 0 = b|0, 0\rangle$, y los correspondientes autovalores están dados por

$$H|n_a, n_b\rangle = \omega(n_a + n_b + 1)|n_a, n_b\rangle, \quad L_0|n_a, n_b\rangle = (n_b - n_a)|n_a, n_b\rangle. \quad (17.3)$$

Extensión al espacio no-conmutativo

Nuevamente utilizamos el *shift no abeliano* de la ecuación 14.10 para obtener la generalización del Hamiltoniano al caso no-conmutativo,

$$2M\hat{H} := \hat{p}_i^2 + M^2\omega^2 \hat{x}_i^2 = (p_i + \kappa s_i)^2 + M^2\omega^2 (x_i + \theta s_i)^2, \quad (17.4)$$

operador que conmuta con $M_0 = L_0 + s_0$ como puede verificarse fácilmente.

En término de los operadores de creación y aniquilación y de los generadores s_μ , este Hamiltoniano se escribe como

$$2M\hat{H} = 2MH + \sqrt{M\omega} \left(z a^\dagger s_+ + \bar{z} a s_- + z b^\dagger s_- + \bar{z} b s_+ \right) + z\bar{z} (s_0^2 - \mathbf{s}^2), \quad (17.5)$$

donde $z := \theta M\omega + \iota\kappa$, $\bar{z} := \theta M\omega - \iota\kappa$. Luego, dados los valores de λ y j , se desarrollan los autovectores de \hat{H} como

$$|\psi_{E,j}\rangle = \sum_{n_b - n_a + m = j} C_{n_a, n_b, m} |n_a, n_b; \lambda, m\rangle. \quad (17.6)$$

De la ecuación (17.5) se obtiene nuevamente una relación de recurrencia para los coeficientes,

$$\begin{aligned} & \langle n_a, n_b; \lambda, m | 2M(\hat{H} - E) | \psi_{E,j, n_b} \rangle = \\ & = \{ 2M\omega(n_a + n_b + 1) - 2M(E - \kappa m) + \bar{z}z(m^2 - \lambda) \} C_{n_a, n_b, m} + \\ & + z\sqrt{M\omega}\sqrt{n_a + 1}\sqrt{m(m+1) - \lambda} C_{n_a+1, n_b, m+1} + \bar{z}\sqrt{M\omega}\sqrt{n_a}\sqrt{(m-1)m - \lambda} C_{n_a-1, n_b, m-1} + \\ & + z\sqrt{M\omega}\sqrt{n_b + 1}\sqrt{m(m-1) - \lambda} C_{n_a, n_b+1, m+1} + \bar{z}\sqrt{M\omega}\sqrt{n_b}\sqrt{(m+1)m - \lambda} C_{n_a, n_b-1, m-1} = 0, \end{aligned} \quad (17.7)$$

donde $m = j + n_a - n_b$.

Como era esperable, para $z = 0$ esta recurrencia se reduce a los niveles del oscilador armónico usuales,

$$C_{n,m} [\omega(n_a + n_b + 1) - E] = 0 \quad \Rightarrow \quad E = \omega(n_a + n_b + 1) . \quad (17.8)$$

No obstante, no es evidente cómo obtener soluciones exactas para esta recurrencia en el caso $z \neq 0$. Una diferencia relevante con respecto al modelo de Landau es que $[\hat{H}, b^\dagger b] \neq 0$ y, a consecuencia de ello, el problema de la determinación de autovalores no se reduce a uno matricial para las *irreps* unitarias de la clase discreta.

Espectro obtenido por teoría de perturbaciones

Para pequeños $|z|$

Nuevamente se aplica la teoría de perturbaciones para pequeños valores de los parámetros de no-conmutatividad, tomando en este caso como Hamiltoniano sin perturbar a H_0 y a V como perturbación, ambos operadores definidos de la siguiente manera,

$$\begin{aligned} 2MH_0 &= 2M\omega [a^\dagger a + b^\dagger b + 1] + 2M\kappa s_0 + \bar{z}z (s_0^2 - \mathbf{s}^2) , \\ 2MV &= \sqrt{M\omega} \left(za^\dagger s_+ + \bar{z}as_- + zb^\dagger s_- + \bar{z}bs_+ \right) . \end{aligned} \quad (17.9)$$

Como H_0 conmuta con L_0 y s_0 , los autovectores y autovalores sin perturbar vienen dados por

$$\begin{aligned} \Psi_{n_a, n_b, m} &= |n_a, n_b\rangle \otimes |\lambda, m\rangle , \quad H_0 \Psi_{n_a, n_b, m} = E_{n_a, n_b, m}^{(0)} \Psi_{n_a, n_b, m} , \\ E_{n_a, n_b, m}^{(0)} &= \omega(n_a + n_b + 1) + \kappa m + \frac{\bar{z}z}{2M} (m^2 - \lambda) . \end{aligned} \quad (17.10)$$

Las correcciones de primer orden a los autovalores son nulas, al igual que en el caso de Landau,

$$E_{n_a, n_b, m}^{(1)} = (\Psi_{n_a, n_b, m}, V \Psi_{n_a, n_b, m}) = 0 , \quad (17.11)$$

Para las correcciones de segundo orden se deben calcular los elementos de matriz

$$\begin{aligned} & \left(\Psi_{n'_a, n'_b, m'}, 2MV \Psi_{n_a, n_b, m} \right) = \\ &= \sqrt{M\omega z} \sqrt{n_a + 1} \sqrt{m(m+1) - \lambda} \delta_{n'_a, n_a + 1} \delta_{n'_b, n_b} \delta_{m', m+1} + \\ & \quad \sqrt{M\omega \bar{z}} \sqrt{n_a} \sqrt{m(m-1) - \lambda} \delta_{n'_a, n_a - 1} \delta_{n'_b, n_b} \delta_{m', m-1} + \\ &+ \sqrt{M\omega z} \sqrt{n_b + 1} \sqrt{m(m-1) - \lambda} \delta_{n'_a, n_a} \delta_{n'_b, n_b + 1} \delta_{m', m-1} + \\ & \quad \sqrt{M\omega \bar{z}} \sqrt{n_b} \sqrt{m(m+1) - \lambda} \delta_{n'_a, n_a} \delta_{n'_b, n_b - 1} \delta_{m', m+1} , \end{aligned} \quad (17.12)$$

de donde se obtiene que

$$E_{n_a, l, m}^{(2)} = -\frac{|z|^2}{2M} (m^2 - \lambda) - \frac{|z|^2}{2M} ml + O(|z|^3) . \quad (17.13)$$

Entonces, a segundo orden en $|z|$,

$$E_{n_a, n_b, m} = \omega (n_a + n_b + 1) + \kappa m - \frac{|z|^2}{2M} m l + O(|z|^3), \quad (17.14)$$

para toda *irrep* unitaria de $SL(2, \mathbb{R})$. La corrección lineal en κ produce, para cada m , un corrimiento rígido de los niveles del oscilador armónico. Más aún, el término cuadrático $|z|^2$ muestra un acoplamiento con el momento angular, rompiendo así la degeneración usual en l del espectro del oscilador armónico isótropo. Esta es una diferencia con el caso anterior del problema de Landau donde las correcciones a segundo orden no rompen la degeneración usual en el momento angular de las partículas. Además advertir que, al igual que en el anterior caso, el término dominante en el parámetro θ es cuadrático.

Para grandes $|z|$

Aplicando la teoría de perturbaciones en el límite de grandes parámetros de no-conmutatividad, se toma

$$\mathcal{H}_0 := \frac{\bar{z}z}{2M} (s_0^2 - \mathbf{s}^2) + \kappa s_0 + \omega [a^\dagger a + b^\dagger b + 1], \quad (17.15)$$

como Hamiltoniano sin perturbar y

$$\mathcal{V} := \sqrt{\frac{\omega}{M}} \left(z a^\dagger s_+ + \bar{z} a s_- + z b^\dagger s_- + \bar{z} b s_+ \right). \quad (17.16)$$

como perturbación. Los autovalores y autovectores de \mathcal{H}_0 vienen dados por

$$\begin{aligned} \chi_{n_a, n_b, m} &:= |n_a, n_b\rangle \otimes |\lambda, m\rangle, \\ \mathcal{E}_{n_a, n_b, m}^{(0)} &= \frac{\bar{z}z}{2M} (m^2 - \lambda) + \kappa m + \omega(n_a + n_b + 1). \end{aligned} \quad (17.17)$$

La corrección de primer orden en teoría de perturbaciones a las autoenergías se cancela,

$$(\chi_{n_a, n_b, m}, \mathcal{V} \chi_{n_a, n_b, m}) = 0, \quad (17.18)$$

mientras que a segundo orden \mathcal{V} contribuye con una corrección $O\left(\frac{\omega}{M}\right)$, por lo que podemos escribir

$$\mathcal{E}_{n_a, n_b, m} = \left\{ \frac{\bar{z}z}{2M} (m^2 - \lambda) + \kappa m + \omega(n_a + n_b + 1) \right\} \left(1 + O\left(\frac{\omega}{M}\right) \right). \quad (17.19)$$

De donde se concluye que, en el límite de masa grande, el parámetro de no-conmutatividad aparece como una escala de energía típica para la separación entre sucesivas series de niveles del oscilador armónico isótropo. Para $|z|/M \gg 1$, sólo los estados con el mínimo valor de m^2 se manifestarán a bajas energías. Dicha conclusión, está en completo acuerdo con las obtenidas anteriormente para el problema de Landau.

18. OSCILADOR ARMÓNICO DE DIRAC

La ecuación de una partícula libre de Dirac en 2+1-dimensiones es

$$(\imath\gamma^\mu\partial_\mu - M)\Psi = 0, \quad (18.1)$$

donde tomamos

$$\gamma^0 = \sigma_3, \quad \gamma^1 = -\imath\sigma_2, \quad \gamma^2 = \imath\sigma_1, \quad (18.2)$$

las cuales satisfacen $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\eta^{\mu\nu}$ con $(\eta^{\mu\nu}) = \text{diag}(1, -1, -1)$. De (16.1) obtenemos el Hamiltoniano $H = \alpha_i \mathbf{p}_i + M\beta$, donde $\alpha_1 = -\sigma_1$, $\alpha_2 = -\sigma_2$, $\beta = \sigma_3$ y $M > 0$ la masa de la partícula.

En [92] Moshinsky y Szczepaniak propusieron añadir un término lineal en las coordenadas, interpretando el sistema como un *Oscilador de Dirac* ya que, en el límite no-relativista, se reduce a un oscilador armónico con una interacción spin-órbita. En ese sentido, el operador Hamiltoniano de interés se escribe como

$$H = \alpha_i (p_i - \omega\beta x_i) + M\beta, \quad (18.3)$$

para alguna constante $\omega > 0$. Usando que $\alpha_i\beta = \imath\epsilon_{ij}\alpha_j$ es fácil ver que la última ecuación resulta equivalente a la del problema de Landau si identificamos $\omega \leftrightarrow eB/2$. En consecuencia, los resultados obtenidos para el modelo de Landau para partículas de Dirac en este espacio no-conmutativo se aplican directamente a esta extensión del oscilador de Dirac, por lo que no será necesario reproducir los resultados previamente expuestos y se refiere al lector a la sección correspondiente.

19. CONCLUSIONES

En este capítulo se han considerado modelos de partícula de Schrödinger y Dirac que viven en un espacio-tiempo con una no-conmutatividad *no-standard*, tanto en coordenadas como en impulsos. Esta no-conmutatividad fue inducida deformando los conmutadores canónicos por términos proporcionales a los generadores de una representación unitaria irreducible del grupo de Lorentz en el espacio de Minkowski de 2+1 dimensiones, el cual es isomorfo a $SL(2, \mathbb{R})/\mathbb{Z}_2$. Puesto que éste es un grupo de Lie no-compacto, sus *irreps* unitarias no son de dimensión finita.

Con el fin de lograr un mayor entendimiento acerca de la realización del álgebra se analizó la descomposición de Levi de la misma, obteniéndose que puede ser representada como una suma directa del operador conmutativo usual con elementos del álgebra de Lie de $SL(2, \mathbb{R})$. Esta realización no es única, sino que dos realizaciones del álgebra pueden diferir en una transformación canónica de las variables dinámicas.

Se ha realizado esta deformación a través de un corrimiento de las coordenadas y momentos canónicos con términos proporcionales a los generadores de la *irrep* unitaria considerada. En particular, este *shift* en el momento puede ser interpretado como la introducción de un *campo magnético no-Abeliano constante*.

Consecuentemente, el número de variables dinámicas aumenta y el espacio de Hilbert toma la estructura de un producto directo, donde un factor proviene de los vectores de estado del sistema usual, el espacio de las funciones de cuadrado sumable sobre el plano conmutativo, y el otro corresponde al espacio de representación de la *irrep* unitaria de $SL(2, \mathbb{R})$ considerada.

Hemos visto que pueden construirse generadores completos de las transformaciones de Lorentz, los que transforman correctamente a todos los operadores realizando de esa manera el álgebra de Lie de $sl(2, \mathbb{R})$ sobre el espacio de Hilbert del sistema cuántico. Esto permite formular modelos covariantes en este espacio de fases no conmutativo.

En este contexto, hemos considerado Hamiltonianos modificados, obtenidos a partir de ese *shift de Boop no-Abeliano* de las variables dinámicas, para el modelo de Landau y para el oscilador armónico isótropo, tanto para partículas de Schrödinger como de Dirac. Hemos analizado éstos modelos para *irreps* unitarias de $sl(2, \mathbb{R})$ tanto en las clases discretas como en las continuas. En general, el problema de autovalores deriva a una relación de recursión infinita para los coeficientes del desarrollo de los autovectores en una base convenientemente escogida del espacio de Hilbert las que, para ciertas *irreps*, se reducen a problemas matriciales. Los espectros de éstos modelos han sido estudiados además mediante la teoría de perturbaciones, tanto para pequeños como para grandes valores de los parámetros de no-conmutatividad.

En el caso del modelo de Landau para partículas de Schrödinger, la ecuación (15.39) muestra que para pequeños valores de $|z|$ y para toda *irrep* unitaria de $SL(2, \mathbb{R})$ hay una serie de niveles, uno por cada autovalor m de s_0 , rígidamente corrido por un término proporcional a m y con una corrección a segundo orden en el campo magnético efectivo. Por otro lado, en el límite de grandes valores de $|z|$, (15.45) y (15.44) muestran que los parámetros de no-conmutatividad aparecen como una escala de energía típica para la separación entre series sucesivas de niveles de Landau y que, a bajas energías, solo los niveles con el mínimo valor de m^2 se manifiestan. Conclusiones similares fueron obtenidas para modelos de partículas de Dirac.

Por otra parte, el espectro para el caso del oscilador armónico isótropo extendido a este espacio no-conmutativo, para pequeños valores de $|z|$, es el del oscilador bidimensional usual rígidamente corrido por el término κm para cada autovalor m de s_0 . Las correcciones a segundo orden, rompen la degeneración usual en el momento angular. En particular, la corrección dominante en θ es cuadrática. En el límite de grandes $|z|$, los parámetros de no-conmutatividad en los parámetros aparecen como

una escala de energía típica para la separación entre series sucesivas de niveles del oscilador armónico isótropo.

Señalemos que, contrariamente al caso convencional no-conmutativo (basado en el producto Moyal), no se ha encontrado relación entre los parámetros de no-conmutatividad entre coordenadas y entre impulsos. Más bien, con un campo magnético no nulo B , κ y θ aparecen jugando un rol similar (a pesar de que no hay contribuciones lineales en θ a los autovalores).

Notar que la estructura del espacio de Hilbert como producto directo conduce, en el límite $|z| \rightarrow 0$, a una degeneración infinita adicional a la usual del problema de Landau. En este sentido, los modelos no-conmutativos aquí mencionados no se reducen al caso conmutativo usual en ese límite, sino que el Hamiltoniano modificado \hat{H} toma la forma $H \otimes \mathbf{1}_{irrep}$, diagonal en el espacio de la representación del grupo. Por lo tanto, éstos modelos no constituyen una deformación suave de los modelos en el espacio conmutativo. Por otra parte, como fue previamente mencionado, en el límite $|z| \rightarrow \infty$ sólo las excitaciones de energía más baja, con componente en el subespacio con el menor valor de m^2 de ese factor adicional del espacio de Hilbert, podrían ser detectadas a baja energía, sin evidencia de la existencia de las series correspondientes a niveles superiores.

Vale la pena señalar que las representaciones unitarias irreducibles de $SL(2, \mathbb{R})$ pueden ser explícitamente realizadas en términos de las funciones de cuadrado integrable, funciones definidas sobre el círculo unitario para las clases continuas de *irreps* y funciones analíticas definidas sobre el disco unitario para clases discretas, tal como se reseña en el apéndice B. Por tanto, los ejemplos estudiados en este capítulo pueden ser considerados como equivalentes a modelos de partículas cuánticas viviendo en un espacio con una dimensión compacta adicional, con el parámetro κ jugando el rol de la inversa de una escala típica de longitud. De hecho, el *shift de Bopp no-Abeliano* de la ecuación (14.10) conduce a una descripción de estos sistemas en términos de las variables del espacio de fases conmutativo usual, correspondientes a un espacio de Minkowski de $(2+1)$ dimensiones, más los generadores de una *irrep* unitaria de $SL(2, \mathbb{R})$, variables dinámicas adecuadas para describir el comportamiento del sistema en esta dimensión adicional.

Parte IV
Apéndices

A. GEOMETRÍA SIMPLÉCTICA

En éste apéndice se darán de forma abreviada alguna de las definiciones básicas de la geometría diferencial y simpléctica. Este análisis se sigue de [93, 94] de donde se puede encontrar la definición de variedad diferencial que utilizaremos recurrentemente a continuación.

Notación: denotaremos como $T_z\mathcal{M}$ al tangente a una variedad diferenciable \mathcal{M} en el punto z y $T\mathcal{M} := \bigcup_{z \in \mathcal{M}} T_z\mathcal{M}$ a su fibrado tangente. De igual forma denotaremos como $T_z^*\mathcal{M}$ al cotangente en el punto z y $T^*\mathcal{M} := \bigcup_{z \in \mathcal{M}} T_z^*\mathcal{M}$ a su fibrado cotangente.

Definición. Un *campo vectorial* X sobre una variedad diferenciable \mathcal{M} es una aplicación

$$X : \mathcal{M} \rightarrow T\mathcal{M} \quad X(z) = X_z \quad (\text{A.1})$$

siendo $X_z \in T_z\mathcal{M}$, $\forall z \in \mathcal{M}$.

Dicho campo se dice que es diferenciable si $\forall f \in C^\infty(\mathcal{M})$, $X_z[f] \in \mathbb{R}$ donde

$$X_z[f] := \left. \frac{d}{dt} f \circ \gamma(t) \right|_{t=0} \quad (\text{A.2})$$

para cualquier curva $\gamma(t)$ en \mathcal{M} , tal que $\gamma(0) = z$. Dicho campo, puede escribirse en término de un conjunto de coordenadas z_1, \dots, z_n definidas sobre \mathcal{M} como

$$X_z = X^i(z) \frac{\partial}{\partial z^i}. \quad (\text{A.3})$$

Notación: el conjunto de los campos diferenciales sobre \mathcal{M} se los denotará como $\mathfrak{X}(\mathcal{M})$.

Definición. Una *k-forma diferencial* ω en \mathcal{M} es una aplicación suave *k-lineal*, antisimétrica definida sobre $T\mathcal{M}$,

$$\begin{aligned} \omega : T\mathcal{M} \times \dots \times T\mathcal{M} &\rightarrow \mathbb{R} \\ \omega(X_1, \dots, X_k) &:= (-1)^{|\sigma|} \omega(X_{\sigma(1)}, \dots, X_{\sigma(k)}) \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

donde $|\sigma|$ representa el signo de una permutación σ del conjunto $1, \dots, k$.

Notación: el conjunto de las *k-formas diferenciales* sobre \mathcal{M} se las denotará como $\Lambda^k(\mathcal{M})$.

Una 1-forma es una aplicación del espacio vectorial tangente en los reales,

$$\alpha \in \Lambda^1(\mathcal{M}), \quad \alpha(X) \in \mathbb{R}. \quad (\text{A.5})$$

Para una 2-forma,

$$\omega \in \Lambda^2(\mathcal{M}), \quad \omega(X_1, X_2) \in \mathbb{R}. \quad (\text{A.6})$$

Respecto de un sistema local de coordenadas de la base dual $\{dz^1, \dots, dz^n\}$

$$\alpha = \alpha_i(z) dz^i, \quad dz^i(\partial_j) = \delta^i_j. \quad (\text{A.7})$$

Similarmente,

$$\begin{aligned} \omega(X_1, X_2) &= \omega_{ij} X_1^k X_2^l dz^i \wedge dz^j(\partial_k, \partial_l) = \\ &= \omega_{ij} X_1^k X_2^l dz^i(\partial_k) \wedge dz^j(\partial_l) = \omega_{ij} X_1^i X_2^j. \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

Definición. Sea ω una k -forma diferencial definida sobre \mathcal{M} y sea $X \in T\mathcal{M}$, se define la **contracción de ω con X** , $i_X\omega$, como la $(k-1)$ -forma dada por

$$i_X\omega(X_1, \dots, X_{k-1}) := \omega(X, X_1, \dots, X_{k-1}). \quad (\text{A.9})$$

Definición. Sea α una p -forma y β una q -forma, se define el **producto de wedge** de α con β a la $(p+q)$ -forma

$$\alpha \wedge \beta(X_1, \dots, X_p, Y_1, \dots, Y_q) := \frac{1}{p!q!} \sum_{\sigma \in P\{1, \dots, p+q\}} (-1)^{|\sigma|} \alpha(X_{\sigma(1)}, \dots, X_{\sigma(p)}) \beta(Y_{\sigma(1)}, \dots, Y_{\sigma(q)}). \quad (\text{A.10})$$

Por ejemplo, sean las 1-formas α, β sobre \mathcal{M} definimos la 2-forma $\alpha \wedge \beta$, de forma que $\forall u, v \in T_z\mathcal{M}, \forall z \in \mathcal{M}$

$$\alpha \wedge \beta(u, v) = \alpha(u)\beta(v) - \alpha(v)\beta(u). \quad (\text{A.11})$$

Definición. El **diferencial exterior** $d: \Lambda^p(\mathcal{M}) \rightarrow \Lambda^{p+1}(\mathcal{M})$ es la única aplicación lineal tal que,

- si $f \in \Lambda^0(\mathcal{M})$, entonces df es el diferencial usual de las funciones $f \in C^\infty$
- $d^2 = 0$
- si $\alpha \in \Lambda^p(\mathcal{M})$ y $\beta \in \Lambda^q(\mathcal{M})$, entonces

$$d(\alpha \wedge \beta) := d\alpha \wedge \beta + (-1)^p \alpha \wedge d\beta. \quad (\text{A.12})$$

Por ejemplo si consideramos una 1-forma cuya expresión en coordenadas con respecto a la base dual $\{dz^1, \dots, dz^n\}$ viene dada $\alpha = \alpha_i dz^i$, se tiene:

$$d\alpha = \frac{\partial \alpha_i}{\partial z^j} dz^i \wedge dz^j. \quad (\text{A.13})$$

Definición. Se dice que una k -forma ω es **cerrada** si $d\omega = 0$

Para la descripción de los sistemas mecánicos referidos en esta tesis se utilizamos en exclusividad, 1 y 2 formas, por ello a continuación solo analizaremos estos casos.

Definición. Decimos que una 2-forma ω es **no-degenerada** si

$$\omega(X, Y) = 0, \quad \forall Y \in T\mathcal{M} \Rightarrow X = 0. \quad (\text{A.14})$$

Dada una 2-forma, es posible definir un mapa lineal $\omega^\sharp: T\mathcal{M} \rightarrow T^*\mathcal{M}$ como $X \rightarrow \omega(X, \cdot)$. Puesto que ω es bilineal, es claro que ω^\sharp es lineal, de forma que está bien definida.

Es fácil demostrar que ω es no-degenerada si y sólo si ω^\sharp es isomórfica.

Definición. Una **forma simpléctica** ω sobre \mathcal{M} es una 2-forma sobre \mathcal{M} cerrada y no-degenerada.

Las variedades simplécticas de dimensión finita aparecen ligadas al espacio de fases de sistemas mecánicos clásicos con un número finito de grados de libertad, donde la forma simpléctica es la estructura geométrica que permite definir los campos vectoriales Hamiltonianos y el corchete de Poisson.

Definición. Llamamos **variedad simpléctica** al par (\mathcal{M}, ω) , donde \mathcal{M} es una variedad diferenciable y ω es una forma simpléctica sobre \mathcal{M} .

Sea (\mathcal{M}, ω) una variedad simpléctica. Luego, por cada punto $z \in \mathcal{M}$, $\omega_z^\sharp : T_z\mathcal{M} \rightarrow T_z^*\mathcal{M}$ es un isomorfismo por lo que hay una correspondencia entre 1-formas y campos vectoriales. En particular, dada una función $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{M})$, el diferencial de f es una 1-forma $df_z = \partial_i f(z) dz^i$. A esta 1-forma le corresponde el campo $X_z[f] = (\omega_z^\sharp)^{-1} df_z$. Equivalentemente, existe una identificación entre los campos diferenciables y las 1-formas sobre \mathcal{M} , dada por

$$i : \mathfrak{X}(\mathcal{M}) \rightarrow \Lambda^1(\mathcal{M}), \quad i(X) = i_X \omega \quad (\text{A.15})$$

Definición. Dadas (\mathcal{M}, ω) una variedad simpléctica y $H : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ una función \mathcal{C}^∞ , definimos el campo vectorial $X_H \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$ como el campo identificado con la 1-forma dH . Es decir,

$$i_{X_H} \omega = -dH \quad (\text{A.16})$$

X_H es el **campo vectorial Hamiltoniano** de H .

De este modo, asociado a cualquier función H sobre \mathcal{M} tenemos las llamadas ecuaciones de Hamilton: una curva $\gamma(t) \in \mathcal{M}$ satisface estas ecuaciones (de primer orden sobre \mathcal{M}) si es una curva integral del campo Hamiltoniano X_H asociado a H , es decir, si

$$\dot{\gamma}(t) = X_H \circ \gamma(t) \in T_{\gamma(t)}\mathcal{M} \quad (\text{A.17})$$

Definición. Un **corchete de Poisson** sobre una variedad \mathcal{M} es una aplicación

$$\{\cdot, \cdot\} : \mathcal{C}^\infty(\mathcal{M}) \times \mathcal{C}^\infty(\mathcal{M}) \rightarrow \mathcal{C}^\infty(\mathcal{M}) \quad (\text{A.18})$$

tal que se satisface:

- $\{\cdot, \cdot\}$ es bilineal (con respecto a la suma de funciones y al producto por constantes).
- $\{\cdot, \cdot\}$ es antisimétrico.
- Satisface la identidad de Jacobi.

$$\{f, \{g, h\}\} + \{g, \{h, f\}\} + \{h, \{f, g\}\} = 0 \quad (\text{A.19})$$

- $\forall f, g, h \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{M})$ vale la regla de Leibnitz

$$\{fg, h\} = f\{g, h\} + g\{f, h\} \quad (\text{A.20})$$

Definición. Dada (\mathcal{M}, ω) variedad simpléctica, el corchete de Poisson asociado a ω , de f y g para $f, g \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{M})$ es la función $f, g_\omega \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{M})$ dada por

$$\{f, g\}_\omega := \omega(X_f, X_g) = i_{X_f} \omega(X_g). \quad (\text{A.21})$$

Ejemplo: Dada la variedad simpléctica $(\mathbb{R}^2, \omega = dx \wedge dy)$ y una función $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ suave, cuyo diferencial puede escribirse como $df = \partial_x f dx + \partial_y f dy$. Es simple de ver que $\omega^\sharp(\partial_x) = dy$ y $\omega^\sharp(\partial_y) = -dx$. Por lo tanto, el campo Hamiltoniano viene dado por:

$$X_f := (\omega^\sharp)^{-1}(df) = \partial_x f (\omega^\sharp)^{-1}(dx) + \partial_y f (\omega^\sharp)^{-1}(dy) = \partial_x f \partial_y - \partial_y f \partial_x \quad (\text{A.22})$$

B. EL GRUPO DE LORENTZ EN 1+2-DIMENSIONES ($SL(2, \mathbb{R})$)

El grupo de Lorentz sobre el espacio de Minkowski en 1+2-dimensiones [80, 88, 89], \mathbb{M}_3 , es definido como el conjunto de las transformaciones lineales reales de $\mathbf{x} = (x^0, x^1, x^2)$, $\mathbf{x}' = L\mathbf{x}$, que dejan invariante el intervalo

$$s^2 = \mathbf{x}'^t \eta \mathbf{x}' = \mathbf{x}^t L^t \eta L \mathbf{x} \quad (\text{B.1})$$

para todo \mathbf{x} , donde $(\eta_{\mu\nu}) = \text{diag}(+1, -1, -1)$. Esto significa que

$$L^t \eta L = \eta \quad \Rightarrow \quad (\det L)^2 = 1 \quad \text{y} \quad \eta_{\alpha\beta} L^\alpha_\mu L^\beta_\nu = \eta_{\mu\nu}. \quad (\text{B.2})$$

Luego,

$$\det L = \pm 1 \quad \text{y} \quad L^0_0 \geq 1 \quad \text{o} \quad L^0_0 \leq -1. \quad (\text{B.3})$$

La parte conexa del grupo de Lorentz (que contiene la identidad $\mathbf{1}_3$), \mathcal{L}_+^\uparrow , corresponde al subgrupo de las transformaciones con $\det L = 1$ y $L^0_0 \geq 1$. Los otros cosets del grupo son obtenidos a partir de \mathcal{L}_+^\uparrow a través de la multiplicación con el operador de paridad ($P := \text{diag}(+1, -1, +1)$) y/o inversión temporal ($T := \text{diag}(-1, +1, +1)$).

Es fácil ver que $\mathcal{L}_+^\uparrow \approx SL(2, \mathbb{R})/\mathbb{Z}_2$. De hecho, uno puede establecer una correspondencia uno a uno entre \mathbb{M}_3 y el espacio de las matrices reales simétricas de 2×2 a través de la relación

$$\sigma(\mathbf{x}) := x^0 \mathbf{1}_2 + x^1 \sigma_3 + x^2 \sigma_1 = \begin{pmatrix} x^0 + x^1 & x^2 \\ x^2 & x^0 - x^1 \end{pmatrix} = \sigma(\mathbf{x})^t, \quad (\text{B.4})$$

donde σ_1 y σ_3 son las dos matrices de Pauli reales.

En esta representación del espacio de Minkowski, el intervalo queda expresado como $\det \sigma(\mathbf{x}) = (x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 = s^2$. Luego, las transformaciones de Lorentz quedan realizadas como $\sigma(\mathbf{x}) \rightarrow \Lambda \sigma(\mathbf{x}) \Lambda^t$ con matrices reales Λ tal que $\det \Lambda = \pm 1$. Estas condiciones definen un grupo de Lie cuya parte conexa que contiene la identidad $\mathbf{1}_2$ es $SL(2, \mathbb{R})$ (isomorfo a $SU(1, 1)$).

Más aún, ya que los elementos del centro del grupo, $\{\mathbf{1}_2, -\mathbf{1}_2\} \approx \mathbb{Z}_2$, corresponden a la misma transformación de Lorentz, se concluye que existe un homomorfismo $\phi : SL(2, \mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{L}_+^\uparrow$ que aplica $\{+U, -U\} \rightarrow L$.

Los elementos en $SL(2, \mathbb{R})$ pueden escribirse como

$$\Lambda = \begin{pmatrix} a + c & b + d \\ -b + d & a - c \end{pmatrix}, \quad \text{con} \quad a^2 + b^2 = 1 + c^2 + d^2 \geq 1, \quad (\text{B.5})$$

y pueden ser parametrizados como

$$\begin{aligned} c &= \sinh \alpha \cos \beta, & d &= \sinh \alpha \sin \beta, \\ a &= \cosh \alpha \cos \gamma, & b &= \cosh \alpha \sin \gamma, \end{aligned} \quad (\text{B.6})$$

con $\alpha \in \mathbb{R}$ y $\beta, \gamma \in [0, 2\pi)$. Por tanto, $SL(2, \mathbb{R})$ es un grupo de Lie tridimensional no-compacto múltiplemente conexo. En consecuencia, las representaciones unitarias irreducibles de $SL(2, \mathbb{R})$ no son de dimensión finita.

Escribiendo los elementos de $SL(2, \mathbb{R})$ como $\Lambda = e^{2A}$, se puede ver que los elementos de la base del álgebra de Lie $sl(2, \mathbb{R})$ pueden escogerse como un conjunto de matrices

$$\left\{ X_0 := -\frac{1}{2} \sigma_2, X_1 := \frac{i}{2} \sigma_1, X_2 := \frac{i}{2} \sigma_3 \right\}, \quad (\text{B.7})$$

que satisfacen las relaciones de conmutación

$$[X_\mu, X_\nu] = -\imath \epsilon_{\mu\nu\lambda} X^\lambda, \quad (\text{B.8})$$

donde $X^\mu = \eta^{\mu\nu} X_\nu$ y $\epsilon_{\mu\nu\lambda}$ son totalmente antisimétricos con $\epsilon_{012} = 1$. X_0 genera las rotaciones en el plano, mientras $X_{1,2}$ corresponde a los boosts sobre el correspondiente eje espacial. El invariante de Casimir cuadrático, viene dado por

$$\mathbf{X}^2 := \eta^{\mu\nu} X_\mu X_\nu = X_0^2 - X_1^2 - X_2^2, \quad (\text{B.9})$$

el cual conmuta con los X_μ .

***irreps* de dimensión finita de $sl(2, \mathbb{R})$**

Como $SL(2, \mathbb{R})$ es no-compacto, sus *irreps* de dimensión finita no son unitarias. Estas pueden ser contruídas a partir de las *irreps* unitarias de $SU(2)$ de la siguiente manera. El generador de las rotaciones, X_0 , es Hermítico para toda *irrep* y puede ser escogido como $X_0 \rightarrow J_3$. Los otros dos generadores son anti-Hermiticos y pueden escogerse como $X_1 \rightarrow -\imath J_2$ y $X_2 \rightarrow \imath J_1$, donde $J_i, i = 1, 2, 3$ son los generadores de la *irrep* unitaria j -ésima de $su(2)$.

El espacio de representación de dimensión $(2j + 1)$ es generado por la base de vectores

$$\{|j, m\rangle, m = -j, -j + 1, \dots, j - 1, j\}, \quad (\text{B.10})$$

y el Casimir se reduce a $\mathbf{X}^2 = J_3^2 - (-\imath J_2)^2 - (\imath J_1)^2 = \mathbf{J}^2 = j(j + 1)\mathbf{1}$, donde $j(j + 1) \geq 0$.

Pero, como fue previamente discutido, se necesita estudiar las representaciones unitarias de $SL(2, \mathbb{R})$, las cuales serán consideradas en la siguiente sección.

***irreps* unitarias de $sl(2, \mathbb{R})$**

Las *irreps* unitarias de $sl(2, \mathbb{R})$ son de dimensión infinita [80] y son generadas por operadores Hermíticos $X_\mu = X_\mu^\dagger$ que satisfacen las relaciones de conmutación de la ecuación (B.8). En este caso, el invariante de Casimir puede tomar valores negativos.

Puesto que $[X_\mu, \mathbf{X}^2] = 0$, consideremos autovectores normalizados comunes a \mathbf{X}^2 y X_0 ,

$$\mathbf{X}^2 |\lambda, m\rangle = \lambda |\lambda, m\rangle, \quad X_0 |\lambda, m\rangle = m |\lambda, m\rangle, \quad (\text{B.11})$$

donde $\lambda \in \mathbb{R}$ y m toma valores enteros o semi-enteros.

Si se define

$$X_\pm := X_1 \pm \imath X_2, \quad \text{con} \quad X_\pm^\dagger = X_\mp, \quad (\text{B.12})$$

se tiene

$$[X_0, X_\pm] = \pm X_\pm, \quad [X_+, X_-] = -2X_0. \quad (\text{B.13})$$

Luego,

$$X_0 (X_\pm |\lambda, m\rangle) = X_\pm (X_0 \pm 1) |\lambda, m\rangle = (m \pm 1) (X_\pm |\lambda, m\rangle), \quad (\text{B.14})$$

$$\mathbf{X}^2 (X_\pm |\lambda, m\rangle) = \lambda (X_\pm |\lambda, m\rangle).$$

Tomando en cuenta que

$$X_\pm X_\mp = X_0 (X_0 \mp 1) - \mathbf{X}^2, \quad (\text{B.15})$$

se concluye que

$$\|X_\mp |\lambda, m\rangle\|^2 = \langle \lambda, m | X_\pm X_\mp |\lambda, m\rangle = m(m \mp 1) - \lambda \geq 0. \quad (\text{B.16})$$

Por tanto, $(m \mp \frac{1}{2})^2 \geq \lambda + \frac{1}{4}$. Dos casos deben ser considerados [80]: $\lambda + \frac{1}{4} \geq 0$ y $\lambda + \frac{1}{4} < 0$, los cuales dan origen a las llamadas clases *discretas* y *continuas* de *irreps* unitarias respectivamente.

Clases discretas: $\lambda + \frac{1}{4} \geq 0$

Escribamos $\lambda = k(k-1)$ con¹⁸ $k \geq \frac{1}{2}$. Luego, $\lambda + \frac{1}{4} = (k - \frac{1}{2})^2 \geq 0$, de modo que $m \geq k$ o bien $m \leq -k$. Entonces, de la ecuación (B.16) se deduce la existencia de un vector correspondiente a un autovalor m_0 mínimo o máximo respectivamente, lo que requiere que

$$m_0(m_0 \mp 1) - k(k-1) = (m_0 \mp k)(m_0 \pm (k-1)) = 0 \quad \Rightarrow \quad m_0 = \pm k \text{ respectivamente.} \quad (\text{B.17})$$

Por tanto, en estas *irreps* k toma valores enteros o semi-enteros, $k = \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \dots$ (lo cual justifica el nombre de *clases discretas*).

La aplicación sucesiva sobre esos vectores de X_+ o X_- respectivamente genera una secuencia infinita de autovectores de X_0 correspondientes a autovalores $m = k+n$ o $m = -k-n$ respectivamente, con $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Estas *irreps* pueden ser realizadas explícitamente sobre el espacio de funciones analíticas de variable compleja que son regulares sobre el disco abierto unitario [80, 89]. En efecto, consideremos el espacio de Hilbert definido por el conjunto de funciones $f(\mathfrak{z})$ analíticas sobre el disco abierto $\mathcal{M} := \{\mathfrak{z} \in \mathbb{C} : |\mathfrak{z}| < 1\}$ con el producto escalar

$$\begin{aligned} (f(\mathfrak{z}), g(\mathfrak{z}))_k &:= \frac{2k-1}{\pi} \int_{\mathcal{M}} \frac{d\mathfrak{z} d\bar{\mathfrak{z}}}{2i} [1 - \bar{\mathfrak{z}}\mathfrak{z}]^{2(k-1)} f(\mathfrak{z})^* g(\mathfrak{z}) \\ &= \frac{2k-1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^1 dr^2 [1 - r^2]^{2(k-1)} f(re^{i\phi})^* g(re^{i\phi}), \end{aligned} \quad (\text{B.18})$$

con $k > \frac{1}{2}$. Esta definición puede ser extendida a $k = \frac{1}{2}$ como en [80]

$$(f(\mathfrak{z}), g(\mathfrak{z}))_{1/2} := \lim_{k \rightarrow \frac{1}{2}^+} \frac{2k-1}{\pi} \int_{\mathcal{M}} \frac{d\mathfrak{z} d\bar{\mathfrak{z}}}{2i} [1 - \bar{\mathfrak{z}}\mathfrak{z}]^{2(k-1)} f(\mathfrak{z})^* g(\mathfrak{z}). \quad (\text{B.19})$$

Una base ortonormal y completa sobre éste espacio puede ser construida como

$$\left\{ h_l(\mathfrak{z}) := \left(\frac{\Gamma(2k+l)}{\Gamma(2k)\Gamma(l+1)} \right)^{\frac{1}{2}} \mathfrak{z}^l, l = 0, 1, 2, \dots \right\} \quad (\text{B.20})$$

y puede demostrarse que, para cualquier función de cuadrado integrable en este espacio que la serie $f(\mathfrak{z}) = \sum_{l=0}^{\infty} c_l h_l(\mathfrak{z})$ converge puntualmente y $f(\mathfrak{z})$ es regular sobre el disco abierto \mathcal{M} [80].

Puede verificarse inmediatamente que los operadores diferenciales [80]

$$X_0 := \mathfrak{z}\partial_{\mathfrak{z}} + k, \quad X_+ := -\mathfrak{z}^2\partial_{\mathfrak{z}} - 2k\mathfrak{z}, \quad X_- := -\partial_{\mathfrak{z}} \quad (\text{B.21})$$

son realizaciones de los generadores de $sl(2, \mathbb{R})$ en la ecuación (B.13) y sus conjugados Hermíticos en este espacio satisfacen $X_0^\dagger = X_0$ y $X_\pm^\dagger = X_\mp$.

Más aún,

$$X_0 h_l(\mathfrak{z}) = m h_l(\mathfrak{z}) \quad \text{con} \quad m = l + k, l = 0, 1, 2, \dots \quad (\text{B.22})$$

y

$$\mathbf{X}^2 = \lambda \mathbf{1}, \quad \text{con} \quad \lambda = k(k-1), \quad (\text{B.23})$$

¹⁸El caso $0 \leq k < \frac{1}{2}$ puede ser mapeado sobre el caso considerado a través del cambio $k' = 1 - k > \frac{1}{2}$, ya que $k'(k'-1) = k(k-1)$.

lo cual corresponde a una *irrep* unitaria con un autovalor mínimo para X_0 , $m_0 = k$, con $k = \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \dots$

Una *irrep* unitaria con un autovalor máximo para el generador de las rotaciones es obtenido tomando sobre el mismo espacio [80]

$$X'_0 := -X_0 = -\mathfrak{z}\partial_{\mathfrak{z}} - k, \quad X'_+ := -X_- = \partial_{\mathfrak{z}}, \quad X'_- := -X_+ = \mathfrak{z}^2\partial_{\mathfrak{z}} + 2k\mathfrak{z}, \quad (\text{B.24})$$

con $\lambda = k(k-1)$ y $m = -k, -k-1, -k-2, \dots$

Clases continuas: $\lambda + \frac{1}{4} < 0$

En este caso se escribe $\lambda = k(k-1)$ con $k = \frac{1}{2} + \nu\gamma$ y $\gamma \in \mathbb{R}$. Luego, $\lambda + \frac{1}{4} = -\gamma^2 < 0$ y la condición (B.16) se reduce a $(m \mp \frac{1}{2})^2 \geq 0 > -\gamma^2$, la cual se satisface para todo valor entero o semi-entero de m . Tomamos $\gamma > 0$, lo que justifica el nombre de clases *continuas*.

De esta forma, m no resulta acotado y toma todos los valores enteros o todos los valores semi-enteros. Nótese que en estas *irreps* el invariante de Casimir toma sólo valores negativos, $\mathbf{X}^2 = -(\gamma^2 + \frac{1}{4}) \mathbf{1}$.

Las representaciones unitarias correspondientes a estas dos clases continuas pueden ser realizadas en términos de funciones de cuadrado integrable sobre la circunferencia unitaria, como se discute en [80]. En efecto, consideremos el espacio de Hilbert de funciones $f(\phi)$ definidas sobre el intervalo cerrado $[0, 2\pi]$ con el producto escalar definido con la medida usual de Lebesgue

$$(f(\phi), g(\phi)) := \int_0^{2\pi} d\phi f(\phi)^* g(\phi). \quad (\text{B.25})$$

En este espacio se define [80]

$$X_0 := -i\partial_{\phi}, \quad X_+ := e^{i\phi} \left(i\partial_{\phi} - \frac{1}{2} - \nu\gamma \right), \quad X_- := e^{-i\phi} \left(i\partial_{\phi} + \frac{1}{2} + \nu\gamma \right), \quad (\text{B.26})$$

con γ real. Es un ejercicio simple verificar que estos operadores satisfacen las relaciones de conmutación expresadas en (B.13) y que sus conjugados Hermíticos están dados por $X_0^\dagger = X_0$ y $X_{\pm}^\dagger = X_{\mp}$ si se los define sobre un dominio de funciones periódicas o antiperiódicas sobre el intervalo $[0, 2\pi]$. Además,

$$\mathbf{X}^2 = -\left(\frac{1}{4} + \gamma^2 \right) \mathbf{1}. \quad (\text{B.27})$$

Por tanto, para todo $\gamma > 0$ y adoptando las condiciones de contorno periódicas, $f(2\pi) = f(0)$, se puede tomar como base ortonormal completa al conjunto de autovectores de X_0 ,

$$\left\{ h_m(\phi) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{im\phi}, m \in \mathbb{Z} \right\} \quad (\text{B.28})$$

con

$$X_0 h_m(\phi) = m h_m(\phi), \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (\text{B.29})$$

Por otra parte, si se adoptan condiciones de borde antiperiódicas, $f(2\pi) = -f(0)$, se puede tomar como base ortonormal completa a

$$\left\{ h'_m(\phi) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{im\phi}, m \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2} \right\} \quad (\text{B.30})$$

donde

$$X_0 h'_m(\phi) = m h'_m(\phi), \quad \text{con } m = \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{3}{2}, \pm \frac{5}{2}, \dots \quad (\text{B.31})$$

C. RELACIÓN ENTRE J^2 Y \hat{L}^2 Y ENTRE \mathcal{J}^2 Y \hat{L}^2

Definamos los operadores

$$\mathbf{A} = \frac{\hat{\mathbf{x}}}{\sqrt{\theta}} + i \frac{\hat{\boldsymbol{\pi}}}{\sqrt{\kappa}}, \quad \mathbf{A}^\dagger = \frac{\hat{\mathbf{x}}}{\sqrt{\theta}} - i \frac{\hat{\boldsymbol{\pi}}}{\sqrt{\kappa}}. \quad (\text{C.1})$$

Tenemos

$$[A_k, A_l] = 0, \quad [A_k^\dagger, A_l^\dagger] = 0, \quad [A_k, A_l^\dagger] = 2i\epsilon_{kl} + \frac{2}{\sqrt{\kappa\theta}} \delta_{kl}, \quad (\text{C.2})$$

lo cual implica que

$$[2i\epsilon_{kl}A_k^\dagger A_l, A_i^\dagger A_i] = 0, \quad (\text{C.3})$$

y

$$\begin{aligned} [A_k A_k, A_l^\dagger A_l^\dagger] &= 2 [A_k, A_l^\dagger] \left\{ [A_k, A_l^\dagger] + 2A_l^\dagger A_k \right\} = \\ &= -8i\epsilon_{kl}A_k^\dagger A_l + \frac{8}{\sqrt{\kappa\theta}}A_k^\dagger A_k - 16 \left(1 - \frac{1}{\kappa\theta} \right). \end{aligned} \quad (\text{C.4})$$

En particular, tenemos que

$$\begin{aligned} (A_k^\dagger A_k) (A_l^\dagger A_l) &= A_k^\dagger [A_k, A_l^\dagger] A_l + A_k^\dagger A_l^\dagger A_k A_l = \\ &= 2i\epsilon_{kl}A_k^\dagger A_l + \frac{2}{\sqrt{\kappa\theta}}A_k^\dagger A_k + A_k^\dagger A_l^\dagger A_k A_l, \end{aligned} \quad (\text{C.5})$$

$$\begin{aligned} (i\epsilon_{kl}A_k^\dagger A_l) (A_i^\dagger A_i) &= i\epsilon_{kl}A_k^\dagger [A_l, A_i^\dagger] A_i + i\epsilon_{kl}A_k^\dagger A_i^\dagger A_l A_i = \\ &= 2A_k^\dagger A_k + \frac{2i}{\sqrt{\kappa\theta}}\epsilon_{kl}A_k^\dagger A_l + i\epsilon_{kl}A_k^\dagger A_i^\dagger A_l A_i, \end{aligned} \quad (\text{C.6})$$

$$\begin{aligned} (i\epsilon_{kl}A_k^\dagger A_l) (i\epsilon_{ij}A_i^\dagger A_j) &= -\epsilon_{kl}\epsilon_{ij} \left\{ A_k^\dagger [A_l, A_i^\dagger] A_j + A_k^\dagger A_i^\dagger A_l A_j \right\} \\ &= 2i\epsilon_{kl}A_k^\dagger A_l + \frac{2}{\sqrt{\kappa\theta}}A_k^\dagger A_k - \epsilon_{kl}\epsilon_{ij}A_k^\dagger A_i^\dagger A_l A_j, \end{aligned} \quad (\text{C.7})$$

y

$$A_k A_k A_l^\dagger A_l^\dagger = A_l^\dagger A_l^\dagger A_k A_k - 8i\epsilon_{kl}A_k^\dagger A_l + \frac{8}{\sqrt{\kappa\theta}}A_k^\dagger A_k - 16 \left(1 - \frac{1}{\kappa\theta} \right). \quad (\text{C.8})$$

Para $\kappa > \kappa_c$, podemos escribir

$$\begin{aligned} \hat{L} &= \frac{\sqrt{\kappa\theta}}{2(1-\kappa\theta)} \left\{ -i\epsilon_{kl}A_k^\dagger A_l + \sqrt{\kappa\theta}A_k^\dagger A_k \right\}, \\ J_3 &= \frac{1}{4(1-\frac{1}{\kappa\theta})} \left\{ i\epsilon_{kl}A_k^\dagger A_l - \frac{1}{\sqrt{\kappa\theta}}A_k^\dagger A_k \right\} + \frac{1}{2}, \\ J_1 &= \frac{1}{8\sqrt{1-\frac{1}{\kappa\theta}}} \left\{ A_k^\dagger A_k^\dagger + A_k A_k \right\}, \\ J_2 &= \frac{i}{8\sqrt{1-\frac{1}{\kappa\theta}}} \left\{ A_k^\dagger A_k^\dagger - A_k A_k \right\}, \end{aligned} \quad (\text{C.9})$$

de donde obtenemos

$$\begin{aligned}
4\mathbf{J}^2 &= 1 + \frac{1}{4\left(1 - \frac{1}{\kappa\theta}\right)^2} \left\{ i\epsilon_{kl}A_k^\dagger A_l - \frac{1}{\sqrt{\kappa\theta}}A_k^\dagger A_k \right\}^2 + \\
&+ \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{\kappa\theta}\right)} \left\{ i\epsilon_{kl}A_k^\dagger A_l - \frac{1}{\sqrt{\kappa\theta}}A_k^\dagger A_k \right\} + \frac{1}{8\left(1 - \frac{1}{\kappa\theta}\right)} \left\{ A_k^\dagger A_k^\dagger A_l A_l + A_l A_l A_k^\dagger A_k^\dagger \right\}.
\end{aligned} \tag{C.10}$$

Un cálculo directo que toma en cuenta las ecuaciones (C.2) - (C.8) muestra que

$$4\mathbf{J}^2 - \left(\hat{L}\right)^2 = -1. \tag{C.11}$$

Para $\kappa < \kappa_c$, escribimos

$$\begin{aligned}
\mathcal{J}_0 &= \frac{-1}{4\left(\frac{1}{\kappa\theta} - 1\right)} \left\{ i\epsilon_{kl}A_k^\dagger A_l - \frac{1}{\sqrt{\kappa\theta}}A_k^\dagger A_k \right\} + \frac{1}{2}, \\
\mathcal{J}_1 &= \frac{1}{\frac{8}{\sqrt{\kappa\theta-1}}} \left\{ A_k^\dagger A_k^\dagger + A_k A_k \right\}, \\
\mathcal{J}_2 &= \frac{i}{\frac{8}{\sqrt{\kappa\theta-1}}} \left\{ A_k^\dagger A_k^\dagger - A_k A_k \right\},
\end{aligned} \tag{C.12}$$

y

$$\begin{aligned}
4\mathcal{J}^2 &= 1 + \frac{1}{4\left(\frac{1}{\kappa\theta} - 1\right)^2} \left\{ i\epsilon_{kl}A_k^\dagger A_l - \frac{1}{\sqrt{\kappa\theta}}A_k^\dagger A_k \right\}^2 - \\
&- \frac{1}{\left(\frac{1}{\kappa\theta} - 1\right)} \left\{ i\epsilon_{kl}A_k^\dagger A_l - \frac{1}{\sqrt{\kappa\theta}}A_k^\dagger A_k \right\} - \frac{1}{8\left(\frac{1}{\kappa\theta} - 1\right)} \left\{ A_k^\dagger A_k^\dagger A_l A_l + A_l A_l A_k^\dagger A_k^\dagger \right\},
\end{aligned} \tag{C.13}$$

de donde se obtiene el mismo resultado que en (C.11).

D. TRANSFORMACIONES UNITARIAS EN $SL(2, \mathbb{R})$ Y $SU(2)$

Recordemos que los generadores en la representación (no unitaria irreducible) fundamental de $SL(2, \mathbb{R})$ pueden ser escogido como [81]

$$X_0 = -\frac{1}{2}\sigma_2, \quad X_1 = \frac{i}{2}\sigma_1, \quad X_2 = \frac{i}{2}\sigma_3, \quad (\text{D.1})$$

donde $\sigma_i, i = 1, 2, 3$, son las matrices de Pauli. Estos generadores satisfacen las relaciones de conmutación

$$[X_\mu, X_\nu] = -i\epsilon_{\mu,\nu,\lambda}X^\lambda, \quad (\text{D.2})$$

donde $X^\mu = \eta^{\mu\nu}X_\nu$, con $(\eta^{\mu\nu}) = \text{diag}(1, -1, -1)$.

Es inmediato verificar que

$$e^{i\alpha X_2} (AX_0 + BX_1) e^{-i\alpha X_2} = A\sqrt{1 - \frac{B^2}{A^2}}X_0 \quad (\text{D.3})$$

para $A, B \in \mathbb{R}$ con $|A| > |B|$, si tomamos $\tanh \alpha = B/A$.

Luego, en cualquier representación unitaria de $SL(2, \mathbb{R})$ (con generadores Hermíticos \mathcal{J}_i) también se tiene

$$e^{i\alpha \mathcal{J}_2} (A\mathcal{J}_0 + B\mathcal{J}_1) e^{-i\alpha \mathcal{J}_2} = A\sqrt{1 - \frac{B^2}{A^2}}\mathcal{J}_0. \quad (\text{D.4})$$

En efecto, el lado izquierdo de la ecuación (D.4) puede ser escrito como

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i\alpha)^k}{k!} \left([\mathcal{J}_2, \cdot]^k (A\mathcal{J}_0 + B\mathcal{J}_1) \right) = \quad (\text{D.5})$$

$$= (A \cosh \alpha - B \sinh \alpha) \mathcal{J}_0 + (B \cosh \alpha - A \sinh \alpha) \mathcal{J}_1,$$

donde hemos empleado las relaciones de conmutación entre generadores. El coeficiente de \mathcal{J}_1 del lado derecho de esta ecuación se anula si elegimos $\tanh \alpha = B/A$ (para $|B/A| < 1$), y en tal caso se obtiene el lado derecho de la ecuación (D.4).

De forma similar,

$$e^{i\beta \mathcal{J}_1} (A\mathcal{J}_0 + B\mathcal{J}_2) e^{-i\beta \mathcal{J}_1} = \quad (\text{D.6})$$

$$= (A \cosh \beta + B \sinh \beta) \mathcal{J}_0 + (A \sinh \beta + B \cosh \beta) \mathcal{J}_2.$$

Por lo tanto, escogiendo $\tanh \beta = -B/A$, para A, B reales con $|A| > |B|$, se tiene

$$e^{i\beta \mathcal{J}_1} (A\mathcal{J}_0 + B\mathcal{J}_2) e^{-i\beta \mathcal{J}_1} = A\sqrt{1 - \frac{B^2}{A^2}}\mathcal{J}_0. \quad (\text{D.7})$$

Por otro lado, para cualquier representación unitaria de $SU(2)$, con generadores Hermíticos $J_i, i = 1, 2, 3$ y $A, B \in \mathbb{R}$, se obtiene inmediatamente

$$e^{i\varphi J_2} (AJ_3 + BJ_1) e^{-i\varphi J_2} = \quad (\text{D.8})$$

$$= (A \cos \varphi + B \sin \varphi) J_3 + (-A \sin \varphi + B \cos \varphi) J_1.$$

Luego, tomando $\tan \varphi = B/A$ con $\varphi \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ resulta

$$e^{i\varphi J_2} (AJ_3 + BJ_1) e^{-i\varphi J_2} = A\sqrt{1 + \frac{B^2}{A^2}}J_3. \quad (\text{D.9})$$

E. MÁS ESTRUCTURA ALGEBRAICA

En la sección 4 hemos señalado que el generador de las rotaciones en el plano no-conmutativo \hat{L} puede ser incorporado como uno de los generadores de un álgebra de Lie de $su(2)$ o $sl(2, \mathbb{R})$ (de acuerdo a que κ sea menor o mayor que el valor crítico κ_c), junto con los generadores de las traslaciones sobre el plano espacial no-conmutativo, $K_i, i = 1, 2$, definidos en la ecuación (4.8). Si bien no son estas relaciones las que nos han permitido resolver los problemas con potencial central de la Sección II, las desarrollaremos brevemente para ampliar nuestra visión sobre la rica estructura algebraica de estos modelos sobre espacios de fases no-conmutativos.

En efecto, dado un operador *vectorial* $\hat{\mathbf{V}}$, definimos $V_{\pm} := (\hat{V}_1 \pm i\hat{V}_2)/\sqrt{2}$, donde $\hat{\mathbf{V}}$ representa a $\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{p}}$ o $\hat{\mathbf{K}}$.

Luego, tenemos que \hat{L} puede ser escrito como

$$\hat{L} = \frac{1}{(1 - \theta\kappa)} \left\{ i(x_+\pi_- - x_-\pi_+) + \frac{\theta}{2}(\pi_+\pi_- + \pi_-\pi_+) + \frac{\kappa}{2}(x_+x_- + x_-x_+) \right\} \quad (\text{E.1})$$

y satisface

$$[\hat{L}, V_{\pm}] = \pm V_{\pm}. \quad (\text{E.2})$$

Introducimos ahora las expresiones cuadráticas $P_{\pm}K_{\pm}$. Resulta inmediato verificar que

$$[\hat{L}, \pi_{\pm}K_{\pm}] = \pm 2\pi_{\pm}K_{\pm}, \quad (\text{E.3})$$

$$[\pi_+K_+, \pi_-K_-] = \frac{\kappa^2}{(1 - \theta\kappa)} \hat{L}.$$

Entonces, para $\kappa < \kappa_c$ y $\kappa \neq 0$ podemos definir los operadores

$$J_3 := \hat{L}, \quad J_{\pm} := \frac{\sqrt{2}\sqrt{1 - \theta\kappa}}{|\kappa|} \pi_{\pm}K_{\pm}, \quad (\text{E.4})$$

que generan un álgebra de Lie de $su(2)$,

$$[J_3, J_{\pm}] = \pm J_{\pm}, \quad [J_+, J_-] = 2J_3, \quad (\text{E.5})$$

con un operador cuadrático de Casimir dado por

$$J^2 = J_{\pm}J_{\mp} + J_3(J_3 \mp 1) = \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\hat{\mathbf{p}}^2}{\kappa} + \hat{L} \right)^2 + \hat{L}^2 - 1 \right\}, \quad (\text{E.6})$$

como puede verificarse de forma directa. Advertir que este operador conmuta con $\hat{\mathbf{p}}^2$ pero no con $\hat{\mathbf{x}}^2$.

Por otro lado, para $\kappa > \kappa_c$ definimos

$$\mathcal{J}_0 := \hat{L}, \quad \mathcal{J}_{\pm} := \frac{\sqrt{2}\sqrt{\theta\kappa - 1}}{\kappa} \pi_{\pm}K_{\pm}, \quad (\text{E.7})$$

que genera un álgebra de Lie $sl(2, \mathbb{R})$ (o, equivalentemente, $su(1, 1)$),

$$[\mathcal{J}_0, \mathcal{J}_{\pm}] = \pm \mathcal{J}_{\pm}, \quad [\mathcal{J}_+, \mathcal{J}_-] = -2\mathcal{J}_0, \quad (\text{E.8})$$

con operador de Casimir $\mathcal{J}^2 = \mathcal{J}_0(\mathcal{J}_0 \mp 1) - \mathcal{J}_\pm \mathcal{J}_\mp$ tomando la misma expresión que en la segunda línea de la ecuación (E.6).

Advertir que mientras las representaciones unitarias irreducibles de $su(2)$ son de dimensión finita, aquellas de $sl(2, \mathbb{R})$ son infinito dimensionales.

Similarmente a la introducción de K_i , es posible definir los operadores de traslación sobre el plano de momentos no-conmutativos,

$$\hat{M}_i := \frac{1}{\theta\kappa - 1} (\hat{x}_i + \theta \epsilon_{ij} \hat{\pi}_j), \quad (\text{E.9})$$

los que satisfacen el álgebra de conmutadores

$$\begin{aligned} [\hat{M}_i, \hat{x}_j] &= 0, & [\hat{M}_i, \hat{\pi}_j] &= -i\delta_{ij}, \\ [\hat{M}_i, \hat{M}_j] &= \frac{-i\theta \epsilon_{ij}}{(1 - \theta\kappa)}, & [\hat{L}, \hat{M}_i] &= i\epsilon_{ij} \hat{M}_j. \end{aligned} \quad (\text{E.10})$$

Además introducimos las expresiones cuadráticas $x_\pm M_\pm$, las que satisfacen

$$\begin{aligned} [\hat{L}, x_\pm M_\pm] &= \pm 2x_\pm M_\pm, \\ [x_+ M_+, x_- M_-] &= \frac{\theta^2}{1 - \theta\kappa} \hat{L}. \end{aligned} \quad (\text{E.11})$$

Luego, para $\kappa < \kappa_c$ podemos definir los operadores Hermíticos

$$N_3 := \hat{L}, \quad N_\pm := \frac{\sqrt{2}\sqrt{1 - \theta\kappa}}{\theta} x_\pm M_\pm, \quad (\text{E.12})$$

que genera un álgebra de Lie de $su(2)$,

$$[N_3, N_\pm] = \pm N_\pm, \quad [N_+, N_-] = 2N_3, \quad (\text{E.13})$$

con un operador de Casimir dado por

$$\begin{aligned} N^2 &= N_\pm N_\mp + N_3(N_3 \mp 1) = \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\hat{\mathbf{x}}^2}{\theta} + \hat{L} \right)^2 + \hat{L}^2 - 1 \right\}, \end{aligned} \quad (\text{E.14})$$

que conmuta con $\hat{\mathbf{x}}^2$ pero no con $\hat{\boldsymbol{\pi}}^2$.

Por otro lado, para $\kappa > \kappa_c$ definimos

$$\mathcal{N}_0 := \hat{L}, \quad \mathcal{N}_\pm := \frac{\sqrt{2}\sqrt{\theta\kappa - 1}}{\kappa} \pi_\pm K_\pm, \quad (\text{E.15})$$

operadores que genera un álgebra de Lie de $sl(2, \mathbb{R})$,

$$[\mathcal{N}_0, \mathcal{N}_\pm] = \pm \mathcal{N}_\pm, \quad [\mathcal{N}_+, \mathcal{N}_-] = -2\mathcal{N}_0, \quad (\text{E.16})$$

con un operador de Casimir $\mathcal{N}^2 = \mathcal{N}_0(\mathcal{N}_0 \mp 1) - \mathcal{N}_\pm \mathcal{N}_\mp$ tomando la misma expresión que en la segunda línea de la ecuación (E.14).

F. REALIZACIÓN LINEAL DEL ÁLGEBRA NO-CONMUTATIVA

En esta sección nuestro objetivo será considerar una realización particular del álgebra deformada de la ecuación (4.1) expresando los operadores $\hat{x}_i, \hat{\pi}_i, i = 1, 2$, como combinaciones lineales de un par de variables canónicas conjugadas $p_i, q_i, i = 1, 2$, las cuales satisfacen el álgebra de Heisenberg usual,

$$[q_i, q_j] = 0, \quad [q_i, p_j] = \imath \delta_{ij}, \quad [p_i, p_j] = 0. \quad (\text{F.1})$$

Si llamamos $\xi := (\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{\pi}_1, \hat{\pi}_2)^t$, $\eta := (q_1, q_2, p_1, p_2)^t$ y escribimos $\xi = A\eta$, luego

$$[\xi_i, \xi_j] = A_{ik} A_{jl} [\eta_k, \eta_l], \quad (\text{F.2})$$

donde

$$([\xi_i, \xi_j]) = \begin{pmatrix} 0 & \imath\theta & \imath & 0 \\ -\imath\theta & 0 & 0 & \imath \\ -\imath & 0 & 0 & \imath\kappa \\ 0 & -\imath & -\imath\kappa & 0 \end{pmatrix} = \quad (\text{F.3})$$

$$= -\sigma_2 \otimes \mathbf{1}_2 - \theta \left(\frac{\mathbf{1}_2 + \sigma_3}{2} \right) \otimes \sigma_2 - \kappa \left(\frac{\mathbf{1}_2 - \sigma_3}{2} \right) \otimes \sigma_2$$

y

$$([\eta_i, \eta_j]) = \imath G, \quad \text{con} \quad G := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \imath \sigma_2 \otimes \mathbf{1}_2. \quad (\text{F.4})$$

Si tomamos el determinante de las matrices a ambos lados de (F.2) obtenemos

$$\det([\xi_i, \xi_j]) = (1 - \kappa\theta)^2 = (\det A)^2, \quad (\text{F.5})$$

lo que muestra que la transformación lineal A (definida mas allá de una transformación canónica, dada por la multiplicación a derecha con $U \in Sp(4, \mathbb{R})$) es singular para el *valor crítico* $\kappa_c = \theta^{-1}$ [1, 48]. En este punto crítico, los operadores $\hat{x}_i, \hat{\pi}_i, i = 1, 2$, no representan de manera independiente las variables dinámicas y el sistema debe ser cuantizado como uno sujeto a ligaduras.

De hecho, para $\kappa = \kappa_c$ ocurre una reducción dimensional ya que el álgebra deformada puede ser realizada en términos de un único par de variables canónicas conjugadas, q y p , donde la dimensión adicional da origen a una degeneración infinita [48]. En efecto, si escribimos $\hat{x}_1 = q$, $\hat{\pi}_1 = p$, $\hat{x}_2 = \theta p$ y $\hat{\pi}_2 = -\kappa_c q$ obtenemos el álgebra (4.1) con $\kappa = \kappa_c$, como puede ser fácilmente verificado.

Esto último está relacionado con que el factor multiplicativo frente a la expresión de L en la ecuación (4.3) se vuelve singular. Por todo esto, de momento consideraremos $\kappa \neq \kappa_c$ y sin pérdida de generalidad tomaremos $\theta > 0$.

Caso $\kappa < \kappa_c$

Realizamos el siguiente Ansatz *simétrico* para realizar las variables dinámicas no-conmutativas

$$\begin{aligned} \hat{x}_1 &:= \lambda q_1 - \frac{\theta}{2\lambda} p_2, & \hat{\pi}_1 &:= \lambda p_1 + \frac{\kappa}{2\lambda} q_2, \\ \hat{x}_2 &:= \lambda q_2 + \frac{\theta}{2\lambda} p_1, & \hat{\pi}_2 &:= \lambda p_2 - \frac{\kappa}{2\lambda} q_1. \end{aligned} \quad (\text{F.6})$$

Es simple verificar,

$$[\hat{x}_i, \hat{\pi}_j] = i \delta_{ij} \quad \Rightarrow \quad \lambda^2 + \frac{\theta \kappa}{4\lambda^2} = 1, \quad (\text{F.7})$$

donde las otras dos relaciones de conmutación de (4.1) son automáticamente satisfechas. Por tanto,

$$\lambda_{\pm}^2 = \frac{1}{2} \left(1 \pm \sqrt{1 - \kappa\theta} \right), \quad (\text{F.8})$$

lo que requiere $\kappa\theta < 1$ ($\kappa < \kappa_c$), ya que $\lambda \in \mathbb{R}$ con el fin de tener operadores Hermíticos en la ecuación (F.6).

Debe remarcarse que esta limitación es una consecuencia de la representación escogida en (F.7). En efecto, uno puede además escoger una realización no simétrica válida para todo $\kappa \neq \kappa_c$ (ver sección F).

Nuestra realización simétrica de las variables dinámicas simplifica la expresión del generador de las rotaciones ya que, para ambos signos en la ecuación (F.8), se obtiene inmediatamente

$$\hat{L} = L_0 := q_1 p_2 - q_2 p_1. \quad (\text{F.9})$$

En lo que sigue tomaremos $\lambda = \lambda_+$, con el fin de que $\lambda \rightarrow 1$ cuando $\kappa\theta \rightarrow 0$.

Puesto que es de nuestro particular interés estudiar los *potenciales centrales* definidos sobre este espacio difuso, será de utilidad expresar en el marco de la realización simétrica de las variables dinámicas dadas en la ecuación (F.6), al operador de la distancia radial al cuadrado sobre este plano no-conmutativo,

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}^2 &:= \hat{x}_1^2 + \hat{x}_2^2 = \\ &= \frac{\theta^2}{4\lambda^2} (p_1^2 + p_2^2) + \lambda^2 (q_1^2 + q_2^2) - \theta (q_1 p_2 - q_2 p_1) = \\ &= \theta \left\{ \frac{\theta}{2\lambda^2} \left[\frac{1}{2} (p_1^2 + p_2^2) + \frac{1}{2} \left(\frac{2\lambda^2}{\theta} \right)^2 (q_1^2 + q_2^2) \right] - L_0 \right\}. \end{aligned} \quad (\text{F.10})$$

Advertir que esta expresión (la cual se reduce al cuadrado de la distancia radial en el plano usual cuando $\theta \rightarrow 0$), para $\theta \neq 0$, puede ser realizada como una combinación lineal del momento angular y del Hamiltoniano de un oscilador armónico isótropo en el plano conmutativo [69, 72, 28], con masa M y frecuencia ω que satisfacen

$$M\omega = \frac{2\lambda^2}{\theta}. \quad (\text{F.11})$$

Por otro lado, el término cinético definido como

$$\hat{\boldsymbol{\pi}}^2 := \hat{\pi}_1^2 + \hat{\pi}_2^2 = \lambda^2 \{p_1^2 + p_2^2\} + \frac{\kappa^2}{4\lambda^2} (q_1^2 + q_2^2) - \kappa L_0, \quad (\text{F.12})$$

expresión que, para $\theta \rightarrow 0$, se reduce al Hamiltoniano del problema de Landau usual con un campo magnético efectivo $B_{\text{eff}} = \kappa/e$ (siendo e la carga de la partícula).

Caso $\kappa > \kappa_c$

En esta región también podemos emplear una especie de realización lineal *simétrica* en la cual aparecen similitudes en la expresión de las coordenadas y momentos no-conmutativos con el mismo índice (en lugar de entre coordenadas y momentos como en (F.6) para el caso $\kappa < \kappa_c$). En efecto, se puede verificar fácilmente que

$$\begin{aligned}\hat{x}_1 &:= \left(\frac{1}{\theta\kappa}\right)^{\frac{1}{4}} \left(\gamma q_1 - \frac{\theta}{2\gamma} p_2\right), & \hat{\pi}_1 &:= \left(\frac{1}{\theta\kappa}\right)^{\frac{1}{4}} \sqrt{\frac{\kappa}{\theta}} \left(\gamma q_2 + \frac{\theta}{2\gamma} p_1\right), \\ \hat{x}_2 &:= \left(\frac{1}{\theta\kappa}\right)^{\frac{1}{4}} \sqrt{\frac{\theta}{\kappa}} \left(\gamma p_1 + \frac{\kappa}{2\gamma} q_2\right), & \hat{\pi}_2 &:= \left(\frac{1}{\theta\kappa}\right)^{\frac{1}{4}} \left(\gamma p_2 - \frac{\kappa}{2\gamma} x_1\right),\end{aligned}\tag{F.13}$$

con $\gamma := \sqrt{\frac{\theta\kappa}{2}} \left(1 + \sqrt{1 - \frac{1}{\theta\kappa}}\right)^{\frac{1}{2}}$ satisfacen las relaciones de conmutación de las eqs. (4.1).

Advertir que, en el límite $\kappa \rightarrow \kappa_c^+$, estas expresiones se reducen a

$$\begin{aligned}\hat{x}_1 &:= \frac{1}{\sqrt{2}} (q_1 - \theta p_2), & \hat{\pi}_1 &:= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(p_1 + \frac{1}{\theta} q_2\right), \\ \hat{x}_2 &:= \frac{1}{\sqrt{2}} (x_2 + \theta p_1), & \hat{\pi}_2 &:= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(p_2 - \frac{1}{\theta} q_1\right),\end{aligned}\tag{F.14}$$

la cual coincide con el límite $\kappa \rightarrow \kappa_c^-$ de las ecuaciones (F.6) con $\lambda = \lambda_+$ definidas en (F.8), dando así continuidad en la realización lineal de las variables dinámicas no-conmutativas.

Llamemos

$$H_i := \frac{1}{2} p_i^2 + \frac{\kappa}{2\theta} q_i^2, \quad i = 1, 2,\tag{F.15}$$

al Hamiltoniano de dos osciladores armónicos de masa unitaria y frecuencia $\bar{\omega} = \sqrt{\frac{\kappa}{\theta}}$.

De (F.13), se obtiene para el cuadrado de la distancia radial

$$\hat{\mathbf{x}}^2 = \theta \left\{ \frac{1}{\bar{\omega}} (H_1 + H_2) + \sqrt{1 - \frac{1}{\theta\kappa}} \frac{1}{\bar{\omega}} (H_1 - H_2) - \frac{1}{\sqrt{\theta\kappa}} L_0 \right\},\tag{F.16}$$

para el cuadrado del momento

$$\hat{\boldsymbol{\pi}}^2 = \kappa \left\{ \frac{1}{\bar{\omega}} (H_1 + H_2) - \sqrt{1 - \frac{1}{\theta\kappa}} \frac{1}{\bar{\omega}} (H_1 - H_2) - \frac{1}{\sqrt{\theta\kappa}} L_0 \right\}\tag{F.17}$$

y para el generador de las rotaciones en este plano no-conmutativo

$$\hat{L} = -\frac{1}{\bar{\omega}} (H_1 + H_2),\tag{F.18}$$

de donde se lee que es un operador proporcional al Hamiltoniano del oscilador isótropo como es considerado en el Apéndice G.

En particular, los autovectores de un Hamiltoniano con un potencial central como \hat{H} de (4.6) pueden ser encontrados en los subespacios característicos de *dimensión finita* de \hat{L} .

Sin embargo, es posible dar una expresión más conveniente para los operadores a través de una transformación de Bogolyubov [48], $\eta = U(\alpha)\eta'$ donde

$$U(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & 0 & 0 & \sqrt{\frac{\theta}{\kappa}} \sin(\alpha) \\ 0 & \cos(\alpha) & \sqrt{\frac{\theta}{\kappa}} \sin(\alpha) & 0 \\ 0 & -\sqrt{\frac{\kappa}{\theta}} \sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ -\sqrt{\frac{\kappa}{\theta}} \sin(\alpha) & 0 & 0 & \cos(\alpha) \end{pmatrix}, \quad (\text{F.19})$$

escogiendo de manera adecuada el parámetro α .

Por ejemplo, si elegimos $\alpha = -\frac{1}{2} \arctan \sqrt{\theta\kappa - 1}$ se obtiene

$$\hat{\mathbf{x}}^2 = \theta \left\{ \frac{1}{\bar{\omega}} (H'_1 + H'_2) - L'_0 \right\}, \quad (\text{F.20})$$

$$\hat{\boldsymbol{\pi}}^2 = \kappa \left\{ \frac{1}{\bar{\omega}} (H'_1 + H'_2) + \frac{2}{\theta\kappa} \sqrt{\theta\kappa - 1} \frac{1}{\bar{\omega}} (H'_2 - H'_1) + \left(1 - \frac{2}{\theta\kappa}\right) L'_0 \right\} \quad (\text{F.21})$$

y

$$\hat{L} = -\frac{1}{\bar{\omega}} (H'_1 + H'_2), \quad (\text{F.22})$$

donde $H'_{1,2}$ son los Hamiltonianos de dos osciladores armónicos de masa unitaria y frecuencia $\bar{\omega} = \sqrt{\frac{\kappa}{\theta}}$ en las variables dinámicas primadas y L'_0 el momento angular del sistema.

Advertir que con esta elección, $\hat{\mathbf{x}}^2$ y \hat{L} pueden ser expresados en términos del Hamiltoniano del oscilador isótropo $H_0 = (H'_1 + H'_2)$, y su momento angular, L'_0 , pero $\hat{\boldsymbol{\pi}}^2$ depende de la diferencia $(H'_2 - H'_1)$, la cual no conmuta con L'_0 . De cualquier forma, puesto que el generador de las rotaciones \hat{L} conmuta con el Hamiltoniano de una partícula sujeta a un potencial central sobre el plano no-conmutativo, los autovectores simultáneos a ambos operadores están dados por combinaciones lineales de los autovectores degenerados de este oscilador isótropo cuyos niveles de energía tienen degeneración finita puesto que sus subespacios característicos corresponden a una representación irreducible de $SU(2)$ [1] (ver Apéndice G).

1. Ejemplos sencillos para la región $\kappa < \kappa_c$.

Oscilador isótropo

Consideremos

$$H_{osc} := \frac{1}{2\mu} \hat{\boldsymbol{\pi}}^2 + \frac{1}{2} \mu \omega^2 \hat{\mathbf{x}}^2. \quad (\text{F.23})$$

Empleando la ecuación (F.6) se tiene (ver (F.10) y (F.12))

$$\begin{aligned} H_{osc} &= \frac{\lambda^2}{2\mu} \{p_1^2 + p_2^2\} + \frac{\kappa^2}{8\mu\lambda^2} (q_1^2 + q_2^2) - \frac{\kappa}{2\mu} L_0 \\ &+ \frac{1}{2} \mu \omega^2 \left\{ \frac{\theta^2}{4\lambda^2} (p_1^2 + p_2^2) + \lambda^2 (q_1^2 + q_2^2) - \theta L_0 \right\} \\ &= \frac{\mathbf{p}^2}{2M} + \frac{1}{2} M \Omega^2 \mathbf{q}^2 - \left(\frac{\theta \mu^2 \omega^2 + \kappa}{2\mu} \right) L_0 = \eta^t M_{osc} \eta, \end{aligned} \quad (\text{F.24})$$

donde la masa y la frecuencia *efectiva* vienen dadas por

$$M = \mu \left\{ 1 + \frac{\theta (\kappa - \theta \mu^2 \omega^2)}{4\lambda^2 + \theta^2 \mu^2 \omega^2 - \theta \kappa} \right\}, \quad (\text{F.25})$$

$$\Omega^2 = \omega^2 + \frac{(\kappa - \theta \mu^2 \omega^2)^2}{4\mu^2}.$$

Estas expresiones coinciden con los resultados expuestos en [95] (para $\kappa = 0$) y se reducen a μ y ω^2 en el límite conmutativo respectivamente (ver [96]). Cuando $(\kappa - \theta \mu^2 \omega^2) = 0$ también se obtienen los valores originales de estos parámetros (siempre que $\theta \mu^2 \omega^2 < \kappa_c$). Esta condición fue impuesta en [75, 76] con el fin de obtener la estadística de Bose-Einstein para los operadores de creación y aniquilación definidos para este modelo particular (ej., dependiendo de $\mu\omega$) en términos de las variables dinámicas del espacio de fases no-conmutativo.

Advertir que H_{osc} tiene la forma de un Hamiltoniano de un oscilador armónico isótropo cargado acoplado a un campo magnético efectivo B_{eff} proporcional a $\left(\frac{\theta \mu^2 \omega^2 + \kappa}{2\mu}\right)$ y perpendicular al plano.

Sea $|n, l\rangle$, $n = 0, 1, 2, \dots$; $l = -n, -n + 2, \dots, n - 2, n$, sean los autovectores simultáneos del momento angular L_0 y del Hamiltoniano del oscilador isótropo de masa M y frecuencia Ω sobre el plano conmutativo,

$$\mathfrak{h} = \frac{1}{2M} \mathbf{p}^2 + \frac{1}{2} M \Omega^2 \mathbf{q}^2. \quad (\text{F.26})$$

Tenemos

$$\mathfrak{h} |n, l\rangle = \Omega(n+1) |n, l\rangle, \quad L_0 |n, l\rangle = l |n, l\rangle. \quad (\text{F.27})$$

Es evidente que H_{osc} es diagonal con respecto a esta base del espacio del espacio de Hilbert. Pero el término proporcional a L_0 en el lado derecho de (F.24) rompe en general, para κ y/o $\theta \neq 0$, la degeneración usual del oscilador armónico isótropo (Ver Apéndice G). Esto está en acuerdo con los resultados de [75, 95, 97]. No obstante, esta degeneración es recuperada para el valor particular $\kappa = -\theta \mu^2 \omega^2 (< \kappa_c)$.

Bajo inversión temporal el Hamiltoniano se transforma en (ver ecuaciones (5.4)) y (5.5))

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{T}} H_{osc} \hat{\mathcal{T}}^\dagger &= \frac{1}{2\mu} \left(\hat{\boldsymbol{\pi}}^2 + 2\kappa \hat{L} \right) + \frac{1}{2} \mu \omega^2 \left(\hat{\mathbf{x}}^2 + 2\theta \hat{L} \right) = \\ &= H_{osc} + \frac{1}{\mu} \left[\kappa + \mu^2 \omega^2 \theta \right] \hat{L}. \end{aligned} \quad (\text{F.28})$$

Advertir que esta simetría es recuperada no solo en el límite conmutativo sino además cuando se satisface la relación $\kappa + \mu^2 \omega^2 \theta = 0$ (ver [97]), precisamente el punto donde el espectro presenta la degeneración usual del oscilador isótropo.

Puesto que el Hamiltoniano en (F.23) depende de $\hat{\boldsymbol{\pi}}^2$ y $\hat{\mathbf{x}}^2$ solamente, se sigue de (5.7) que el lado derecho de la ecuación (F.28) sea el resultado de $\hat{\mathcal{P}} H_{osc} \hat{\mathcal{P}}^\dagger$. Finalmente, de (5.9) se sigue que H_{osc} es \mathcal{PT} -invariante.

Mencionemos que H_{osc} de (F.24) puede ser además escrito como la suma de dos Hamiltonianos de osciladores armónicos a través de una transformación canónica apropiada de las variables dinámicas usuales $\eta := (q_1, q_2, p_1, p_2)^t$ en la ecuación (F.24) [48, 96]. En efecto, en términos de η' que satisface

$\eta = A^{-1}A_{NP}U(\alpha)\eta'$, donde A viene dada por la ecuación (5.14),

$$A_{NP} = \sqrt{\theta\mu\omega} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\mu\omega} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\theta}\sqrt{1-\theta\kappa} & \frac{1}{\theta\mu\omega} & 0 \\ -\frac{1}{\theta} & 0 & 0 & -\frac{1}{\theta\mu\omega}\sqrt{1-\theta\kappa} \end{pmatrix}, \quad (\text{F.29})$$

con $A^{-1}A_{NP} \in Sp(4, \mathbb{R})$, y $U(\alpha) \in Sp(4, \mathbb{R})$ la transformación de Bogolyubov discutida en [48] (ver eqs. (13-14) de esta referencia) la cual, con nuestras convenciones, se lee como

$$U(\alpha) = \begin{pmatrix} \cosh(\alpha) & 0 & 0 & \frac{\sinh(\alpha)}{\mu\omega} \\ 0 & \cosh(\alpha) & \frac{\sinh(\alpha)}{\mu\omega} & 0 \\ 0 & \mu\omega \sinh(\alpha) & \cosh(\alpha) & 0 \\ \mu\omega \sinh(\alpha) & 0 & 0 & \cosh(\alpha) \end{pmatrix} \quad (\text{F.30})$$

donde

$$\alpha = \frac{1}{2} \tanh^{-1} \left(\frac{2\sqrt{1-\theta\kappa}}{-\theta^2\mu^2\omega^2 + \theta\kappa - 2} \right), \quad (\text{F.31})$$

la forma cuadrática definida por H_{osc} se reduce a

$$H_{osc} = \frac{p_1'^2}{2m_1} + \frac{1}{2} m_1 \Omega_+^2 q_1'^2 + \frac{p_2'^2}{2m_2} + \frac{1}{2} m_2 \Omega_-^2 q_2'^2, \quad (\text{F.32})$$

donde las frecuencias vienen dadas por

$$\Omega_{\pm}^2 = \Omega^2 + \frac{(\kappa + \theta\mu^2\omega^2)}{4\mu^2} \left\{ (\kappa + \theta\mu^2\omega^2) \pm 2\sqrt{(\kappa - \theta\mu^2\omega^2)^2 + 4\mu^2\omega^2} \right\}. \quad (\text{F.33})$$

Aquí nuevamente, se ve que la degeneración del espectro del oscilador isótropo es recuperada para $\kappa = -\mu^2\omega^2\theta$, donde ambas frecuencias coinciden. Es simple de ver que el espectro presenta una degeneración similar cuando el cociente de frecuencias es un número racional [96], $r_{\pm}\Omega_{\pm} = \bar{\Omega}$, con r_{\pm} co-primos. En este caso tenemos

$$\begin{aligned} E_{n_+, n_-} &= \bar{\Omega} \left\{ \frac{n_+ + 1/2}{r_+} + \frac{n_- + 1/2}{r_-} \right\} = \\ &= \bar{\Omega} \left\{ (p_+ + p_-) + \left(\frac{q_+ + 1/2}{r_+} + \frac{q_- + 1/2}{r_-} \right) \right\}, \end{aligned} \quad (\text{F.34})$$

donde $q_{\pm} = n_{\pm} \bmod r_{\pm}$ y $p_{\pm} = 0, 1, 2, \dots$ dados $q_{\pm} \in \{0, 1, \dots, r_{\pm} - 1\}$, uno obtiene la misma energía que para el estado $N + 1$ caracterizado por la condición $p_+ + p_- = N$, para cada $N = 0, 1, 2, \dots$

Más aún, advertir que $\Omega_+ \rightarrow \frac{(\theta^2\mu^2\omega^2+1)}{\theta\mu}$ y $\Omega_- \rightarrow 0$ cuando $\kappa \rightarrow \kappa_c^-$.

Problema de Landau

Consideremos ahora,

$$\begin{aligned}
2\mu H_L &:= \left(\hat{\pi}_1 + \frac{eB}{2} \hat{x}_2 \right)^2 + \left(\hat{\pi}_2 - \frac{eB}{2} \hat{x}_1 \right)^2 \\
&= \hat{\pi}^2 + \left(\frac{eB}{2} \right)^2 \hat{\mathbf{x}}^2 - eB \left\{ (1 - \kappa\theta) \hat{L} - \frac{\theta}{2} \hat{\pi}^2 - \frac{\kappa}{2} \hat{\mathbf{x}}^2 \right\} = \\
&= \left(1 + \frac{eB\theta}{2} \right) \hat{\pi}^2 + \frac{eB}{4} (eB + 2\kappa) \hat{\mathbf{x}}^2 - eB (1 - \kappa\theta) \hat{L},
\end{aligned} \tag{F.35}$$

siendo B el módulo del campo magnético perpendicular al plano. Esta Hamiltoniano debe ser comparado con H_{osc} de la ecuación (F.23).

Empleando la realización simétrica de la ecuación (F.6), se sigue inmediatamente

$$H_L = \frac{\mathbf{p}^2}{2M_L} + \frac{1}{2} M_L \Omega_L^2 \mathbf{q}^2 - \Omega_L L_0, \tag{F.36}$$

donde la frecuencia y la masa efectiva viene dada por

$$\begin{aligned}
\Omega_L &= \frac{Be(Be\theta + 4) + 4\kappa}{8\mu}, \\
M_L &= \frac{16\lambda^2\mu}{(Be\theta + 4\lambda^2)^2} = \frac{(Be\lambda^2 + \kappa)^2}{4\lambda^2\mu\Omega_L^2}.
\end{aligned} \tag{F.37}$$

Advertir que H_L tiene la misma forma que (y en su límite conmutativo se reduce a) el Hamiltoniano de Landau en el plano usual. Por tanto, éste presenta una degeneración infinita para cualquier valor de los parámetros no-conmutativos θ y κ (restringidos a la condición $\kappa < \kappa_c$).

En particular, en el límite $\theta \rightarrow 0$ se tiene $M_L \rightarrow \mu$ y $\Omega_L \rightarrow \frac{eB+\kappa}{2\mu}$. Advertir que en este caso κ/e aparece como una contribución al campo magnético.

En el plano conmutativo usual, el Hamiltoniano del problema de Landau queda invariante frente a una transformación de inversión temporal (con B impar), pero en el plano no-conmutativo este Hamiltoniano se transforma en (ver las ecuaciones (5.4) y (5.5))

$$2\mu H_L^{\mathcal{T}} = 2\mu H_L + \frac{B^2 e^2 \theta + 4Be + 4\kappa}{2} \hat{L}. \tag{F.38}$$

La misma expresión da $2\mu H_L^{\mathcal{P}}$ (tener en cuenta que B es también impar bajo paridad). Ambas simetrías son recuperadas en el límite conmutativo y además para $(B^2 e^2 \theta + 4Be\hbar + 4\kappa) = 0$ [97], pero H_L es siempre \mathcal{PT} -invariante (con B par bajo \mathcal{PT}).

2. Ejemplos sencillos para la región $\kappa > \kappa_c$.

Oscilador isótropo

Consideremos en primer lugar la extensión al plano no-conmutativo del oscilador armónico isótropo de la ecuación (F.23) en la región donde $\kappa > \kappa_c$. En este caso, de (F.20) y (F.21), una transformación de Bogolyubov convenientemente escogida de η' puede reducir H_{osc} a una suma de Hamiltonianos de dos osciladores armónicos, tal como es discutido en [48]. En efecto, reemplazando $\xi = BU(\alpha)U(\beta)\eta''$ en H_{osc} , (siendo B la matriz de la realización simétrica de esta región, la cual cumple $\xi = B\eta$), el término proporcional a L''_0 en la expresión resultante puede ser eliminada escogiendo

$$\beta = \frac{1}{2} \arctan \left(\frac{\theta\kappa - \theta^2\mu^2\omega^2 - 2}{2\sqrt{\theta\kappa}\sqrt{1 - \frac{1}{\theta\kappa}}} \right) \quad (\text{F.39})$$

y se obtiene así una suma de dos osciladores desacoplados de masas y frecuencias dadas por

$$M_{\pm} = \frac{2\mu\sqrt{\frac{\kappa}{\theta}}}{\left(\kappa + \theta\mu^2\omega^2 \pm \sqrt{(\kappa - \theta\mu^2\omega^2)^2 + 4\mu^2\omega^2} \right)}, \quad (\text{F.40})$$

$$\Omega_{\pm}^2 = \Omega^2 + \frac{(\kappa + \theta\mu^2\omega^2)}{4\mu^2} \left(\kappa + \theta\mu^2\omega^2 \pm 2\sqrt{(\kappa - \theta\mu^2\omega^2)^2 + 4\mu^2\omega^2} \right),$$

con Ω^2 definido en (F.25). El espectro de este sistema queda determinado por las frecuencias Ω_{\pm} , las cuales tienen la misma expresión a aquellas obtenidas en la ecuación (F.33), pero que nunca coinciden para $\kappa > \kappa_c > 0$.

Además $\Omega_+ \rightarrow \frac{\theta^2\mu^2\omega^2+1}{\theta\mu}$ y $\Omega_- \rightarrow 0$ cuando $\kappa \rightarrow \kappa_c^+$, en coincidencia con el límite tomado en la otra región cuando $\kappa \rightarrow \kappa_c^-$. Mejor aún, $M_+ \rightarrow \frac{\mu}{\theta^2\mu^2\omega^2+1}$ mientras que M_- diverge en este límite.

Problema de Landau

De forma similar, para la extensión no-conmutativa del problema de Landau del problema en ecuación (F.35) en la región $\kappa > \kappa_c$, haciendo una transformación canónica adicional $U(\beta)$ con

$$\beta = \frac{1}{2} \arctan \left(\frac{4\sqrt{\theta\kappa}\sqrt{1 - \frac{\hbar^2}{\theta\kappa}}(Be\theta + 2)}{B^2e^2\theta^2 + 4Be\theta - 4\theta\kappa + 8^2} \right) \quad (\text{F.41})$$

encontramos que el Hamiltoniano se reduce a la forma de H_L de la ecuación (F.36) con la misma frecuencia Ω_L que en (F.37) (y, por tanto, el mismo espectro como función de los parámetros no-conmutativos) pero masa efectiva distinta,

$$M_L = \frac{8\sqrt{\kappa}\mu}{\sqrt{\theta}(Be(Be\theta + 4) + 4\kappa)}. \quad (\text{F.42})$$

G. EL OSCILADOR ISÓTROPICO BIDIMENSIONAL

Recordemos que el Hamiltoniano de un oscilador armónico isótropo es

$$H_{HO} = \frac{\omega}{2} [P^2 + Q^2], \quad (\text{G.1})$$

donde los operadores hermíticos P y Q que satisfacen $[P, Q] = -i$, pueden ser escritos en términos de los operadores de creación y aniquilación de una partícula,

$$a^\dagger := \frac{Q - iP}{\sqrt{2}}, \quad a := \frac{Q + iP}{\sqrt{2}}, \quad (\text{G.2})$$

que satisfacen $[a^\dagger, a] = -1$, como

$$H_{HO} = \omega \left(a^\dagger a + \frac{1}{2} \right). \quad (\text{G.3})$$

Consideremos ahora el oscilador isótropo bi-dimensional, el cual viene dado por el Hamiltoniano

$$H_0 = \frac{\omega}{2} [(P_1^2 + Q_1^2) + (P_2^2 + Q_2^2)], \quad (\text{G.4})$$

con $[P_1, Q_1] = -i = [P_2, Q_2]$. O, en términos de los operadores de creación y destrucción,

$$H_0 = \omega \left(a_1^\dagger a_1 + a_2^\dagger a_2 + 1 \right). \quad (\text{G.5})$$

La simetría axial de este sistema implica la conservación del operador momento angular, $[H_0, L_0] = 0$, con L_0 dado por

$$L_0 := (Q_1 P_2 - Q_2 P_1) = i \left(a_2^\dagger a_1 - a_1^\dagger a_2 \right). \quad (\text{G.6})$$

Se define

$$\begin{aligned} a &:= \frac{a_1 + ia_2}{\sqrt{2}}, & b &:= \frac{a_1 - ia_2}{\sqrt{2}}, \\ a^\dagger &:= \frac{a_1^\dagger - ia_2^\dagger}{\sqrt{2}}, & b^\dagger &:= \frac{a_1^\dagger + ia_2^\dagger}{\sqrt{2}}, \end{aligned} \quad (\text{G.7})$$

de donde se obtiene

$$[a, a^\dagger] = 1 = [b, b^\dagger], \quad (\text{G.8})$$

$$[a, b] = 0 = [a, b^\dagger],$$

y

$$H_0 = \omega \left(a^\dagger a + b^\dagger b + 1 \right), \quad L_0 = \left(b^\dagger b - a^\dagger a \right), \quad (\text{G.9})$$

o, en términos de los operadores número, $N_a = a^\dagger a$, $N_b = b^\dagger b$ y $N := N_a + N_b$,

$$\mathcal{H}_0 := \frac{H_0}{\omega} = N_a + N_b + 1 = N + 1, \quad \mathcal{L} := L_0 = N_b - N_a. \quad (\text{G.10})$$

Luego,

$$\begin{aligned} [\mathcal{H}_0, a^\dagger] &= +a^\dagger, & [\mathcal{H}_0, b^\dagger] &= +b^\dagger, \\ [\mathcal{L}, a^\dagger] &= -a^\dagger, & [\mathcal{L}, b^\dagger] &= +b^\dagger. \end{aligned} \quad (\text{G.11})$$

y el espacio de Hilbert de los estados de este sistema es la (clausura de) el espacio de Fock generado por los vectores

$$|n_a, n_b\rangle := \frac{(a^\dagger)^{n_a}}{\sqrt{n_a!}} \frac{(b^\dagger)^{n_b}}{\sqrt{n_b!}} |0, 0\rangle, \quad n_a, n_b = 0, 1, 2, \dots \quad (\text{G.12})$$

donde el estado de vacío satisface $a|0, 0\rangle = 0 = b|0, 0\rangle$. Tenemos

$$\mathcal{H}_0 |n_a, n_b\rangle = (n+1) |n_a, n_b\rangle, \quad \mathcal{L} |n_a, n_b\rangle = l |n_a, n_b\rangle, \quad (\text{G.13})$$

con $n = n_a + n_b$ and $l = n_b - n_a$.

Consideremos brevemente la degeneración de los autovalores de \mathcal{H}_0 . Es evidente de (G.13) que para cualquier $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $\mathcal{E}_{n,l} = n+1$ es $(n+1)$ -veces degenerado, para $n_a = 0, 1, 2, \dots, n$ y $n_b = n - n_a$.

Estos subespacios característicos de \mathcal{H}_0 son espacios de representación de la representación irreducible de $SU(2)$. En efecto, definamos

$$J_3 := -\frac{1}{2} \mathcal{L} = \frac{N_a - N_b}{2}, \quad J_+ := a^\dagger b, \quad J_- := J_+^\dagger = b^\dagger a. \quad (\text{G.14})$$

Luego, se tiene

$$[J_3, J_+] = \frac{1}{2} [N_a - N_b, a^\dagger b] = a^\dagger b = J_+ \quad (\text{G.15})$$

$$\Rightarrow [J_3, J_-] = -J_-,$$

y

$$[J_+, J_-] = [a^\dagger b, a^\dagger b] = 2J_3, \quad (\text{G.16})$$

la cual es la forma usual del álgebra de Lie de $su(2)$.

Más aún,

$$[\mathcal{H}_0, J_3] = 0, \quad (\text{G.17})$$

$$[\mathcal{H}_0, J_+] = [N_a + N_b, a^\dagger b] = -a^\dagger b + a^\dagger b = 0.$$

Advertir que

$$J_3 |n_a, n_b\rangle = \frac{(n_a - n_b)}{2} |n_a, n_b\rangle \quad (\text{G.18})$$

y

$$\begin{aligned} J_+ |n_a, n_b\rangle &= a^\dagger b \frac{(a^\dagger)^{n_a}}{\sqrt{n_a!}} \frac{(b^\dagger)^{n_b}}{\sqrt{n_b!}} |0, 0\rangle = \\ &= \sqrt{(n_a + 1)n_b} \frac{(a^\dagger)^{(n_a+1)}}{\sqrt{(n_a + 1)!}} \frac{(b^\dagger)^{(n_b-1)}}{\sqrt{(n_b - 1)!}} |0, 0\rangle = \\ &= \sqrt{(n_a + 1)n_b} |n_a + 1, n_b - 1\rangle. \end{aligned} \quad (\text{G.19})$$

Por tanto, llamando

$$j := \frac{n}{2} = \frac{n_a + n_b}{2}, \quad y \quad m := -\frac{l}{2} = \frac{n_a - n_b}{2}, \quad (\text{G.20})$$

lo que implica que

$$n_a = j + m, \quad \text{and} \quad n_b = j - m, \quad (\text{G.21})$$

e identificando

$$||j, m\rangle\rangle \equiv |n_a, n_b\rangle = |j + m, j - m\rangle , \quad (\text{G.22})$$

con j fijo y $-j \leq m \leq j$, de (G.18) y (G.19) se obtiene

$$\begin{aligned} J_3 ||j, m\rangle\rangle &= m ||j, m\rangle\rangle , \\ J_+ ||j, m\rangle\rangle &= \sqrt{(j + m + 1)(j - m)} ||j, m + 1\rangle\rangle , \end{aligned} \quad (\text{G.23})$$

la cual es la expresión usual para la representación unitaria irreducible (de dimensión $(2j + 1)$) del álgebra $su(2)$.

Estos resultados explican la degeneración de los autovalores de \mathcal{H}_0 .

Referencias

- [1] S. Bellucci, A. Nersessian and C. Sochichiu, *Phys. Lett. B* **522** (2001) 345.
- [2] Werner Heisenberg, *Die Selbstenergie des Elektrones*, *Z. Phys.* **65**, 4-13.
- [3] C.N. Yang, *Phys. Rev.* **72**, 874 (1947).
- [4] M. Green, J.H. Schwarz and E. Witten, *Superstring theory*, Cambridge University Press, Cambridge, 1987.
- [5] Deriglazov A.A., *Phys. Lett.* **B530** (2002), 235-243 ; *Phys. Lett.* **B555** (2003), 83-88 *J. High Energy Phys.* 2003 (2003), 021. Chakraborty B., Gangopadhyay S. and Saha A., *Phys. Rev.* **D70** (2004), 107707. Scholtz F.G., Chakraborty B., Gangopadhyay S. and Hazra A.G., *Phys. Rev.* **D71** (2005), 085005. Gangopadhyay S. and Scholtz F.G., *Phys. Rev. Lett.* **102** (2009), 241602. Banerjee R., Lee C. and Yang H.S., *Phys. Rev.* **D70** (2004), 065015. Banerjee R. and Kumar K., *Phys. Rev.* **D72** (2005), 085012. Banerjee R., Chakraborty B., Subir Ghosh, Mukherjee P. and Samanta S. *Found. Phys.* **39** (2009) 1297.
- [6] H. S. Snyder, *Quantized Space-Time*, *Phys. Rev.* **71**, 38-41 (1947).
- [7] H. S. Snyder, *The Electromagnetic Field in Quantized Space-Time*, *Phys. Rev.* **72**, 68-71 (1947).
- [8] J. Von Neumann, *On ring operators, III*, *Ann. of Math.* **41** (1940), 94- 161.
- [9] A. Connes, *Noncommutative differential geometry*, Publications of the Institut des Hautes Etudes Scientifiques, **62** (1986) 257.
- [10] A. Connes *Géométrie non commutative*, InterEditions, Paris (1990).
- [11] S. L. Woronowicz, *Twisted $SU(2)$ group: An example of noncommutative differential calculus*, *Publ. Res. Inst. Math. Sci. Kyoto* **23** (1987) 117.
- [12] C. P. Martín, J. M. Gracías-Bondía and J. C. Várilly, *The Standard Model as a Noncommutative Geometry: The Low-Energy Regime*, *Phys. Rep.* **294** (1998) 363.
- [13] P.P. Kulish, N.Yu. Reshetikhin, *Quantum Linear Problem for the Sine-Gordon Equation and Higher Representations*, *J. Soviet Math.* **23** (1983) 2435.
- [14] E.K. Sklyanin, *Some algebraic structures connected with the Yang-Baxter equation*, *Funct. Anal. Appl.* **16** (1982) 263.
- [15] S.L. Woronowicz, *Pseudospaces, pseudogroups and Pontriagin duality*. Proceedings of the International conference on Mathematics and Physics, Lausanne, *Lect. Notes in Phys.* No. 116, Springer-Verlag, Heidelberg, 1979.
- [16] J. Wess, B. Zumino, *Covariant Differential Calculus on the Quantum Hyperplane*, *Nucl. Phys. (Proc. Suppl.)* **18B** (1990) 302.
- [17] José L. Fernández Barbón, *Geometría no conmutativa y espaciotiempo cuántico*, *Investigación y Ciencia* (2005), *Nº* 342, 60-69.
- [18] J. Madore, *An Introduction to Noncommutative Differential Geometry and its Physical Applications*, 2nd edition Cambridge University Press, 1999.

- [19] A. Connes, M. R. Douglas y A. Schwarz, *Noncommutative Geometry and matrix theory: Compactification on tori*, JHEP **9802** (1998) 003.
- [20] T. Banks, W. Fischler, S.H. Shenker, L. Susskind, *M Theory as a Matrix Model: a Conjecture*, Phys. Rev. **D55** (1997) 5112.
- [21] A. Connes, *Noncommutative geometry* Academic Press, London and San Diego (1994).
- [22] A. Connes and M. Marcolli, *Colloquium Publications*, Vol. 55, American Mathematical Society (2008).
- [23] N. Seiberg and E. Witten, *String theory and noncommutative geometry*, JHEP **9909**, 032 (1999).
- [24] E. Witten, *Nucl. Phys. B* **268**, 253 (1986).
- [25] I. Hinchliffe, N. Kersting and Y.L. Ma, *Int.J. Mod. Phys. A* **19**, 179 (2004).
- [26] Ver por ej. O. F. Dayi and A. Jellal, *J.Math.Phys.* **51**, 063522 (2010). C. Bastos, O. Bertolami, N. C. Dias and J. N. Prata, *Int.J.Mod.Phys. A*28 (2013).
- [27] J. Bellissard, A. van Elst and H. Schulz-Baldes, *J. Math. Phys.* **35**, 5373 (1994).
- [28] M Chaichian, M M Sheikh-Jabbari, A Tureanu, *Hydrogen atom spectrum and the lamb shift in noncommutative QED.*, PhysRevLett **86** (2001) 2716.
- [29] H. Falomir, J. Gamboa, M. Loewe, F. Mendez and J. C. Rojas *Testing spatial noncommutativity via the Aharonov-Bohm effect* Phys. Rev. **D66** (2002) 045018.
- [30] S. Carroll, J. Harvey, V. A. Kostelecky, C. D. Lane and T. Okamoto, *Noncommutative Field Theory and Lorentz violation* Phys. Rev. Lett. **87**, 141601 (2001).
- [31] V. A. Zagrebnoy, J. B. Bru, Phys. Rep. 350, 291 (2001).
- [32] J. Stuhler, A. Griesmaier, T. Koch, T. Pfau, S. Giovanazzi, P. Pedri and Santos, Phys. Rev. Lett. 95, 150406 (2005).
- [33] T. Lahaye, C. Menotti, L. Santos, M. Lewenstein, and T. Pfau, *The physics of dipolar bosonic quantum gases*, Rep. Prog. Phys. 72, 126401 (2009).
- [34] J. Gamboa and F. Mendez, *Bose-Einstein condensation theory for any integer spin and quantum mechanics in noncommutative spaces*, [arXiv:0912.2645].
- [35] J. Gamboa, M. Loewe, F. Mendez, J. C. Rojas *The Landau problem and noncommutative quantum mechanics*, Mod. Phys. Lett.A16:2075-2078, (2001).
- [36] K. v. Klitzing, G. Dorda and M. Pepper, Phys. Rev. Lett. 45, 494 (1980); D. C. Tsui, H. L. Stormer and A. C. Gossard, Phys. Rev. Lett. **48**, 1559 (1982).
- [37] M. R. Douglas y C. M. Hull, *D-branes and concommutative torus*, JHEP **9802** (1998) 008 [hep-th/9711165].
- [38] J.P. Gauntlett, J. Gomis, P.K. Townsend, *BPS Bounds for Worldvolume Branes*, J. High Energy Phys. 9801 (1998) 003.

- [39] J. Polchinski, *String theory*, Vols. 1 and 2, Cambridge University Press, Cambridge, 1998.
- [40] Szabo R.J., *An introduction to string theory and D-brane dynamics*, Imperial College Press, London, 2004.
- [41] Carl E. Carlson and Christopher D. Carone, Phys. Rev. **D66** (2002), 075001.
- [42] Banerjee R., Chakraborty B. and Kumar K., Phys. Rev. **D70** (2004), 125004. Iorio A., Phys. Rev. **D77** (2008). Banerjee R., Chakraborty B. and Kumar K., Phys. Rev. **D77** (2008), 048702. Kase H., Morita K., Okumura Y. and Umezawa E., Progr. Theoret. Phys. **109** (2003), 663-685. Morita K., Okumura Y. and Umezawa E., Progr. Theoret. Phys. **110** (2003), 989-1001. Carone C.D. and Kwee H.J., Phys. Rev. **D73** (2006), 096005. Eftefaghi M.M. and Haghghat M., Phys. Rev. D **75** (2007), 125002. Saxell S., Phys. Lett. **B666** (2008), 486-490.
- [43] S. Doplicher, K. Fredenhagen and J.E. Roberts, Phys. Lett. **B331** (1994), 39-44. Comm. Math. Phys. **172** (3), 187220 (1995).
- [44] R. Amorim, Phys. Rev. Lett. **101** (2008) 081602. Phys. Rev. **D78** (2008) 105003. J. Math. Phys. **50** (2009) 022303. J. Math. Phys. **50** (2009) 05210.
- [45] L. Suskind, *The quantum Hall fluid and non-commutative Chern Simons theory*, arXiv:[hep-th/0101029], 2001.
- [46] La lista de trabajos en la deformación de los conmutadores canónicos y sus aplicaciones es muy extensa. Solo por mencionar algunos: G.V. Dunne, J. Jackiw, and C. Trugenberger, Phys. Rev. D **41**, 661 (1990). J. Gamboa, M. Loewe, and J. C. Rojas, Phys. Rev. D **64**, 067901 (2001). Nair V.P. and Polychronakos A.P., Phys. Lett. **B505** (2001), 267-274. Chaichian M., Sheikh-Jabbari M.M. and Tureanu A., Phys. Rev. Lett. **86** (2001), 2716-2719. Duval C. and Horváthy P.A., Phys. Lett. **B479** (2000), 284-290. J. Gamboa, M. Loewe, J. C. Rojas, and F. Méndez, Int. J. Mod. Phys. A **17**, 2555 (2002). J. Gamboa, M. Loewe, J. C. Rojas, and F. Méndez, Mod. Phys. Lett. A **16**, 2075 (2001). H. Falomir, J. Gamboa, M. Loewe, F. Mendez, and J. C. Rojas, Phys. Rev. D **66**, 045018 (2002). Chaichian M., Demichec A., Presnajder P., Sheikh-Jabbari M.M. and Tureanu A., Phys. Lett. **B527** (2002), 149-154. Banerjee R., Modern Phys. Lett. **A17** (2002), 631-645. K. Bolonek and P. Kosinski, arXiv:0704.2538. A. Kijanka and P. Kosinski, Phys. Rev. D **70**, 127702 (2004). L. Mezincescu, arXiv:hep-th/0007046. C. Acatrinei, JHEP **09** (2001) 007. Jonke L. and Meljanac S., Eur. Phys. J. **C29** (2003), 433-439. Kokado A., Okamura T. and Saito T., Phys. Rev. **D69** (2004), 125007. Calmet X. and Selvaggi M., Phys. Rev. D **74** (2006), 037901. Scholtz F.G., Chakraborty B., Govaerts J. and Vaidya S., J. Phys. A: Math. Theor. **40** (2007), 14581. Banerjee R., Mukherjee P. and Samanta S., Phys. Rev. D **75** (2007) 125020. M. Gomes and V. G. Kupriyanov, Phys. Rev. D **79**, 125011 (2009). O. Bertolami and C. Zarro, Phys. Rev. D **81**, 025005 (2010). C. Bastos, O. Bertolami, N. Dias, and J. Prata, Phys. Rev. D **78**, 023516 (2008). O. Bertolami, J. G. Rosa, C. M. L. de Aragao, P. Castorina, and D. Zappala, Phys. Rev. D **72**, 025010 (2005). M. Gomes, V. G. Kupriyanov and A. J. da Silva, Phys. Rev. D **81**, 085024 (2010).
- [47] L. Mezincescu, *Star operation in Quantum Mechanics*, [hep-th/0007046].
- [48] V. P. Nair y A. P. Polychronakos, *Quantum mechanics on the noncommutative plane and sphere*, Phys. Lett. B **505**, 267 (2001).

- [49] Este tema fue discutido varios años atrás por T.D. Newton and E.P. Wigner, *Rev. Mod. Phys.* **21**, 400 (1949).
- [50] M.A. Rieffel, *Proc. Symp. Pure Math.*, **51**, AMS, Providence, 411-423, 1990.
- [51] V. Iftimie, M. Mantoiu and R. Purice, *Publ. RIMS.* **43** (3), 585-623 (2007).
- [52] M. Mantoiu and R. Purice, *J. Math. Phys.* **46**, 052105 (2005).
- [53] H. Falomir, J. Gamboa, J. Lopez-Sarrion, F. Méndez and P. Pisani, *Phys. Lett. B* **680**, 384-386 (2009).
- [54] Ashok Das, H. Falomir, M. Nieto, J. Gamboa and F. Mendez, *Phys. Rev. D* **84** 045002 (2011).
- [55] L. S. Brown and W. I. Weisberger, *Nucl. Phys. B* **157**, 285 (1979).
- [56] H. Falomir, J. Gamboa, M. Loewe and M. Nieto. *J. Phys. A* **45**, 135308 (2012).
- [57] F. J. Vanhecke, C. Sigaud, A. R. da Silva, *Modified Symplectic Structures in Cotangent Bundles of Lie Groups*, *Braz. J. Phys.* 39:18-24 (2009).
- [58] R. Peierls, *Z. Phys.* 80,763 (1933).
- [59] Horvathy, *The non-commutative Landau problem*, *Ann. Phys.* 299:128-140 (2002).
- [60] Ciprian Acatrinei, *Comments on Noncommutative Particle Dynamics*, [hep-th/0106141].
- [61] Ciprian Acatrinei, *Surprises in Noncommutative Dynamics*, *Ann. U. Craiova Phys.* 21 (2011) 107-116.
- [62] J. M. Romero, J.A. Santiago, D. Vergara, *Newton's Second Law in Noncommutative Space*, *Phys. Lett.* **A310** (2003) 9-12.
- [63] J. M. Romero, D. Vergara, *The Kepler problem and non commutativity*, *Mod. Phys. Lett.* **A18** (2003) 1673-1680.
- [64] Ciprian Acatrinei, *Dimensional Reduction for Generalized Poisson Brackets* *J. Math. Phys.* 49:022903 (2008).
- [65] F. J. Vanhecke, C. Sigaud, A. R. da Silva, *Noncommutative Configuration Space. Classical and Quantum Mechanical Aspects* *Braz. J. Phys.* **36** (2006) 194-207.
- [66] Allen C. Hirshfeld and Peter Henselder, *Deformation Quantization in the Teaching of Quantum Mechanics* *Am. J. Phys.* 70 (5), May 2002.
- [67] A. Kempf, G. Mangano and R. B. Mann, *Hilbert Space Representation of the Minimal Length Uncertainty Relation*, *Phys. Rev. D* 52, 1108 (1995).
- [68] Mark K. Transtrum, *Quantum Mechanics in Snyder Space*.
- [69] J. Gamboa, M. Loewe and J. C. Rojas, *Phys. Rev.* **D 64**, 067901 (2001).
- [70] H. Falomir, P.A.G. Pisani, F. Vega, D. Cárcamo, F. Méndez, M. Loewe, *On the algebraic structure of rotationally invariant two-dimensional Hamiltonians on the noncommutative phase space*, a enviarse a *J. Phys. A* (2015) [arXiv:1507.06932].

- [71] G.V. Dunne, J. Jackiw, and C. Trugenberger, *Phys. Rev. D* **41**, 661 (1990).
- [72] J. Gamboa, F. Mendez, M. Loewe and J. C. Rojas, *Mod. Phys. Lett.* **A 16**, 2075 (2001); *Int. J. Mod. Phys.* **A 17**, 2555 (2002).
- [73] F. S. Bemfica and H. O. Girotti, *J. Phys. A* **38**, L539 (2005).
- [74] F.G. Scholtz, B. Chakraborty, J. Govaerts and S. Vaidy, *J. Phys. A: Math. Theor.* **40**, 14581 (2007); J. D. Thom and F. G. Scholtz, *J. Phys. A* **42**, 445301 (2009); S. Murray and J. Govaerts, *Phys. Rev. D* **83**, 025009 (2011); V. Galikova and P. Presnajder, arXiv:1112.4643 [math-ph].
- [75] Jian-zu Zhang, *Physics Letters B* **584** (2004) 204-209.
- [76] Jian-zu Zhang, *Phys. Rev. Lett.* **93**, (2004) 043002.
- [77] E. Fradkin, "Field Theory of Condensed Matter Systems", Addison-Wesley Publishing Company (1991), Redwood City, California, USA.
- [78] Xiao-Gang Wen, "Quantum Field Theory of Many-Body Systems", Oxford University Press (2004), Oxford, Great Britain.
- [79] F G Scholtz, L Gouba, A Hafver and C M Rohwer, *J. Phys. A: Math. Theor.* **42** (2009) 175303.
- [80] V. Bargmann, *Ann. Math.* **48**, 568 (1947).
- [81] H. Falomir, F. Vega, J. Gamboa, F. Méndez and M. Loewe, *Noncommutativity in (2+1)-dimensions and the Lorentz group*, *Phys. Rev.* **D86** (2012) 105035.
- [82] M. Abramowitz and I. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions*, Dover Publications, New York, 1972.
- [83] Wolfram Mathematica 6, Wolfram Research, 2007.
- [84] *Higher Transcendental Functions* Vol. 1, Staff of the Bateman Manuscript Project, Ed. Arthur Erdélyi, McGraw Hill Publishing Company, Florida, USA, 1953.
- [85] Weisstein, Eric W. *Jacobi Polynomial*. From MathWorld—A Wolfram Web Resource. <http://mathworld.wolfram.com/JacobiPolynomial.html>
- [86] F. Vega, *Oscillators in a (2+1)-dimensional noncommutative space*, *J. Math. Phys.* **55** (2014) 032105.
- [87] A.F. Ferrari, M. Gomes, V.G. Kupriyanov and C.A. Stechhahn, [arXiv:1207.0412v1].
- [88] B. Binengar, *J. Math. Phys.* **23**, 1511 (1982).
- [89] R. Jackiw and V.P. Nair, *Phys. Rev. D* **43**, 1933 (1991).
- [90] La literatura en la descomposición de Levi y sus aplicaciones es muy amplia. Algunas referencias son: R. Gilmore, *Lie Groups, Lie Algebras, and Some of Their Applications*, Dover Books on Mathematics (2005). M.A. Naimark, *Theory of group representations*, Springer (1982). J.P. Dufour, N. Tien Zung *Poisson Structures and Their Normal Forms*, Birkhäuser Verlag.
- [91] A. Das, J. Gamboa, F. Mendez and F. Torres, *Phys. Lett.* **375A**, 1756 (2011).

- [92] M. Moshinsky and A. Szczepaniak, *J. Phys. A: Math. Gen.* 22, L817 (1989).
- [93] A. Cannas da Silva, *Lectures on symplectic geometry*, Lecture notes in mathematics **1764**, Springer.
- [94] J. E. Marsden and T. S. Ratiu, *Introduction to Mechanics and Symmetry*, Springer.
- [95] B. Muthukumar and P. Mitra, *Noncommutative oscillators and the commutative limit*, *Phys. Rev. D* **66**, 027701 (2002).
- [96] Giri P. R. and Roy P., *Eur. Phys. J. C*, 57 (2008) 835.
- [97] J. Ben Geloun, Sunandan Gangopadhyay and F. G. Scholtz, *EPL*, 86 (2009) 51001.